Mathematics. — *Sur un principe de variation de* GAUSS *dans la théorie du potentiel.* Par A. F. MONNA. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of December 28, 1940.)

§ 1. *La notion de „balayage" d'une distribution de masse.*

Soit dans un espace euclidien R à trois dimensions Ω un ensemble ouvert à frontière bornée, entièrement extérieure Σ. Posons $\Omega + \Sigma = F$. Soit θ une distribution de masse positive sur Ω avec potentiel V. On suppose que — si Ω n'est pas borné — toute la masse se trouve sur un sous-ensemble borné de Ω. Par le „balayage" de θ sur Σ on entend la construction d'une distribution positive sur Σ telle que le potentiel de cette nouvelle distribution égale V sur le complémentaire $C\Omega$ de Ω. Si cela ne soit pas possible, on demande au moins de construire une distribution telle que la condition soit satisfaite „aussi bien que possible"; il faut alors naturellement préciser ces derniers mots. Cette circonstance se présente en effet: l'égalité en tout point de $C\Omega$ n'est pas possible en général. On sait cependant qu'une et une seule solution existe si l'on remplace la condition par: 1^0. égalité des deux potentiels sur CF et 2^0. égalité des potentiels sur Σ sauf peut être aux points d'un sous-ensemble de Σ de capacité nulle (c. a. d. à peu près partout sur Ω). On a montré ce théorème par deux voies essentiellement différentes.

a. La première méthode repose sur un théorème de F. RIESZ, exprimant que toute fonction surharmonique peut s'écrire comme la somme d'une fonction harmonique et du potentiel d'une distribution de masse positive, d'ailleurs uniquement déterminée. La distribution cherchée est alors celle qui correspond à la fonction surharmonique $(\widehat{\overline{V}, V})$. où $\overline{V}$ désigne la meilleure minorante harmonique de V[1]).

Cette méthode correspond à la méthode de WIENER pour construire la solution généralisée du problème de DIRICHLET. laquelle consiste à écrire Ω comme limite d'une suite croissante d'ensembles ouverts, tous contenus dans Ω.

b. La deuxième méthode repose sur le principe suivant dû à GAUSS et montré au cas général par FROSTMAN[2]).

---

[1]) M. BRELOT, Fonctions sous-harmoniques et balayage. Bull. Acad. royale de Belgique **24** (1938).

[2]) O. FROSTMAN, Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles. Meddel. från Lunds Univ. Mat. Sem. (1935).

Soit $\varrho(e)$ une distribution quelconque de masse positive sur Σ, U son potentiel. Considérons l'intégrale

$$\int_{\Sigma} (U - 2V)\, d\varrho.$$

On démontre qu'il existe une et une seule distribution qui, parmi toutes les distributions possibles, minime cette intégrale. Cette distribution $\underline{\mu}(e)$ satisfait aux conditions imposées.

Remarquons encore que le potentiel n'augmente nulle part par le balayage (toujours si les masses sont positives).

§ 2. *La notion de „extrémisation" d'une distribution de masse.*

BRELOT a généralisé le procédé de WIENER, mentionné ci-dessus. Il remarque que chaque ensemble fermé est la limite d'une suite décroissante d'ensembles ouverts, tous contenant l'ensemble donné. Par un procédé tout à fait analogue à celui de WIENER, on fait correspondre alors à chaque ensemble fermé F une fonction, nommée „solution du problème de DIRICHLET pour F". A chaque distribution sur F correspond une distribution sur la frontière de F telle que le potentiel n'est nulle part augmenté et même égale le potentiel originel sur CF. Cette transformation, analogue au balayage, est nommée „extrémisation" [1]). Nous désignons la distribution obtenue par $\bar{\mu}(e)$.

Considérons encore l'ensemble ouvert Ω du début de § 1. A la distribution θ correspondent donc au moins deux distributions, $\underline{\mu}$ et $\bar{\mu}$, sur Σ telles que le potentiel est partout au plus égal à celui de θ et est même conservé sur $C(\Omega + \Sigma) = CF$. Remarquons que $\bar{\mu}$ ne possède pas, comme $\underline{\mu}$, la propriété que le potentiel est conservé à peu près partout sur Σ (pourvu que $\underline{\mu} \not\equiv \bar{\mu}$). Mais il existe encore plus de distributions possédant ces propriétés. En effet, on peut généraliser la méthode de WIENER—BRELOT pour ensembles E quelconques [2]). A E correspondent alors deux distributions sur la frontière de E (qui sont certainement identiques si E est fermé ou ouvert). On obtient donc d'autres distributions sur Σ, satisfaisant aux conditions, en prenant pour E un sous-ensemble de F à frontière Σ.

En tous ces cas la construction de la distribution se fait d'une manière analogue à la méthode a du § 1.

La question se pose donc si l'on peut caractériser ces distributions — en particulier $\bar{\mu}$ — d'un façon analogue à la méthode *b*. Une telle caractérisation sera donnée ci-dessous.

---

[1]) M. BRELOT. Critères de régularité et de stabilité. Bull. Ac. Royale de Belgique **25** (1939).

[2]) A. F. MONNA. Extension du problème de Dirichlet pour ensembles quelconques. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam **43**, 497 (1940).

§ 3. *Propriétés des distributions obtenues sur Σ.*

Soit $\varrho(e)$ une distribution de masse positive sur Σ avec potentiel U, telle que (pour la notation voir le début du § 1)

$$U \leqq V \text{ partout} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

$$U = V \text{ sur } CF \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1b)$$

Nous supposons encore que les masses de la distribution θ se trouvent à une distance positive de Σ de sorte que V est continu sur Σ.

On obtient de $(1a)$

$$\overline{\lim_{P \to Q}}\, U(P) \leqq V(Q)$$

$$(P \supset \Omega;\ Q \supset \Sigma).$$

Alors, par les propriétés de la meilleure minorante harmonique d'une fonction surharmonique,

$$U(P) \leqq \overline{V(P)} = \int_{\Sigma} \frac{d\,\underline{\mu}(e_Q)}{r_{PQ}}$$

$$(P \supset \Omega)$$

et ensuite, U étant surharmonique,

$$\underline{\lim_{P \to Q}}\ \overline{V(P)} \geqq \underline{\lim_{P \to Q}}\ U(P) \geqq U(Q).$$

Donc, par $(1b)$

$$U(P) \leqq \widehat{(\overline{V(P)},\ V(P))}$$

$$(P \supset R).$$

Par conséquent on a partout

$$U(P) \leqq \int_{\Sigma} \frac{d\,\underline{\mu}(e_Q)}{r_{PQ}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Afin d'obtenir une borne inférieure pour $U(P)$, considérons une suite décroissante d'ensembles ouverts avec limite F:

$$\lim_{k \to \infty} \Omega_k = F$$

$$\Omega_1 \supseteq \Omega_2 \supseteq \ldots . \supset F.$$

Balayons les masses $\varrho(e)$ sur la frontière Σ_k de Ω_k. Le potentiel n'augmente pas et hors Ω_k et aux points réguliers de Σ_k il est conservé, c.a.d. il y vaut V. Il s'en suit qu'après le balayage le potentiel est dans Ω_k égal à la meilleure minorante harmonique de V sur Ω_k. Donc

$$U(P) \geqq \{\overline{V(P)}\}_{\Omega_k}.$$

Pour $k \to \infty$ le membre à droite tend vers l'extrémale $\mathring{V}(P)$ de $V(P)$ sur F. Donc

$$U(P) \geqq \mathring{V}(P)$$

et avec (1b)

$$U(P) \geqq (\mathring{V}(P), V(P)).$$

Donc partout

$$U(P) \geqq \int\limits_{\Sigma} \frac{d\bar{\mu}(e_Q)}{r_{PQ}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Il résulte de (2) et (3) qu'on a

$$\int\limits_{\Sigma} \frac{d\varrho(e_Q)}{r_{PQ}} = a(P) \int\limits_{\Sigma} \frac{d\bar{\mu}(e_Q)}{r_{PQ}} + (1 - a(P)) \int\limits_{\Sigma} \frac{d\underline{\mu}(e_Q)}{r_{PQ}} \quad . . \quad (4)$$

avec

$$0 \leqq a(P) \leqq 1. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Remarquons que $a(P)$ n'est pas uniquement déterminé par cette dernière équation aux points de CF et aux points stables de Σ parce que les deux intégrales à droite y sont égales: on obtient une forme indéterminée pour a. Il en résulte qu'il faudrait séparer dans toutes les intégrales qui suivent une partie où a n'est pas déterminé. Pour raisons de simplification nous ne le ferons cependant pas, puisque justement par le fait que les deux intégrales mentionnées y sont égales, les résultats n'en changent pas. Nous supposons donc $a(P)$ convenablement défini dans tous les points où il reste indéterminé par (4).

La relation (4) est susceptible d'une généralisation considérable. Soit $f(Q)$ une fonction continue sur Σ. On sait que f peut s'obtenir comme limite des potentiels d'une suite de distributions θ_n sur R (généralement pas seulement sur Σ; la suite des potentiels converge uniformément). On a

$$\int\limits_{\Sigma} f(Q)\, d\varrho(e_Q) = \lim_{n \to \infty} \int\limits_{\Sigma} d\varrho(e_Q) \int\limits_{R} \frac{d\theta_n(S)}{r_{SQ}} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Avec (4) l'intégrale à droite se réduit à

$$\int\limits_{\Sigma} d\underline{\mu}(e_Q) \int\limits_{R} \frac{d\theta_n(S)}{r_{SQ}} + \int\limits_{R} a(S)\, d\theta_n(S) \left[\int\limits_{\Sigma} \frac{d\bar{\mu}(e_Q)}{r_{SQ}} - \int\limits_{\Sigma} \frac{d\underline{\mu}(e_Q)}{r_{SQ}} \right]. \quad (7)$$

On voit donc par (5) que l'intégrale se trouve entre les bornes

$$\int\limits_{\Sigma} d\underline{\mu}(e_Q) \int\limits_{R} \frac{d\theta_n(S)}{r_{SQ}} \quad \text{et} \quad \int\limits_{\Sigma} d\bar{\mu}(e_Q) \int\limits_{R} \frac{d\theta_n(S)}{r_{SQ}}.$$

Faisons alors $n \to \infty$. On obtient

$$\int_{\Sigma} f(Q)\, d\varrho\,(e_Q) = \lambda_f \int_{\Sigma} f(Q)\, d\bar{\mu}\,(e_Q) + (1-\lambda_f) \int_{\Sigma} f(Q)\, d\underline{\mu}\,(e_Q) \quad . \quad (8)$$

$$0 \leqq \lambda_f \leqq 1.$$

Ici, λ_f est une fonctionnelle de f.

On voit que cette relation subsiste si f est une fonction bornée, appartenant à une quelconque des classes de BAIRE. Prenons alors pour f la fonction caractéristique d'un sous-ensemble quelconque mesurable (B) de Σ. Alors on obtient

$$\varrho\,(e) = \lambda_e\, \bar{\mu}\,(e) + (1-\lambda_e)\, \underline{\mu}\,(e). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$0 \leqq \lambda_e \leqq 1.$$

Nous transformons cette relation comme il suit. Par un calcul simple on voit que l'intégrale à droite de (6) peut s'écrire

$$\int_{\Sigma} \xi_n\,(Q)\, d\bar{\mu}\,(e_Q) \int_R \frac{d\theta_n(S)}{r_{SQ}} + \int_{\Sigma} (1-\xi_n\,(Q))\, d\underline{\mu}\,(e_Q) \int_R \frac{d\theta_n(S)}{r_{SQ}} \quad .$$

où

$$\int_R \frac{a(S)}{r_{SQ}}\, d\theta_n\,(S) = \xi_n\,(Q) \int_R \frac{d\theta_n(S)}{r_{SQ}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Remarquons alors que par la définition même la suite des potentiels de $\{\theta_n\}$ est partout convergente, de sorte que le potentiel de la distribution $\theta_n - \theta_{n+p}$ $(p > 0)$ tend vers zéro partout si $n \to \infty$. On en tire que la suite $\{\theta_n(e) - \theta_{n+p}\,(e)\}$ tend vers zéro pour *chaque* e si $n \to \infty$ [1]) et le même est vrai pour la variation positive et la variation négative de $\theta_n - \theta_{n+p}$. En vertu de (5) il s'en suit que la différence

$$\int_R \frac{a(S)}{r_{SQ}}\, d\,[\theta_n - \theta_{n+p}]$$

peut être rendue arbitrairement petite à fortiori en chaque point Q pour n assez grand. La limite pour $n \to \infty$ du membre à gauche de l'équation précédente existe donc [2]). Puisque l'intégrale à droite tend vers 1 sur e, on peut donc écrire

$$\lim_{n \to \infty} \xi_n\,(Q) = \xi_e\,(Q).$$

---

[1]) Voir la démonstration d'un théorème de M. RIESZ dans les Acta de Szeged IX (1938) p. 10.

[2]) Remarquons que si l'on substitue pour a les termes d'une suite convergente $\{a_i\}$, la convergence est uniforme par rapport à i. Ceci sera utilisé plus tard.

La fonction bornée ξ_e dépend encore de e. On a donc

$$\varrho(e) = \int_e \xi_e(Q)\, d\bar{\mu}(e_Q) + \int_e (1 - \xi_e(Q))\, d\underline{\mu}(e_Q).$$

Or on a

$$\begin{aligned}\varrho(e) &= \lim_{i\to\infty} \sum_i \varrho(\triangle_{1/i}\, e)\\ &= \lim_{i\to\infty} \sum_i \int_{\triangle_{1/i} e} \xi\, d\bar{\mu} + \text{terme analogue}\\ &= \lim_{i\to\infty} \int_e \xi_i^*\, d\bar{\mu} + \ldots\end{aligned}$$

Ici, ξ_i, defini sur $\triangle_{1/i}\, e$, désigne la fonction correspondant à $\triangle_{1/i}\, e$ au sens mentionné. ξ_i^* est défini sur tout Σ; on a $\xi_i^*(Q) = \xi_i(Q)$ si Q est sur $\triangle_{1/i}\, e$. Soit alors $e_1 \subset e_2$. On peut arranger de sorte que chaque terme de la suite des fonctions continues tendant vers la fonction caractéristique de e_1, est au plus égale au terme correspondant de la suite analogue pour e_2. Donc

$$\int \frac{1}{r_{SQ}}\, d\,\theta_n^{(e_2)}(S) \geqq \int \frac{1}{r_{SQ}}\, d\,\theta_n^{(e_1)}(S) \geqq C$$

Il s'ensuit comme ci-dessus que la limite

$$\lim_{e\to Q}\ \lim_{n\to\infty} \int \frac{\alpha(S)}{r_{SQ}}\, d\,\theta_n^{(e}(S)$$

existe. Donc, $\lim \xi_i^*$ existant et les ξ_i^* étant bornés dans leur ensemble, on a

$$\varrho(e) = \int_e \xi(Q)\, d\bar{\mu}(e_Q) + \int_e (1 - \xi(Q))\, d\underline{\mu}(e_Q) \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

où ξ est une fonction bornée définie sur Σ [1]). On a (voir (9))

$$0 \leqq \xi(Q) \leqq 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

§ 4. *Extension du principe de* GAUSS.

L'intégrale

$$\int_\Sigma (U - 2\,V)\, d\varrho(e_Q) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

---

[1]) Il va sans dire que ξ dépend de ϱ (e), donc du choix de λ (e) dans la formule (9).

n'est évidemment pas bornée supérieurement si l'on ne restreint pas la classe des distributions ϱ. On peut seulement dire alors qu'elle est bornée inférieurement et atteint sa borne inférieure pour $\varrho = \underline{\mu}$. Nous allons montrer qu'elle a aussi un maximum si l'on ne considère que des distributions dont le potentiel satisfait aux conditions (1a) et (1b). Ce maximum sera atteint pour $\varrho = \overline{\mu}$.

Substitution de (9) en (13) donne (nous supprimons dans r, $\underline{\mu}$ et $\overline{\mu}$ les variables)

$$F[\lambda] \equiv \int_{\Sigma} (U - 2\,V)\, d\varrho = \iint_{\Sigma} \frac{1}{r}\, d\lambda\overline{\mu}\, d\lambda\overline{\mu} - 2 \iint_{\Sigma} \frac{1}{r}\, d\lambda\overline{\mu}\, d\lambda\underline{\mu} +$$

$$+ \iint_{\Sigma} \frac{1}{r}\, d\lambda\underline{\mu}\, d\lambda\underline{\mu} + 2 \iint_{\Sigma} \frac{1}{r}\, d\lambda\overline{\mu}\, d\underline{\mu} - 2 \iint_{\Sigma} \frac{1}{r}\, d\underline{\mu}\, d\lambda\underline{\mu} + 2 \int V\, d\lambda\underline{\mu} -$$

$$- 2 \int V\, d\lambda\overline{\mu} + \iint_{\Sigma} \frac{1}{r}\, d\underline{\mu}\, d\underline{\mu} - 2 \int V\, d\underline{\mu}.$$

Pour $\lambda = 1$ on obtient

$$\int (U_{\overline{\mu}} - 2\,V)\, d\overline{\mu},$$

pour $\lambda = 0$

$$\int (U_{\underline{\mu}} - 2\,V)\, d\underline{\mu}.$$

De l'inégalité (2) il résulte que $F[\lambda]$ est borné supérieurement. La borne supérieure est accessible. Ceci est une conséquence de ce que de toute suite $\{\lambda_i(e)\}$ on peut extraire une suite partielle convergente et parce que $F[\lambda]$ est une fonctionelle continue de λ. On montre ce dernier point comme il suit.

D'abord on a en vertu de (11) et puisque ξ_i est positif (nous écrivons seulement le premier terme du développement de $F[\lambda]$, les autres termes étants tout analogues)

$$\iint \frac{1}{[r_{Q_1 Q_2}]_p}\, d(\lambda_i\, \overline{\mu})_{Q_1}\, d(\lambda_i\, \overline{\mu})_{Q_2} = \iint_{\Sigma} \frac{1}{[r_{Q_1 Q_2}]_p}\, \xi_i(Q_1)\, \xi_i(Q_2)\, d\overline{\mu}_{Q_1}\, d\overline{\mu}_{Q_2}$$

où l'on a posé

$$[r]_p = p \quad \text{si} \quad r \leqq p$$
$$[r]_p = r \quad \text{si} \quad r > p$$

Pour $p \to \infty$ on obtient, en vertu d'un théorème connu [1])

$$A_{\lambda_i} \equiv \iint_{\Sigma} \frac{1}{r_{Q_1 Q_2}} d(\lambda_i \overline{\mu})_{Q_1} d(\lambda_i \overline{\mu})_{Q_2} = \iint_{\Sigma} \frac{1}{r_{Q_1 Q_2}} \xi_i(Q_1) \xi_i(Q_2) d\mu_{Q_1} d\overline{\mu}_{Q_2}.$$

Remarquons maintenant, comme on voit aisément successivement par les formules 9, 4 et 10 (remarquer la note 2, p. 54), qu'a la suite convergente $\{\lambda_i\}$ correspond une suite convergente $\{\xi_i(Q)\}$ et que les limites λ et ξ se correspondent. On en tire en appliquant un théorème de la théorie des intégrales de RADON—STIELTJES [2])

$$\lim_{i \to \infty} A_{\lambda_i} = A_\lambda,$$

d'où sort la continuité de $F[\lambda]$.

Si la borne supérieure est atteinte pour $\lambda \equiv 1$, le théorème est montré.

Supposons donc que $\lambda \neq 1$. Alors la variation de F est négative ou zéro pour cette valeur de λ et pour *toutes* les variations permises de λ:

$$\delta F[\lambda(e)] \leqq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Cela conduira à une contradiction. Posons pour abréger

$$\iint \frac{1}{r} d\varrho \, d\sigma = I(\varrho, \sigma).$$

On trouve

$$\delta F = 2I(\lambda\overline{\mu}, \delta\lambda\overline{\mu}) - 2I(\delta\lambda\overline{\mu}, \lambda\underline{\mu}) - 2I(\lambda\overline{\mu}, \delta\lambda\underline{\mu}) + 2I(\lambda\underline{\mu}, \delta\lambda\underline{\mu}) +$$
$$+ I(\delta\lambda\overline{\mu}, \delta\lambda\overline{\mu}) - 2I(\delta\lambda\overline{\mu}, \delta\lambda\underline{\mu}) + I(\delta\lambda\underline{\mu}, \delta\lambda\underline{\mu}) +$$
$$+ 2I(\underline{\mu}, \delta\lambda\overline{\mu}) - 2I(\underline{\mu}, \delta\lambda\underline{\mu}) + 2\int V d\,\delta\lambda\underline{\mu} - 2\int V d\,\delta\lambda\overline{\mu}.$$

Pour $\lambda \equiv 0$ et $\delta\lambda > 0$ on a $\delta F \geqq 0$ puisque F atteint sa plus petite valeur pour $\lambda = 0$ dans la classe des fonctions $0 \leqq \lambda \leqq 1$. En posant $\delta\lambda = \varepsilon\varphi$, où $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit, on a donc si $\varphi \geqq 0$,

$$I(\underline{\mu}, \varphi\overline{\mu}) - I(\underline{\mu}, \varphi\underline{\mu}) + \int V d\,\varphi\underline{\mu} - \int V d\varphi\overline{\mu} \geqq 0. \quad . \quad . \quad (15)$$

---

[1]) Si la fonction f_n est décroissante de n et bornée supérieurement par un nombre fixe, enfin tend vers f, on a pour toute distribution μ ($\geqq 0$ ou $\leqq 0$) sur un ensemble borné: $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$ (M. BRELOT, Ac. de Belgique 24, p. 303).

[2]) Si $\lim f_n(\lambda) = f(\lambda)$ et $|f_n(\lambda)| \leqq \Phi(\lambda)$, où Φ est ϱ-intégrable, on a

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n(\lambda) \, d\varrho(\lambda) = \int f(\lambda) \, d\varrho(\lambda).$$

Noter la borne exprimée par la formule (12).

L'impossibilité de (14) pour *tout* $\delta\lambda$ est montrée si nous prouvons que

$$(\delta F)_\lambda - (\delta F)_{\lambda=0} > 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

pour de valeurs *spéciales* de φ. En vertu de (15), (16) se réduit à

$$I(\lambda\overline{\mu}, \varphi\overline{\mu}) - I(\varphi\overline{\mu}, \lambda\underline{\mu}) - I(\lambda\overline{\mu}, \varphi\underline{\mu}) + I(\lambda\underline{\mu}, \varphi\underline{\mu}) > 0.$$

On peut satisfaire cette inégalité pour $\varphi = C\lambda$ où C est une constante positive [1]). Puisque $I(\lambda\overline{\mu}, \lambda\overline{\mu}) > 0$ (voir FROSTMAN l.c. p. 28), il suffit de montrer que

$$[I(C\lambda\overline{\mu}, \lambda\underline{\mu}) + I(\lambda\overline{\mu}, C\lambda\underline{\mu})]^2 < 4\, I(\lambda\overline{\mu}, C\lambda\overline{\mu})\, I(\lambda\underline{\mu}, C\lambda\underline{\mu})$$

ou

$$[I(\lambda\overline{\mu}, \lambda\underline{\mu})]^2 < I(\lambda\overline{\mu}, \lambda\overline{\mu})\, I(\lambda\underline{\mu}, \lambda\underline{\mu}). \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

Remarquons maintenant que l'on a (FROSTMAN l.c. p. 30)

$$I(\lambda\overline{\mu}, \lambda\underline{\mu}) = \frac{1}{\pi^3}\int_R \left[\int_\Sigma \frac{d(\lambda\overline{\mu})_P}{r^2_{PM}} \cdot \int_\Sigma \frac{d(\lambda\underline{\mu})_Q}{r^2_{QM}}\right] d\tau_M,$$

$$I(\lambda\overline{\mu}, \lambda\overline{\mu}) = \frac{1}{\pi^3}\int_R \left[\int_\Sigma \frac{d(\lambda\overline{\mu})_Q}{r^2_{QM}}\right]^2 d\tau_M$$

$$I(\lambda\underline{\mu}, \lambda\underline{\mu}) = \frac{1}{\pi^3}\int_R \left[\int_\Sigma \frac{d(\lambda\underline{\mu})_Q}{r^2_{QM}}\right]^2 d\tau_M.$$

Alors (16) se réduit à (notation évidente)

$$\left[\int_R f_1(M)\, f_2(M)\, d\tau_M\right]^2 < \int_R [f_1(M)]^2\, d\tau_M \cdot \int_R [f_2(M)]^2\, d\tau_M, \quad . \quad (18)$$

c. à. d. à l'inégalité de SCHWARZ. Il ne reste donc que de montrer que

---

1) S'il y a des sous-ensembles de Σ où $\lambda(e) = 1$, donc $\varrho = \overline{\mu}$, il faut poser $\varphi = 0$ sur ces ensembles pour que $\delta\lambda = \varepsilon\varphi$ soit une variation permise de λ. On n'obtient alors pas l'inégalité DE SCHWARZ (voir (18)), mais une autre inégalité à laquelle, comme on voit aisément, on peut satisfaire en prenant la constante C suffisamment petite.

On peut d'ailleurs montrer en appliquant le théorème d'unicité de l'extrémisation que λ ne peut être égal à 1 pour tous les sous-ensembles de l'ensemble des points de Σ qui sont instables pour F mais réguliers pour Ω (ce sont les ensembles où $\overline{\mu} = 0$ et $\underline{\mu} > 0$) sans que λ soit identiquement égal à 1. De même λ ne peut être 1 pour tous les sous-ensembles de l'ensemble des points stables.

les deux membres ne sont pas égals, donc l'impossibilité de l'égalité suivante (C une constante):

$$\int_{\Sigma} \frac{d\,(\lambda \bar{\mu})_Q}{r_{QM}^2} = C \int_{\Sigma} \frac{d\,(\lambda \underline{\mu})_Q}{r_{QM}^2}$$

(M quelconque dans R).

En posant

$$\lambda\,(e)\,\bar{\mu}\,(e) - C\,\lambda\,(e)\,\underline{\mu}\,(e) = \chi\,(e)$$

cette relation se réduit à

$$\int_{\Sigma} \frac{d\chi\,(e_Q)}{r_{PM}^2} = 0$$

$(M \supset R)$

En vertu d'un théorème de M. RIESZ [1], valable aussi pour potentiels non-Newtoniens, ceci n'est possible que si la distribution $\chi\,(e)$ est identiquement nulle:

$$\lambda\,(e)\,\bar{\mu}\,(e) = C\,\lambda\,(e)\,\underline{\mu}\,(e),$$
$$\bar{\mu}\,(e) = C\,\underline{\mu}\,(e)$$

On en tire $C = 1$ et $\bar{\mu} = \underline{\mu}$ [2]. Alors $\varrho = \bar{\mu} = \underline{\mu}$ et la classe des distributions ϱ n'en contient qu'une seule.

Le théorème énoncé est donc montré.

Remarque. Pour ensembles bornés une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{\mu} = \underline{\mu}$ est que l'ensemble des points instables de Σ a la capacité nulle. En effet, dans les points stables Q on a $U(Q) = \lim\limits_{P \to Q} U(P)$ pour $P \supset CF$; donc $U(Q) = V(Q)$. Alors le théorème d'unicité, mentionné dans § 1, s'applique. Seulement pour ces ensembles ouverts il n'existe donc qu'une seule distribution telle que le potentiel est partout $\leqq V$ et $= V$ sur CF.

§ 5. *Application; l'intégrale d'énergie d'une distribution.*

Soit S une sphère contenant $\Omega + \Sigma = F$. Appliquons le théorème à l'ensemble CF et supposons que les masses θ sont uniformément réparties sur la surface de S. Le potentiel V de θ est alors égale à une constante à l'intérieur de S; supposons la $= 1$. Il faut alors considérer l'intégrale

$$F_\varrho \equiv \int_{\Sigma} (U_\varrho - 2)\, d\varrho$$

---

[1] M. RIESZ, Intégrales de RIEMANN-LIOUVILLE et potentiels. Acta de Szeged IX (1938) p. 10.

[2] Voir la note p. 9.

On ne considère que des ϱ telles que le potentiel est partout $\leqq 1$ et $= 1$ sur Ω.

F_ϱ atteint son minimum pour une distribution $\underline{\mu}^{(1)}(e)$. Le potentiel correspondant est $= 1$ sur Ω et à peu près partout sur Σ. La masse totale $\underline{\mu}^{(1)}(\Sigma)$ est la capacité de F. Puisque $\underline{\mu}^{(1)}$ ne porte pas de masse sur des ensembles de capacité nulle, on voit que le minimum de F_ϱ est égal à $-\underline{\mu}^{(1)}(\Sigma)$ [1]. D'après ce que nous avons montré, F_ϱ atteint un maximum pour la distribution $\overline{\mu}^{(1)}(e)$. En général, le potentiel correspondant n'est plus à peu près partout égal à 1 sur Σ, mais seulement dans les points stables de Σ relativement à $C\Omega$. M. BRELOT a prouvé que la masse $\overline{\mu}^{(1)}$ n'est répartie que sur l'ensemble de ces points stables [2]. On en tire que le maximum de F_ϱ est égal à $-\overline{\mu}^{(1)}(\Sigma)$. Donc

$$\underline{\mu}^{(1)}(\Sigma) \geqq \overline{\mu}^{(1)}(\Sigma)$$

Il est donc impossible de répartir sur Σ une masse totale $> \underline{\mu}^{(1)}(\Sigma)$ ou $< \overline{\mu}^{(1)}(\Sigma)$ tel que le potentiel est partout $\leqq 1$ et $= 1$ sur Ω.

On peut aussi exprimer cette dernière propriété comme il suit. Considérons la classe des distributions ϱ^* de la masse unité sur Σ dont le potentiel est constant dans Ω en ne surpasse nulle part cette constante. Pour toutes ces distributions l'intégrale d'énergie

$$I(\varrho^*, \varrho^*) = \iint_\Sigma \frac{d\varrho^*(e_{Q_1})\, d\varrho^*(e_{Q_2})}{r_{Q_1 Q_2}} = \int_\Sigma U_{\varrho^*}\, d\varrho^*$$

a un minimum $\dfrac{1}{\underline{\mu}^{(1)}(\Sigma)}$ et un maximum $\dfrac{1}{\overline{\mu}^{(1)}(\Sigma)}$ [3].

En effet, la relation entre les distributions ϱ et ϱ^* est

$$\varrho^*(e) = \frac{\varrho(e)}{\varrho(\Sigma)}$$

Alors

$$F_\varrho = \{\varrho(\Sigma)\}^2 \int_\Sigma U_{\varrho^*}\, d\varrho^* - 2\varrho(\Sigma),$$

donc

$$I(\varrho^*, \varrho^*) = \frac{F_\varrho + 2\varrho(\Sigma)}{\{\varrho(\Sigma)\}^2}.$$

---

[1]) Voir: C. DE LA VALLÉE POUSSIN. Les nouvelles méthodes de la théorie du potentiel et le problème généralisé de DIRICHLET. Act. Sci. et Industr. 578, p. 33.

[2]) Voir: M. BRELOT, Critères de régularité et de stabilité. Bull. Acad. royale de Belgique XXV (1939).

[3]) L'existence d'un minimum peut s'établir sans aucune restriction concernant les distributions ϱ^*. Evidemment des restrictions sont nécessaires pour qu'il existe un maximum.

On voit alors que le maximum et le minimum de I sont atteints respectivement pour

$$\overline{\mu}^* \equiv \frac{\overline{\mu}^{(1)}}{\overline{\mu}^{(1)}(\Sigma)} \quad \text{et} \quad \underline{\mu}^* \equiv \frac{\underline{\mu}^{(1)}}{\underline{\mu}^{(1)}(\Sigma)}$$

et ont la valeur mentionnée.

Remarquons que la borne supérieure des potentiels de $\overline{\mu}^*$ et de $\underline{\mu}^*$ est égale à la valeur correspondante de l'intégrale d'énergie. En général, ceci n'est pas vrai pour la borne supérieure $\{\varrho(\Sigma)\}^{-1}$ de U_{ϱ^*} puisque $F_\varrho \neq -\varrho(\Sigma)$

§ 6. *Extension pour les potentiels non-*NEWTON*ien.*

Dans son mémoire cité FROSTMAN a considéré des potentiels plus générals que celui de NEWTON. Il prend $r^{-\alpha}$ pour le potentiel de la masse unité. On suppose $\alpha < 3$ pour que le potentiel ne soit pas toujours infini à l'intérieur des masses. Enfin on prend $\alpha \geqq 1$ pour que le potentiel satisfasse à un principe de maximum analogue à celui de la théorie des fonctions harmoniques. Plus généralement encore, on peut considérer dans un espace euclidien à m dimensions les potentiels élémentaires $r^{\alpha-m}$ avec $0 < \alpha \leqq 2$.

Les théorèmes précédents peuvent être généralisés alors sans difficulté. Notons quelques points. Pour capacité d'un ensemble il faut prendre la capacité d'ordre α. Au lieu des fonctions simplements surharmoniques il faut substituer les fonctions „surharmoniques d'ordre α" [1]).

En partant de la distribution $\underline{\mu}$ (dont on montre l'existence, d'après FROSTMAN, par le principe de minimum de GAUSS) on construit la distribution $\overline{\mu}$ au moyen d'une suite décroissante d'ensemble ouverts. Remarquons que la notion „solution généralisée du problème de DIRICHLET" — notion importante dans le cas NEWTONien — n'a aucun sens maintenant. Il faut y substituer une notion nouvelle, introduite par M. RIESZ, la notion de „prolongement d'une fonction donnée sur un ensemble fermé" (RIESZ l.c. p. 27).

Il y a une différence importante avec le cas NEWTONien: les masses de $\underline{\mu}$ et de $\overline{\mu}$ (et donc aussi de ϱ) ne sont pas exclusivement réparties sur Σ. La masse se trouve sur $C\Omega$. Aussi, faut-il parler non plus de balayage ou extrémisation sur Σ, mais de balayage ou extrémisation sur F. Une autre conséquence en est que pour la démonstration de la formule (8), il faut partir d'une fonction continue donnée sur $C\Omega$.

Dordrecht, novembre 1940.

---

[1]) O. FROSTMAN, Sur les fonctions surharmoniques d'ordre fractionnaire. Arkiv for Matematik, Astronomi och Fysik, Bd. **26** A (1939).