Mathematics. — *Ueber die Diskrepanz (mod 1) und die ganzzahligen Lösungen gewisser Ungleichungen.* Von J. F. KOKSMA. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of December 28, 1940.)

1. Es bedeute U ein System von $N \geqq 1$ reellen Zahlen $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(N)$ und α, β ein Paar reeller Zahlen mit

$$\alpha \leqq \beta \leqq \alpha + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Sei $A(\alpha, \beta)$ die Anzahl derjenigen der $f(x)$, für die die Diophantische Ungleichung

$$\alpha \leqq f(x) < \beta \qquad (mod\ 1)$$

gilt, d.h., für die bei irgend einem ganzen y gilt

$$\alpha \leqq f(x) - y < \beta.$$

Man nennt die Zahl

$$R = R(\alpha, \beta) = A(\alpha, \beta) - (\beta - \alpha) N \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

das Fehlerglied (für das Intervall $\alpha \leqq u < \beta$) in der Gleichverteilung (mod 1) des Systems U und die obere Grenze D der Zahlen $\frac{|R|}{N}$, wenn (α, β) die Menge aller Zahlenpaare mit (1) durchläuft, heisst die **Diskrepanz** (mod 1) des Systems U. Offenbar ist

$$\frac{1}{N} \leqq D \leqq 1.$$

Aus der Definition von D geht nun hervor, dass in jedem Intervall $\alpha < u < \beta$ der Länge $\beta - \alpha > D$ wenigstens eine der Zahlen $f(x)$ (mod 1) liegt, d.h.: ist $H > D$, so hat das System

$$\alpha < f(x) < \alpha + H \qquad (mod\ 1), \qquad 1 \leqq x \leqq N,$$

und auch das System

$$\alpha - H < f(x) < \alpha \qquad (mod\ 1), \qquad 1 \leqq x \leqq N$$

wenigstens eine ganzzahlige Lösung x.

Wir betrachten jetzt eine unendliche Folge reeller Zahlen $f(1), f(2), \ldots,$ und deuten mit $D(N)$ die Diskrepanz (mod 1) des Systems der ersten N Zahlen $f(1), f(2), \ldots, f(N)$ dieser Folge an. Ist dann $H(N) > D(N)$ für $N = 1, 2, \ldots,$ und strebt $H(N)$ mit unbeschränkt wachsendem N monoton gegen Null, so hat nach dem vorangehenden jedes der beiden Systeme

$$\alpha < f(x) < \alpha + H(x) \qquad (mod\ 1)$$

$$\alpha - H(x) < f(x) < \alpha \qquad (mod\ 1)$$

unendlich viele verschiedene ganzzahlige Lösungen x, und also erst recht auch die Diophantische Ungleichung

$$\alpha - H(x) < f(x) < \alpha + H(x) \qquad (mod\ 1), \quad . \ . \ . \ . \quad (3)$$

auf die wir uns beschränken wollen.

Es ist für die Theorie der Diophantischen Ungleichungen deshalb sehr wichtig, bei einer gegebenen Folge $f(1), f(2), \ldots$ scharfe Abschätzungen nach oben für die Diskrepanz (mod 1) $D(N)$ herleiten zu können.

Es gelingt nun manchmal, die Untersuchung der Verteilung (mod 1) des im Anfang erwähnten Systems U auf die Betrachtung des zugehörigen System U^* der N^2 Differenzen $f(x) - f(z)$ $(x, z = 1, 2, \ldots, N)$ zurückzuführen. Dieser Kunstgriff wurde wohl zuerst von Herrn H. WEYL benutzt und nachher von mehreren Autoren angewandt [1]).

So zeigten die Herren J. G. VAN DER CORPUT und CH. PISOT [2]) die folgende Ungleichung, die eine Verschärfung eines Vinogradoffschen Satzes darstellt, und in der D die Diskrepanz eines beliebigen Systems U, D^* die Diskrepanz des zugehörigen Systems U^* bedeutet:

$$D \leqq 2^{\frac{7}{2} + \sqrt{\frac{|\log D^*|}{\log 2}}} \sqrt{D^*}; \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (4)$$

sie zeigten überdies, dass in (4) enthalten ist:

$$D \leqq 2^{\frac{7}{2} + \frac{1}{4\varepsilon}} D^{*\frac{1}{2} - \varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0, \text{ beliebig}). \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (5)$$

Der Leser zeigt ferner ohne Mühe:

$$\frac{1}{N} \leqq D^* \leqq D \qquad (N = \text{Anzahl der Zahlen von } U). \quad . \ . \quad (6)$$

---

[1]) Lit. in meinem Bericht „Diophantische Approximationen" (Erg. der Math. IV, 4), Berlin 1936, Kap. VIII—X.

[2]) J. G. VAN DER CORPUT et CH. PISOT, Sur la discrépance modulo un. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **42**, 476—486, 554—565, 713—722 (1939). Indag. Math. I, 143—153, 184—195, 260—269 (1939).

Entsprechend (2) bedeute in der Folge

$$R^* = R^*(\alpha, \beta) = A^*(\alpha, \beta) - (\beta - \alpha) N^2 \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

das Fehlerglied in der Gleichverteilung des Systems U^*.

Wir kehren jetzt zu unsrer Folge $f(1), f(2), \ldots$ zurück und deuten die Diskrepanz (mod 1) des zum System $U(N)$ gehörigen Systems $U^*(N)$ der N^2 Zahlen $f(x) - f(z)$ $(x, z = 1, 2, \ldots, N)$ für $N = 1, 2, \ldots$ mit $D^*(N)$ an. Strebt $D^*(N)$ mit unbeschränkt wachsendem N gegen Null, so liefert die Ungleichung (4) (oder (5)) ein in (3) brauchbares $H(x)$, dessen Grössenordnung ungefähr derjenigen der Funktion $\sqrt{D^*(x)}$ gleichkommt. Dieses Ergebnis ist um so wichtiger, weil es Folgen $f(1), f(2), \ldots$ gibt, für die man bei dem heutigen Stand der Theorie auf keinem andren Wege Nicht-triviales über die Ungleichung (3) auszusagen weiss.

Es wird hier der folgende Satz gezeigt:

Satz 1. *Ist $f(1), f(2), \ldots$ eine beliebige Folge reeller Zahlen, $D^*(N)$ die Diskrepanz (mod 1) der N^2 Zahlen $f(x) - f(z)$ $(x, z = 1, 2, \ldots, N)$, und bedeutet $\Phi(N)$ eine mit N (beliebig langsam) unbeschränkt ins Unendliche wachsende Funktion des ganzzahligen Arguments $N \geqq 1$, so gibt es zu fast allen reellen α in jeder unendlichen Folge aufsteigender natürlicher Zahlen eine unendliche Teilfolge von Zahlen $N = N_1, N_2, \ldots$, für die die Anzahl $A(\alpha, N)$ der ganzzahligen Lösungen des Ungleichungensystems*

$$\alpha - D^*(N)\,\Phi(N) \leqq f(x) < \alpha + D^*(N)\,\Phi(N) \quad (mod\ 1) \quad (1 \leqq x \leqq N) \quad (8)$$

den Ungleichungen

$$N D^*(N)\,\Phi(N) < A(\alpha, N) < 3\,N D^*(N)\,\Phi(N) \quad . \; . \; . \quad (9)$$

genügt.

Bemerkungen. 1. Der Ausdruck „fast alle" bedeutet, dass die Menge der Ausnahme-Zahlen α das Lebesguesche Mass Null hat.

2. Wegen (6) gilt $ND^*(N) \geqq 1$ für $N \geqq 1$, also wegen (9) und $\Phi(N) \to \infty$ für $N \to \infty$:

$$A(\alpha, N) \to \infty \quad \text{für} \quad N \to \infty ;$$

gibt es eine monoton mit wachsendem N nach Null strebende Funktion $H(N) > D^*(N)\Phi(N)$, so hat das Ungleichungssystem (3) also für fast alle α unendlich viele ganze Lösungen x. Bedeutet die Hinzufügung „fast" eine erhebliche Verschlechterung des vorher besprochenen Ergebnisses, andrerseits bemerke ich, dass $H(x)$ jetzt ungefähr von der Grössenordnung der Funktion $D^*(x)$ ist, was einen Fortschritt ausmacht.

Ich zeige zunächst, dass Satz 1 im folgenden Satz 2 enthalten ist und zeige alsdann Satz 2.

Satz 2. *Sei N eine natürliche Zahl, $f(1), f(2), \dots, f(N)$ ein System von N reellen Zahlen, D^* die Diskrepanz* (*mod* 1) *des zugehörigen Systems der N^2 Zahlen $f(x) - f(z)$ $(x, z = 1, 2, \dots, N)$ und Φ eine positive Zahl. Es bedeute M die Menge sämtlicher α aus $0 \leqq \alpha \leqq 1$, für die die Anzahl $A(\alpha)$ der ganzen Lösungen x der Diophantischen Ungleichung*

$$\alpha - D^* \Phi \leqq f(x) < \alpha + D^* \Phi \quad (\mathrm{mod}\ 1) \quad (1 \leqq x \leqq N) \quad . \quad . \quad (10)$$

nicht den Ungleichungen

$$ND^* \Phi < A(\alpha) < 3 ND^* \Phi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

genügt. Dann gilt für das Lebesguesche Mass mM der Menge M:

$$mM \leqq 2 \Phi^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Beweis des Satzes 1 aus Satz 2. Die Grössen des Satzes 1 erfüllen für $N = 1, 2, \dots$ die Voraussetzungen des Satzes 2. Ich wähle eine Folge aufsteigender natürlicher Zahlen $n_1, n_2, \dots$, so dass die Reihe $(\Phi(n_1))^{-1} + (\Phi(n_2))^{-1} + \dots$ konvergiert. Die Menge der α aus $0 \leqq \alpha \leqq 1$, für die (9) nicht gilt, sei mit $M(N)$ angedeutet. Dann ist die Menge aller α aus $0 \leqq \alpha \leqq 1$, für die (9) für höchstens endlich viele Zahlen N der Folge $n_1, n_2, \dots$ erfüllt ist, für jeden Index ν_0 in der Menge $M(n_{\nu_0}) + M(n_{\nu_0+1}) + \dots$ enthalten, hat also wegen Satz 2 ein Mass $\leqq 2(\Phi(n_{\nu_0}))^{-1} + 2(\Phi(n_{\nu_0+1}))^{-1} + \dots$, d.h., wegen der Konvergenz der Reihe $(\Phi(n_1))^{-1} + (\Phi(n_2))^{-1} + \dots$, hat das Mass Null. Q.e.d.

3. Zum Beweise des Satzes 2 zeige ich den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz. *Ist $f(1), f(2), \dots, f(N)$ ein System von $N \geqq 1$ reellen Zahlen, und bedeuten, für reelle α, β mit* (1), *$R(\alpha, \beta)$ und $R^*(\alpha, \beta)$ die zugehörigen durch* (2) *und* (7) *definierten Fehlergliede, so gilt für jedes t $(0 \leqq t \leqq \frac{1}{4})$ die Gleichheit*

$$\int_0^1 R^2(\alpha - t, \alpha + t)\, d\alpha = \int_0^{2t} R^*(-\alpha, \alpha)\, d\alpha.$$

Bemerkung. Diese Identität ist nicht neu, in ihrer obenerwähnten Arbeit bemerken die Herren VAN DER CORPUT und PISOT, dass sie durch Limesübergang aus einer Vinogradoffschen Identität (in der keine Integrale, sondern endliche Summen auftreten) folgt [3]. Ich gebe hier einen direkten

---

[3]) S. 478 (bzw. S. 145) der unter 2) zitierten Arbeit.

Beweis. Dabei bedeute $\{\gamma\}$ für reelles γ die absolute Distanz von γ zu der der Zahl γ nächstliegenden ganzen Zahl.

Beweis. Es bedeute $\theta(\alpha, \beta, u)$ die für jedes reelle u definierte sogenannte charakteristische Funktion des Intervalles $\alpha \leqq u < \beta$, d.h. es sei

$$\theta(\alpha, \beta, u) \begin{cases} = 1, \text{ falls } \alpha \leqq u < \beta \pmod 1 \\ = 0 \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist für jedes Paar von α unabhängiger Zahlen u, t $(0 \leqq t \leqq \frac{1}{2})$ offenbar

$$\int_0^1 \theta(\alpha - t, \alpha + t, u)\, d\alpha = 2t \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

und für jedes Tripel von α unabhängiger Zahlen u, v, t $(0 \leqq t \leqq \frac{1}{2})$:

$$\int_0^1 \theta(\alpha - t, \alpha + t, u)\, \theta(\alpha - t, \alpha + t, v)\, d\alpha \begin{cases} = 2t - \{u-v\} \text{ falls } \{u-v\} \leqq 2t \\ = 0 \quad \text{sonst.} \end{cases} \quad (14)$$

Weiter gilt für jedes Paar von α unabhängiger Zahlen w, τ $(0 \leqq \tau \leqq \frac{1}{2})$ offenbar:

$$\int_0^\tau \theta(-\alpha, \alpha, w)\, d\alpha \begin{cases} = \tau - \{w\} \text{ falls } \{w\} \leqq \tau \\ = 0 \quad \text{sonst} \end{cases},$$

so dass aus (14) für $0 \leqq t \leqq \frac{1}{4}$ hervorgeht

$$\int_0^1 \theta(\alpha - t, \alpha + t, u)\, \theta(\alpha - t, \alpha + t, v)\, d\alpha = \int_0^{2t} \theta(-\alpha, \alpha, u - v)\, d\alpha. \quad (15)$$

Jetzt bemerke ich, dass aus der Definition von $\theta(\alpha, \beta, u)$ sofort folgt:

$$R(\alpha - t, \alpha + t) = \sum_{x=1}^{N} \theta(\alpha - t, \alpha + t, f(x)) - 2tN,$$

so dass gilt

$$\int_0^1 R^2(\alpha - t, \alpha + t)\, d\alpha = \int_0^1 \left(\sum_{x=1}^{N} \theta(\alpha - t, \alpha + t, f(x)) \right)^2 d\alpha$$

$$- 4tN \int_0^1 \left(\sum_{x=1}^{N} \theta(\alpha - t, \alpha + t, f(x)) \right) d\alpha + 4t^2 N^2 \int_0^1 d\alpha =$$

$$= \sum_{x,z=1}^{N} \int_0^1 \theta(a-t, a+t, f(x))\, \theta(a-t, a+t, f(z))\, da$$

$$-4tN \sum_{x=1}^{N} \int_0^1 \theta(a-t, a+t, f(x))\, da + 4t^2 N^2 =$$

$$= \sum_{x,z=1}^{N} \int_0^{2t} \theta(-a, a, f(x)-f(z))\, da - 8\, t^2 N^2 + 4\, t^2 N^2$$

wegen (15) und (13). Wir haben also

$$\int_0^1 R^2(a-t, a+t)\, da = \int_0^{2t} \left(\sum_{x,z=1}^{N} \theta(-a, a, f(x)-f(z)) - 2\, a N^2 \right) da =$$

$$= \int_0^{2t} R^*(-a, a)\, da.$$

Beweis des Satzes 2. Aus dem Hilfssatz geht für $N \geqq 1,\ 0 \leqq t \leqq \frac{1}{4}$ hervor:

$$\int_0^1 R^2(a-t, a+t)\, da \leqq \int_0^{2t} |\, R^*(-a, a)\, |\, da \leqq 2t N^2 D^*.$$

Für das Mass mM der Menge M sämtlicher a aus $0 \leqq a \leqq 1$, für die

$$|\, R(a-t, a+t)\, | \geqq N \sqrt{t D^* \Phi}$$

gilt, ist also

$$m M . N^2 t D^* \Phi \leqq 2t N^2 D^*,$$

d.h.

$$m M \leqq 2 \Phi^{-1}.$$

Setzen wir jetzt $t = D^* \Phi$, so ist also nach der Definition von $R(a-t, a+t)$ (siehe (2)), für jedes a $(0 \leqq a \leqq 1)$ ausserhalb M

$$|\, A(a-t, a+t) - 2N D^* \Phi\, | < N D^* \Phi,$$

d.h., es gilt (11), wenn wir $A(a)$ statt $A(a-t, a+t)$ schreiben, wie es in Satz 2 geschieht.