Mathematics. — *Neue Integraldarstellungen für* WHITTAKER*sche Funktionen.* (Erste Mitteilung). Von C. S. MEIJER. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of December 28, 1940.)

LITERATURVERZEICHNIS.

E. W. BARNES.

1. The asymptotic expansion of integral functions defined by generalized hypergeometric series. Proc. London Math. Soc., (2) **5**, 59—116 (1907).

PH. BOCK.

2. Ueber einige Integrale aus der Theorie der BESSELschen, WHITTAKERschen und verwandter Funktionen. Nieuw Archief voor Wiskunde, (2) **20**, 163—170 (1940).

S. C. DHAR.

3. On certain functions which are self-reciprocal in the HANKEL transform. Journ. London Math. Soc., **14**, 30—32 (1939).

G. DOETSCH.

4. Zur Theorie der involutorischen Transformationen (General Transforms) und der selbstreziproken Funktionen. Math. Ann., **113**, 665—676 (1937).
5. Theorie und Anwendung der LAPLACE-Transformation (1937).

A. ERDÉLYI.

6. Ueber eine Integraldarstellung der $W_{k,m}$-Funktionen und ihre Darstellung durch die Funktionen des parabolischen Zylinders. Math. Ann., **113**, 347—356 (1937).
7. Ueber eine Integraldarstellung der $M_{k,m}$-Funktionen und ihre asymptotische Darstellung für grosse Werte von $\Re(k)$. Ibidem, **113**, 357—362 (1937).
8. Einige Integralformeln für WHITTAKERsche Funktionen. Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **41**, 481—486 (1938).

G. H. HARDY.

9. The resultant of two FOURIER kernels. Proc. Cambridge Phil. Soc., **31**, 1—6 (1935).

T. M. MACROBERT.

10. Proofs of some formulae for the generalized hypergeometric function and certain related functions. Philosophical Magazine, (7) **26**, 82—93 (1938).

C. S. MEIJER.

11. Einige Integraldarstellungen für WHITTAKERsche und BESSELsche Funktionen. Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **37**, 805—812 (1934).
12. Integraldarstellungen für LOMMELsche und STRUVEsche Funktionen. Ibidem, **38**, 628—634 und 744—749 (1935).
13. Einige Integraldarstellungen aus der Theorie der BESSELschen und WHITTAKERschen Funktionen. Ibidem, **39**, 394—403 und 519—527 (1936).
14. Ueber Produkte von WHITTAKERschen Funktionen. Ibidem, **40**, 133—141 und 259—263 (1937).
15. Beiträge zur Theorie der WHITTAKERschen Funktionen. Ibidem, **41**, 624—633, 744—755 und 879—888 (1938).
16. Ueber BESSELsche, STRUVEsche und LOMMELsche Funktionen. Ibidem, **43**, 198—210 und 366—378 (1940).
17. Einige Integraldarstellungen für Produkte von WHITTAKERschen Funktionen. Quarterly Journ. of Math. (Oxford series), **6**, 241—248 (1935).

18. Ueber WHITTAKERsche bezw. BESSELsche Funktionen und deren Produkte. Nieuw Archief voor Wiskunde, (2) **18**, (4tes Heft) 10—39 (1936).

19. Integraldarstellungen für STRUVEsche und BESSELsche Funktionen. Compositio Mathematica, **6**, 348—367 (1939).

20. Neue Integraldarstellungen für BESSELsche Funktionen. Compositio Mathematica (Diese Arbeit wird demnächst erscheinen).

B. MOHAN.

21. Self-reciprocal functions involving LAGUERRE polynomials. Journ. Indian Math. Soc. (New series), **3**, 268—270 (1939).

22. On self-reciprocal functions. Quarterly Journ. of Math. (Oxford series), **10**, 252—260 (1939).

N. A. SHASTRI.

23. An infinite integral involving BESSEL functions, parabolic cylinder functions, and the confluent hypergeometric functions. Math. Zeitschrift, **44**, 789—793 (1939).

E. C. TITCHMARSH.

24. Introduction to the theory of FOURIER integrals (1937).

G. N. WATSON.

25. The harmonic functions associated with the parabolic cylinder. Proc. London Math. Soc., (2) **17**, 116—148 (1918).

26. A treatise on the theory of BESSEL functions (1922).

E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON.

27. A course of modern analysis (fourth edition, 1927).

§ 1. Ich beweise zunächst zwei Sätze über die Funktion $G_{p,q}^{m,n}(w)$, die ich auch in einigen anderen Arbeiten [1]) untersucht habe.

Die Funktion $G_{p,q}^{m,n}(w)$ wird definiert durch [2])

$$\left.\begin{aligned} G_{p,q}^{m,n}\left(w\,\middle|\,\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right) = \sum_{h=1}^{m} \frac{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq h}}^{m} \Gamma(b_j-b_h) \prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma(1+b_h-a_j)}{\prod\limits_{j=m+1}^{q} \Gamma(1+b_h-b_j) \prod\limits_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j-b_h)}\, w^{b_h} \times \\ \times {}_pF_{q-1}(1+b_h-a_1,\ldots,1+b_h-a_p;\, 1+b_h-b_1,\ldots{}^{*}\ldots,1+b_h-b_q;\, (-1)^{m+n+p}w). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Hierin wird $w \neq 0$

$$0 \leqq n \leqq p < q, \; 1 \leqq m \leqq q, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$b_j - b_h \text{ nicht ganz } (j=1,\ldots,m;\; h=1,\ldots,m;\; j \neq h). \quad . \quad (3)$$

und

$$a_j - b_h \neq 1, 2, 3, \ldots \; (j=1,\ldots,n;\; h=1,\ldots,m) \quad . \; . \; . \quad (4)$$

vorausgesetzt; der Stern bedeutet, dass die Zahl $1+b_h-b_h$ im System $1+b_h-b_1, \ldots, 1+b_h-b_q$ gestrichen werden muss [3]).

---

[1]) MEIJER, [**18**], [**13**], [**14**], [**16**], [**19**] und [**20**].

[2]) Man vergl. [**18**], 11 und [**16**], 199.

Ist $p=0$, so wird die Funktion G durch $G_{0,q}^{m,0}(w \mid b_1, \ldots, b_q)$ bezeichnet.

[3]) Ist $|w| < 1$ und $p > 0$, so hat die Funktion $G_{p,q}^{m,n}(w)$ auch einen Sinn für $q=p$; in der vorliegenden Arbeit aber werde ich nur den Fall mit $q > p$ betrachten.

Aus der Definition (1) folgt sofort, dass $G_{p,q}^{m,n}(w)$ eine symmetrische Funktion von $a_1, \ldots, a_n$, von $a_{n+1}, \ldots, a_p$, von $b_1, \ldots, b_m$ und von $b_{m+1}, \ldots, b_q$ ist.

Ist

$$m+n-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q>0 \text{ und } |\arg w|<(m+n-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q)\pi, \quad (5)$$

so besitzt die Funktion $G_{p,q}^{m,n}(w)$ die Integraldarstellung [4])

$$G_{p,q}^{m,n}\left(w\,\middle|\,\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-s)}\,w^s ds; \quad (6)$$

der Integrationsweg L läuft von $-\infty i+\lambda$ nach $\infty i+\lambda$ (λ ist eine beliebige reelle Zahl) und zwar so, dass die Punkte

$$b_j,\ b_j+1,\ b_j+2, \ldots \quad (j=1, \ldots, m)$$

auf der rechten, die Punkte

$$a_j-1,\ a_j-2,\ a_j-3, \ldots \quad (j=1, \ldots, n)$$

hingegen auf der linken Seite von L liegen [5]).

Die Funktion $G_{p,q}^{m,n}(w)$ kann also, falls die Ungleichungen (5) erfüllt sind, auch durch (6) definiert werden.

§ 2. Der Hauptsatz der vorliegenden Arbeit lautet wie folgt:

Satz 1. Ich unterscheide fünf Fälle:

Erster Fall. *Es seien m, n, p, q, μ, ν, σ und τ ganz rational mit*

$$1 \leqq n \leqq p < q < p+\tau-\sigma,\ \tfrac{1}{2}p+\tfrac{1}{2}q-n<m\leqq q, \quad (7)$$

$$0 \leqq \nu \leqq \sigma,\ \tfrac{1}{2}\sigma+\tfrac{1}{2}\tau-\nu<\mu\leqq\tau; \quad (8)$$

es sei ferner

$$\Re(b_j+d_h)>-1 \quad (j=1,\ldots,m;\ h=1,\ldots,\mu), \quad (9)$$

$$\Re(a_j+c_h)<1 \quad (j=1,\ldots,n;\ h=1,\ldots,\nu), \quad (10)$$

$$b_j-b_h \text{ nicht ganz } (j=1,\ldots,m;\ h=1,\ldots,m;\ j\neq h), \quad (11)$$

$$a_j-b_h\neq 1,2,3,\ldots \quad (j=1,\ldots,n;\ h=1,\ldots,m), \quad (12)$$

$$a_j-a_h \text{ nicht ganz } (j=1,\ldots,n;\ h=1,\ldots,n;\ j\neq h), \quad (13)$$

$$d_j-d_h \text{ nicht ganz } (j=1,\ldots,\mu;\ h=1,\ldots,\mu;\ j\neq h), \quad (14)$$

$$c_j-d_h\neq 1,2,3,\ldots \quad (j=1,\ldots,\nu;\ h=1,\ldots,\mu), \quad (15)$$

$$a_j+d_h \text{ nicht ganz } (j=1,\ldots,n;\ h=1,\ldots,\mu). \quad (16)$$

---

[4]) Man vergl. BARNES, [1], 65—71. Die linke Seite von (6) ist gleich der Summe der Residuen des Integranden in den Polen auf der rechten Seite des Integrationsweges L.

[5]) Dies ist möglich wegen (4).

B e h a u p t u n g : *Für alle Werte von* η *und* ω *mit* $\eta \neq 0$, $\omega \neq 0$, $|\arg \eta| < (m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$ *und* $|\arg \omega| < (\mu+\nu-\frac{1}{2}\sigma-\frac{1}{2}\tau)\pi$ *gilt* [6])

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty G_{p,q}^{m,n}\left(\eta x\,\middle|\,\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right) G_{\sigma,\tau}^{\mu,\nu}\left(\omega x\,\middle|\,\begin{matrix}c_1,\ldots,c_\tau\\ d_1,\ldots,d_\tau\end{matrix}\right) dx\\ &= \frac{1}{\eta}\, G_{q+\sigma,p+\tau}^{n+\mu,m+\nu}\left(\frac{\omega}{\eta}\,\middle|\,\begin{matrix}-b_1,\ldots,-b_m,c_1,\ldots,c_\tau,-b_{m+1},\ldots,-b_q\\ -a_1,\ldots,-a_n,d_1,\ldots,d_\tau,-a_{n+1},\ldots,-a_p\end{matrix}\right).\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

Z w e i t e r F a l l. *Es seien* $m, p, q, \mu, \nu, \sigma$ *und* τ *ganz rational mit*

$$0 \leqq p < q < p+\tau-\sigma,\ \tfrac{1}{2}p+\tfrac{1}{2}q < m \leqq q, \quad . \; . \; . \quad (18)$$

$$0 \leqq \nu \leqq \sigma,\ 1 \leqq \mu \leqq \tau; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

es seien die Bedingungen (9), (11), (14) *und* (15) *erfüllt.*

B e h a u p t u n g : *Für* $\eta \neq 0$, $\omega \neq 0$, $|\arg \eta| < (m-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$ *und alle Werte von* $\arg \omega$ *gilt* (17) *mit* $n=0$.

D r i t t e r F a l l. *Es seien* $m, n, p, q, \mu, \nu, \sigma$ *und* τ *ganz rational mit*

$$0 \leqq n \leqq p < q < p+\tau-\sigma,\ \tfrac{1}{2}p+\tfrac{1}{2}q-n \leqq m \leqq q, \quad . \; . \quad (20)$$

$$0 \leqq \nu \leqq \sigma,\ \tfrac{1}{2}\sigma+\tfrac{1}{2}\tau-\nu < \mu \leqq \tau; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

es seien die Bedingungen (9), ..., (16) *erfüllt und es sei*

$$\sum_{h=1}^{p} \Re(a_h) - \sum_{h=1}^{q} \Re(b_h) + \tfrac{1}{2}(q-p+1) > (q-p)\,\Re(c_j) \qquad (j=1,\ldots,\nu). \quad (21)$$

B e h a u p t u n g : *Für alle Werte von* η *und* ω *mit* $\eta \neq 0$, $\omega \neq 0$, $|\arg \eta| \leqq (m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$ *und* $|\arg \omega| < (\mu+\nu-\frac{1}{2}\sigma-\frac{1}{2}\tau)\pi$ *gilt* (17).

V i e r t e r F a l l. *Es seien* $m, n, p, q, \mu, \nu, \sigma$ *und* τ *ganz rational mit*

$$1 \leqq n \leqq p < q < p+\tau-\sigma,\ \tfrac{1}{2}p+\tfrac{1}{2}q-n < m \leqq q, \quad . \; . \quad (7)$$

$$0 \leqq \nu \leqq \sigma,\ \tfrac{1}{2}\sigma+\tfrac{1}{2}\tau-\nu \leqq \mu \leqq \tau; \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

es seien die Bedingungen (9), ..., (16) *erfüllt und es sei*

$$\sum_{h=1}^{\sigma} \Re(c_h) - \sum_{h=1}^{\tau} \Re(d_h) + \tfrac{1}{2}(\tau-\sigma+1) > (\tau-\sigma)\,\Re(a_j) \qquad (j=1,\ldots,n). \quad (23)$$

B e h a u p t u n g : *Für alle Werte von* η *und* ω *mit* $\eta \neq 0$, $\omega \neq 0$, $|\arg \eta| < (m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$ *und* $|\arg \omega| \leqq (\mu+\nu-\frac{1}{2}\sigma-\frac{1}{2}\tau)\pi$ *gilt* (17).

---

[6]) Wie ich aus einer brieflichen Mitteilung weiss, ist Formel (17) auch Herrn ERDÉLYI bekannt. Man vergl. ferner DOETSCH, [4], 667, Fussnote [6]) und TITCHMARSH, [24], 54, Formel (2. 1. 23).

F ü n f t e r F a l l. *Es seien $m, n, p, q, \mu, \nu, \sigma$ und τ ganz rational mit*

$$0 \leqq n \leqq p < q < p + \tau - \sigma, \ \tfrac{1}{2} p + \tfrac{1}{2} q - n \leqq m \leqq q, \quad . \quad . \quad (20)$$

$$0 \leqq \nu \leqq \sigma, \ \tfrac{1}{2} \sigma + \tfrac{1}{2} \tau - \nu \leqq \mu \leqq \tau; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

es seien die Bedingungen (9), ..., (16), (21) *und* (23) *erfüllt und es sei*

$$\frac{1}{q-p} \left\{ \tfrac{1}{2} + \sum_{h=1}^{p} \Re(a_h) - \sum_{h=1}^{q} \Re(b_h) \right\} + \frac{1}{\tau - \sigma} \left\{ -\tfrac{1}{2} + \sum_{h=1}^{\sigma} \Re(c_h) - \sum_{h=1}^{\tau} \Re(d_h) \right\} > 0.$$

B e h a u p t u n g : *Für alle Werte von η und ω mit $\eta \neq 0$, $\omega \neq 0$, $|\arg \eta| \leqq (m + n - \frac{1}{2} p - \frac{1}{2} q) \pi$ und $|\arg \omega| \leqq (\mu + \nu - \frac{1}{2} \sigma - \frac{1}{2} \tau) \pi$ gilt* (17).

Beweis. B e m e r k u n g. Aus $n \leqq p < q$ folgt $\frac{1}{2} p + \frac{1}{2} q - n > 0$; für jeden der fünf Fälle gilt also wegen (7), (18) und (20)

$$0 \leqq n \leqq p < q \quad \text{und} \quad 1 \leqq m \leqq q,$$

so dass die in (17) vorkommende Funktion $G_{p,q}^{m,n}(\eta x)$ einen Sinn hat (siehe (2)).

Aus $p < q < p + \tau - \sigma$ und $\nu \leqq \sigma$ folgt $\sigma < \tau$ und $\frac{1}{2} \sigma + \frac{1}{2} \tau - \nu > 0$; mit Rücksicht auf (8), (19) und (22) gilt daher

$$0 \leqq \nu \leqq \sigma < \tau \quad \text{und} \quad 1 \leqq \mu \leqq \tau,$$

so dass auch $G_{\sigma,\tau}^{\mu,\nu}(\omega x)$ einen Sinn hat.

B e w e i s d e s e r s t e n u n d d e s z w e i t e n F a l l e s. Ich betrachte zunächst den Fall mit

$$0 \leqq n \leqq p < q < p + \tau - \sigma, \ \tfrac{1}{2} p + \tfrac{1}{2} q - n < m \leqq q, \quad . \quad . \quad (24)$$

$$0 \leqq \nu \leqq \sigma, \ \tfrac{1}{2} \sigma + \tfrac{1}{2} \tau - \nu < \mu \leqq \tau, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$|\arg \eta| < (m + n - \tfrac{1}{2} p - \tfrac{1}{2} q) \pi, \quad |\arg \omega| < (\mu + \nu - \tfrac{1}{2} \sigma - \tfrac{1}{2} \tau) \pi; \quad (25)$$

ich nehme hierbei an, dass die Bedingungen (9), (10), (11), (13), (14), (15) und (16) erfüllt sind und dass überdies

$$\operatorname*{Max}_{j=1,\ldots,n} \Re(a_j) - 1 < \operatorname*{Min}_{h=1,\ldots,m} \Re(b_h) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

ist. Der Integrand auf der rechten Seite von (6) ist dann analytisch im Innern des Streifens

$$\operatorname*{Max}_{j=1,\ldots,n} \Re(a_j) - 1 < \Re(s) < \operatorname*{Min}_{h=1,\ldots,m} \Re(b_h), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

so dass man jede Gerade $\Re(s) = \lambda$ mit

$$\operatorname*{Max}_{j=1,\ldots,n} \Re(a_j) - 1 < \lambda < \operatorname*{Min}_{h=1,\ldots,m} \Re(b_h)$$

als Integrationsweg L wählen darf und ausserdem auf (6) den MELLINschen Umkehrsatz [7]) anwenden kann. Durch Anwendung dieses Satzes erhält man, falls s der Bedingung (27) genügt und $|\arg \eta| < (m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$ ist,

$$\int_0^\infty G_{p,q}^{m,n}\left(\eta x \,\middle|\, \begin{matrix} a_1,\ldots,a_p \\ b_1,\ldots,b_q \end{matrix}\right) x^{-s-1}\, dx = \frac{\eta^s \prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j-s) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1-a_j+s)}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1-b_j+s) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j-s)}.$$

Für

$$-1-\operatorname*{Min}_{h=1,\ldots,m} \Re(b_h) < \Re(s) < -\operatorname*{Max}_{j=1,\ldots,n} \Re(a_j) \quad . \; . \; . \quad (28)$$

gilt also

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty G_{p,q}^{m,n}\left(\eta x \,\middle|\, \begin{matrix} a_1,\ldots,a_p \\ b_1,\ldots,b_q \end{matrix}\right) x^{s}\, dx = \frac{\eta^{-s-1} \prod_{j=1}^{m} \Gamma(1+b_j+s) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(-a_j-s)}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(-b_j-s) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(1+a_j+s)}\end{aligned}\right\}. \quad (29)$$

Nun hat man mit Rücksicht auf (6), falls

$$x > 0 \text{ und } |\arg \omega| < (\mu+\nu-\tfrac{1}{2}\sigma-\tfrac{1}{2}\tau)\pi$$

ist,

$$\left.\begin{aligned}G_{\sigma,\tau}^{\mu,\nu}\left(\omega x \,\middle|\, \begin{matrix} c_1,\ldots,c_\sigma \\ d_1,\ldots,d_\tau \end{matrix}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Lambda \frac{\prod_{j=1}^{\mu} \Gamma(d_j-s) \prod_{j=1}^{\nu} \Gamma(1-c_j+s)}{\prod_{j=\mu+1}^{\tau} \Gamma(1-d_j+s) \prod_{j=\nu+1}^{\sigma} \Gamma(c_j-s)} (\omega x)^s\, ds;\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

der Integrationsweg Λ läuft von $-\infty i+\beta$ nach $\infty i+\beta$ und lässt die Punkte d_j, d_j+1, $d_j+2, \ldots$ $(j=1,\ldots,\mu)$ zur Rechten, die Punkte c_j-1, c_j-2, $c_j-3, \ldots$ $(j=1,\ldots,\nu)$ dagegen zur Linken.

Wegen (9) und (10) kann man Λ derart wählen, dass Bedingung (28) erfüllt ist für alle Punkte s von Λ, so dass Formel (29) angewendet werden darf.

Trägt man nun in die linke Seite von (17) für $G_{\sigma,\tau}^{\mu,\nu}(\omega x)$ das Integral (30) ein, so bekommt man, wenn man erst die Integrationsfolge vertauscht und darauf Beziehung (29) benutzt,

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i \eta}\int_\Lambda \frac{\prod_{j=1}^{n} \Gamma(-a_j-s) \prod_{j=1}^{\mu} \Gamma(d_j-s) \prod_{j=1}^{m} \Gamma(1+b_j+s) \prod_{j=1}^{\nu} \Gamma(1-c_j+s)}{\prod_{j=\mu+1}^{\tau} \Gamma(1-d_j+s) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(1+a_j+s) \prod_{j=\nu+1}^{\sigma} \Gamma(c_j-s) \prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(-b_j-s)} \left(\frac{\omega}{\eta}\right)^s ds.\end{aligned}\right\} \quad . \quad (31)$$

[7]) DOETSCH, [5], 115; TITCHMARSH, [24], 47.

Nun hat man wegen (24) und (8) (siehe auch die Bemerkung am Anfang des Beweises)

$$1 \leqq m + \nu \leqq q + \sigma < p + \tau \text{ und } 1 \leqq n + \mu \leqq p + \tau;$$

ferner folgt aus (25)

$$\left| \arg \left(\frac{\omega}{\eta} \right) \right| < (n + \mu + m + \nu - \tfrac{1}{2} q - \tfrac{1}{2} \sigma - \tfrac{1}{2} p - \tfrac{1}{2} \tau) \pi.$$

Das Integral (31) ist also mit Rücksicht auf (6) gleich der rechten Seite von (17), so dass (17) bewiesen ist für den Fall, dass die Bedingungen (24), (8), (25), (26), (9), (10), (11), (13), (14), (15) und (16) erfüllt sind.

Ich werde jetzt beweisen, dass Formel (17) auch gilt, falls die Voraussetzungen (24), (8), (25) und (9), ..., (16) erfüllt sind [8]. Bedingung (9) gewährleistet die Konvergenz des auf der linken Seite von (17) stehenden Integrals in der Umgebung des Punktes Null, so dass ich mich ferner auf die Untersuchung des Integranden für grosses x beschränken darf. Hierzu brauche ich das Verhalten der Funktion $G_{p,q}^{m,n}(w)$ für grosse Werte von $|w|$.

Ist $n \geqq 1$ und $m + n - \frac{1}{2} p - \frac{1}{2} q > 0$, so lautet die asymptotische Entwicklung der Funktion $G_{p,q}^{m,n}(w)$ wie folgt [9]

$$\left. \begin{aligned} & G_{p,q}^{m,n}\left(w \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix} \right) \\ \backsim & \sum_{j=1}^{n} w^{-1+a_j} \left\{ C_{j,0} + \frac{C_{j,1}}{w} + \frac{C_{j,2}}{w^2} + \ldots \right\} \quad [\,|\arg w| < (m+n-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q)\pi]. \end{aligned} \right\} \tag{32}$$

Die Funktion $G_{p,q}^{q,0}(w)$ besitzt eine asymptotische Entwicklung der Gestalt [10]

$$\left. \begin{aligned} & G_{p,q}^{q,0}\left(w \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix} \right) \\ \backsim & \exp \left((p-q)\, w^{\frac{1}{q-p}} \right) w^{\vartheta} \left\{ A_0 + \frac{A_1}{w^{\frac{1}{q-p}}} + \frac{A_2}{w^{\frac{2}{q-p}}} + \ldots \right\}, \end{aligned} \right\} . \tag{33}$$

worin

$$\vartheta = \frac{1}{q-p} \left\{ \tfrac{1}{2}(p - q + 1) + \sum_{h=1}^{q} b_h - \sum_{h=1}^{p} a_h \right\};$$

---

[8]) Ich werde also zeigen, dass (26) durch die weniger fordernde Annahme (12) ersetzt werden darf.

[9]) BARNES, [1], 65—71.

Die in (32), (33) und (34) vorkommenden Koeffizienten $C_{j,h}$, A_h und f_h sind unabhängig von w.

[10]) BARNES, [1], 80 und 108—110.

diese Entwicklung gilt, falls $p = q - 1$ ist, für $|\arg w| < \frac{3}{2}\pi$; ist $p < q - 1$, so gilt (33) für $|\arg w| < (q - p + 1)\pi$.

Das Verhalten von $G_{p,q}^{m,0}(w)$ für $|w| \to \infty$ kann mit Hilfe von [11])

$$G_{p,q}^{m,0}(w) = \sum_{h=0}^{q-m} f_h\, G_{p,q}^{q,0}(w\, e^{(q-m-2h)\pi i}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

aus (33) abgeleitet werden.

Aus (32), (33) und (34) ergibt sich nun, dass das Integral (17) für $v = \infty$ konvergiert, falls Voraussetzung (10) erfüllt ist. Die linke Seite von (17) ist also unter den Bedingungen (24), (8), (25), (9) und (10) konvergent. Die Annahme (26) kann also fortgelassen und durch (12) ersetzt werden.

Der erste Fall ist jetzt vollständig erledigt.

Was den zweiten Fall anbetrifft, auch der Beweis von (17) mit $n = 0$ und $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q < m$ ist geliefert, jedoch unter den Annahmen

$$\tfrac{1}{2}\sigma + \tfrac{1}{2}\tau - \nu < \mu \leqq \tau, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

$$|\arg \omega| < (\mu + \nu - \tfrac{1}{2}\sigma - \tfrac{1}{2}\tau)\pi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Ich werde erst zeigen, dass (36) fortgelassen werden darf.

Sind σ und τ ganz rational mit $0 \leqq \sigma < \tau$ und ist

$$b_j \neq 0, -1, -2, \ldots \quad (j = 1, \ldots, \tau - 1),$$

so gibt es nämlich eine nicht von n abhängige, positive Zahl r mit der Eigenschaft

$$\left| \frac{(1+n)^{\tau-\sigma-1} \prod_{j=1}^{\sigma} (a_j + n)}{\prod_{j=1}^{\tau-1} (b_j + n)} \right| < r^{\tau-\sigma} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Für beliebige komplexe Werte von w hat man also

$$\begin{aligned} &|{}_\sigma F_{\tau-1}(a_1, \ldots, a_\sigma; b_1, \ldots, b_{\tau-1}; w)| \\ &\leqq 1 + \frac{r^{\tau-\sigma}|w|}{(1!)^{\tau-\sigma}} + \frac{(r^{\tau-\sigma}|w|)^2}{(2!)^{\tau-\sigma}} + \frac{(r^{\tau-\sigma}|w|)^3}{(3!)^{\tau-\sigma}} + \ldots \\ &\leqq \left(1 + \frac{r|w|^{\frac{1}{\tau-\sigma}}}{1!} + \frac{r^2|w|^{\frac{2}{\tau-\sigma}}}{2!} + \frac{r^3|w|^{\frac{3}{\tau-\sigma}}}{3!} + \ldots\right)^{\tau-\sigma} \\ &= \exp\left(r(\tau-\sigma)|w|^{\frac{1}{\tau-\sigma}}\right). \end{aligned}$$

---

[11]) Man vergl. [**16**], Formel (22).

Hieraus geht hervor, falls $1 \leqq n \leqq \tau$ ist,

$$\left| \frac{1}{\prod_{j=n}^{\tau-1} \Gamma(\beta_j)} \, {}_\sigma F_{\tau-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_\sigma; \beta_1, \ldots, \beta_{\tau-1}; w) \right|$$

$$< K \, | w |^t \exp\left(s(\tau-\sigma) \, | w |^{\frac{1}{\tau-\sigma}}\right),$$

wo K, t und s unabhängig von w sind und $s > 0$ ist [12]).

Für die Funktion $G_{\sigma,\tau}^{\mu,\nu}(w)$ gilt daher wegen (1) für $|w| > 1$

$$| G_{\sigma,\tau}^{\mu,\nu}(w) | < M \, | w |^{\varkappa} \exp\left(\gamma(\tau-\sigma) \, | w |^{\frac{1}{\tau-\sigma}}\right) \qquad (\gamma > 0). \quad . \quad . \quad (37)$$

Nun folgt aus (18), dass $0 < q - p < \tau - \sigma$ ist; das auf der linken Seite von (17) stehende Integral ist also mit Rücksicht auf (33), (34) und (37), falls $n = 0$ ist, konvergent für $|\arg \eta| < (m - \frac{1}{2} p - \frac{1}{2} q)\pi$ und alle Werte von $\arg \omega$, so dass die Annahme (36) ausfallen kann.

Ich beweise jetzt, dass (35) durch die weniger fordernde Bedingung $1 \leqq \mu \leqq \tau$ ersetzt werden darf. Aus $p < q < p + \tau - \sigma$ ergibt sich nämlich $\sigma \leqq \tau - 2$; aus $\nu \leqq \sigma$ folgt daher $1 \leqq \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\tau - \nu \leqq \tau - \nu - 1$. Ist $1 \leqq \mu \leqq \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\tau - \nu$, so gilt also $\mu + 1 \leqq \tau$, so dass die Funktion $G_{\sigma,\tau}^{\mu+1,\nu}(w)$ einen Sinn hat (man vergl. (2)). Der Fall mit

$$1 \leqq \mu \leqq \tfrac{1}{2}\sigma + \tfrac{1}{2}\tau - \nu$$

kann nun mit Hilfe der Formel [13])

$$G_{\sigma,\tau}^{\mu,\nu}\left(w \,\middle|\, \begin{matrix} c_1, \ldots, c_\sigma \\ d_1, \ldots, d_\tau \end{matrix}\right) = -\frac{1}{2\pi i}\left\{ e^{-\pi i d_{\mu+1}} G_{\sigma,\tau}^{\mu+1,\nu}\left(w e^{\pi i} \,\middle|\, \begin{matrix} c_1, \ldots, c_\sigma \\ d_1, \ldots, d_\tau \end{matrix}\right) - e^{\pi i d_{\mu+1}} G_{\sigma,\tau}^{\mu+1,\nu}\left(w e^{-\pi i} \,\middle|\, \begin{matrix} c_1, \ldots, c_\sigma \\ d_1, \ldots, d_\tau \end{matrix}\right) \right\} \quad (38)$$

aus dem Fall mit $\mu > \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\tau - \nu$ abgeleitet werden.

Hiermit ist der zweite Fall erledigt.

B e w e i s d e s d r i t t e n F a l l e s. Ich nehme zunächst an, dass

---

12) t bezeichnet die Anzahl der fortfallenden Anfangsglieder, d. h. die Anzahl der Anfangsglieder, bei denen der Koeffizient

$$\frac{\prod_{j=1}^{\sigma} \{\alpha_j(\alpha_j+1)\ldots(\alpha_j+h-1)\}}{h! \prod_{j=1}^{n-1} \{\beta_j(\beta_j+1)\ldots(\beta_j+h-1)\} \prod_{j=n}^{\tau-1} \Gamma(\beta_j+h)}$$

verschwindet.

13) Relation (38) folgt ohne Mühe aus (1).

$\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q - n < m$ ist. Nach dem ersten oder nach dem zweiten Fall (je nachdem $n > 0$ oder $= 0$ ist) gilt Formel (17) für

$$|\arg \eta| < (m + n - \tfrac{1}{2}p - \tfrac{1}{2}q)\pi,$$

wofern die Voraussetzungen (9), ..., (16) erfüllt sind.

Nun genügt die durch (1) definierte Funktion $G_{p,q}^{m,n}(w)$ den Reduktionsformeln [14])

$$\left.\begin{aligned} G_{p,q}^{m,n}(w) &= k\, G_{p,q}^{q,0}(w\, e^{(q-m-n)\pi i}) \\ &+ \sum_{h=0}^{n-1} \gamma_h\, G_{p,q}^{q,n-h}(w\, e^{(q-m-h-2)\pi i}) + \sum_{h=1}^{q-m} \varkappa_h\, G_{p,q}^{q,n}(w\, e^{(q-m-2h)\pi i}) \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

und

$$\left.\begin{aligned} G_{p,q}^{m,n}(w) &= l\, G_{p,q}^{q,0}(w\, e^{(m+n-q)\pi i}) \\ &+ \sum_{h=0}^{n-1} \delta_h\, G_{p,q}^{q,n-h}(w\, e^{(m+h+2-q)\pi i}) + \sum_{h=1}^{q-m} \lambda_h\, G_{p,q}^{q,n}(w\, e^{(m+2h-q)\pi i}). \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Aus (39) geht hervor mit Rücksicht auf (32), (33) und (34), dass (17) auch gilt für $\arg \eta = (m + n - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q)\pi$, wofern a_j, b_j, c_j und d_j nicht nur den Bedingungen (9), ..., (16), sondern überdies noch (21) genügen; ebenso folgt aus (40), dass (17) unter der Voraussetzung (21) gültig bleibt für $\arg \eta = -(m + n - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q)\pi$, womit der Beweis für den Fall mit $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q - n < m$ geliefert ist.

Ich betrachte jetzt den Fall mit $m = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q - n$. Wegen $p < q$ ist daher $m < q - n$, also $m + 1 \leqq q$, so dass die Funktion $G_{p,q}^{m+1,n}(w)$ einen Sinn hat. Nach dem Vorangehenden gilt (17) mit $m + 1$ statt m und zwar für $|\arg \eta| \leqq \pi$. Formel (17) kann nun mit Hilfe von [15])

$$\left.\begin{aligned} G_{p,q}^{m,n}\left(w \,\middle|\, \begin{matrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_p \\ \beta_1, \ldots, \beta_q \end{matrix}\right) &= -\frac{1}{2\pi i}\left\{ e^{-\pi i \beta_{m+1}}\, G_{p,q}^{m+1,n}\left(w e^{\pi i} \,\middle|\, \begin{matrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_p \\ \beta_1, \ldots, \beta_q \end{matrix}\right)\right. \\ &\left. - e^{\pi i \beta_{m+1}}\, G_{p,q}^{m+1,n}\left(w e^{-\pi i} \,\middle|\, \begin{matrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_p \\ \beta_1, \ldots, \beta_q \end{matrix}\right)\right\} \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

und

$$\left.\begin{aligned} G_{p,q}^{m,n}\left(w \,\middle|\, \begin{matrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_p \\ \beta_1, \ldots, \beta_q \end{matrix}\right) &= -\frac{1}{2\pi i}\left\{ e^{-\pi i \alpha_{n+1}}\, G_{p,q}^{m,n+1}\left(w e^{\pi i} \,\middle|\, \begin{matrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_p \\ \beta_1, \ldots, \beta_q \end{matrix}\right)\right. \\ &\left. - e^{\pi i \alpha_{n+1}}\, G_{p,q}^{m,n+1}\left(w e^{-\pi i} \,\middle|\, \begin{matrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_p \\ \beta_1, \ldots, \beta_q \end{matrix}\right)\right\} \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

aus (17) mit $m + 1$ statt m abgeleitet werden (man beachte auch die in § 1 erwähnten Symmetrieeigenschaften der G-Funktion).

Hiermit ist der dritte Fall erledigt.

---

[14]) Man vergl. [16], Formel (23). Die Zahlen k, l, γ_h, δ_h, $\varkappa_h$ und λ_h sind nicht von w abhängig.

[15]) Die Beziehungen (41) und (42) folgen sofort aus der Definition der Funktion $G_{p,q}^{m,n}(w)$; (41) ist äquivalent mit (38).

D e r B e w e i s d e s v i e r t e n F a l l e s geht auf analoge Weise.

D e r f ü n f t e F a l l kann aus dem dritten abgeleitet werden; man lasse $\arg \omega$ nach $\pm (\mu + \nu - \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}\tau)\pi$ streben.

§ 3. Eine Folgerung von Satz 1 ist

Satz 2. I c h u n t e r s c h e i d e d r e i F ä l l e:

E r s t e r F a l l. *Es seien p, μ, ν, σ und τ ganz rational mit*

$$p > 0,\ 0 \leqq \nu \leqq \sigma \leqq \tau - 2,\ 1 + \tfrac{1}{2}\sigma + \tfrac{1}{2}\tau - \nu < \mu \leqq \tau;$$

es sei ferner

$$\Re (c_h - a_j) < 1 \qquad (h = 1, \ldots, \nu;\ j = 1, \ldots, p), \quad \ldots \quad (43)$$

$$a_j - b_1 \neq -1, -2, -3, \ldots \ (j = 1, \ldots, p), \quad \ldots \quad (44)$$

$$a_j - a_h \text{ nicht ganz } (j = 1, \ldots, p;\ h = 1, \ldots, p;\ j \neq h), \quad . \quad (45)$$

$$d_j - d_h \text{ nicht ganz } (j = 1, \ldots, \mu;\ h = 1, \ldots, \mu;\ j \neq h), \quad . \quad (46)$$

$$c_j - d_h \neq 1, 2, 3, \ldots \ (j = 1, \ldots, \nu;\ h = 1, \ldots, \mu), \quad \ldots \quad (47)$$

$$a_j - d_h \text{ nicht ganz } (j = 1, \ldots, p;\ h = 1, \ldots, \mu). \quad \ldots \quad (48)$$

B e h a u p t u n g: *Für alle Werte von η und ω mit $\eta \neq 0$, $\omega \neq 0$, $|\arg \eta| < \frac{1}{2}\pi$ und $|\arg \omega| < (\mu + \nu - \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}\tau - 1)\pi$ gilt*

$$\left.\begin{aligned} &\prod_{j=1}^{p} \left\{ \frac{\Gamma(1-b_1+a_j)}{\Gamma(1-b_1+b_{j+1})} \right\} \int_{-\infty}^{(0+)} (\eta x)^{-b_1} {}_pF_p \begin{pmatrix} 1-b_1+a_1, \ldots, 1-b_1+a_p; \\ 1-b_1+b_2, \ldots, 1-b_1+b_{p+1}; \eta x \end{pmatrix} \\ &\times G_{\sigma,\tau}^{\mu,\nu}\left(\omega x \left| \begin{matrix} c_1, \ldots, c_\sigma \\ d_1, \ldots, d_\tau \end{matrix} \right.\right) dx = \frac{2\pi i}{\eta} G_{\sigma+p+1,\tau+p}^{\mu+p,\nu}\left(\frac{\omega}{\eta} \left| \begin{matrix} c_1, \ldots, c_\sigma, b_1, \ldots, b_{p+1} \\ a_1, \ldots, a_p, d_1, \ldots, d_\tau \end{matrix} \right.\right). \end{aligned}\right\} \quad (49)$$

Z w e i t e r F a l l. *Es seien p, μ, ν, σ und τ ganz rational mit*

$$p > 0,\ 0 \leqq \nu \leqq \sigma \leqq \tau - 2,\ 1 + \tfrac{1}{2}\sigma + \tfrac{1}{2}\tau - \nu \leqq \mu \leqq \tau;$$

es seien die Bedingungen (43), ..., (48) erfüllt und es sei

$$\sum_{h=1}^{\sigma} \Re(c_h) - \sum_{h=1}^{\tau} \Re(d_h) + \tfrac{1}{2}(\tau - \sigma + 1) > (\sigma - \tau)\Re(a_j) \qquad (j = 1, \ldots, p).$$

B e h a u p t u n g: *Für alle Werte von η und ω mit $\eta \neq 0$, $\omega \neq 0$, $|\arg \eta| < \frac{1}{2}\pi$ und $|\arg \omega| \leqq (\mu + \nu - \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}\tau - 1)\pi$ gilt (49).*

D r i t t e r F a l l. *Es seien μ, ν, σ und τ ganz rational mit*

$$0 \leqq \nu \leqq \sigma \leqq \tau - 2,\ 1 \leqq \mu \leqq \tau;$$

es seien die Bedingungen (46) und (47) erfüllt.

B e h a u p t u n g. *Für $\eta \neq 0$, $\omega \neq 0$, $|\arg \eta| < \frac{1}{2}\pi$ und alle Werte von $\arg \omega$ gilt (49) mit $p = 0$; d.h. also es gilt*

$$\int_{-\infty}^{(0+)} (\eta x)^{-b} e^{\eta x} G_{\sigma,\tau}^{\mu,\nu}\left(\omega x \left| \begin{matrix} c_1, \ldots, c_\sigma \\ d_1, \ldots, d_\tau \end{matrix} \right.\right) dx = \frac{2\pi i}{\eta} G_{\sigma+1,\tau}^{\mu,\nu}\left(\frac{\omega}{\eta} \left| \begin{matrix} c_1, \ldots, c_\sigma, b \\ d_1, \ldots, d_\tau \end{matrix} \right.\right). \quad (50)$$

Beweis. Ist

$$\Re\,(d_h - b_1) > -1 \qquad (h = 1, \ldots, \mu). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

so kann das Schleifenintegral in (49) in bekannter Weise auf ein geradliniges Integral reduziert werden:

$$\left.\begin{aligned} &\prod_{j=1}^{p} \left\{ \frac{\Gamma(1-b_1+a_j)}{\Gamma(1-b_1+b_{j+1})} \right\} \int_{-\infty}^{(0+)} (\eta x)^{-b_1}\, {}_pF_p(\eta x)\, G_{\sigma,\tau}^{\mu,\nu}(\omega x)\, dx \\ = &\prod_{j=1}^{p} \left\{ \frac{\Gamma(1-b_1+a_j)}{\Gamma(1-b_1+b_{j+1})} \right\} \int_0^{\infty} (\eta t)^{-b_1}\, {}_pF_p(-\eta t)\, \{ e^{\pi i b_1} G_{\sigma,\tau}^{\mu,\nu}(\omega t e^{-\pi i}) - e^{-\pi i b_1} G_{\sigma,\tau}^{\mu,\nu}(\omega t e^{\pi i}) \}\, dt. \end{aligned}\right\} (52)$$

Nun hat man wegen (1)

$$\prod_{j=1}^{p} \left\{ \frac{\Gamma(1-b_1+a_j)}{\Gamma(1-b_1+b_{j+1})} \right\} (\eta t)^{-b_1}\, {}_pF_p \begin{pmatrix} 1-b_1+a_1, \ldots, 1-b_1+a_p; \\ 1-b_1+b_2, \ldots, 1-b_1+b_{p+1}; -\eta t \end{pmatrix}$$

$$= G_{p,p+1}^{1,p} \left(\eta t \,\middle|\, \begin{matrix} -a_1, \ldots, -a_p \\ -b_1, \ldots, -b_{p+1} \end{matrix} \right);$$

die rechte Seite von (52) ist also gleich

$$\int_0^{\infty} G_{p,p+1}^{1,p} \left(\eta t \,\middle|\, \begin{matrix} -a_1, \ldots, -a_p \\ -b_1, \ldots, -b_{p+1} \end{matrix} \right) \{ e^{\pi i b_1} G_{\sigma,\tau}^{\mu,\nu}(\omega t e^{-\pi i}) - e^{-\pi i b_1} G_{\sigma,\tau}^{\mu,\nu}(\omega t e^{\pi i}) \}\, dt.$$

Aus Satz 1 folgt [16]), dass dieses Integral gleich

$$\frac{1}{\eta} \left\{ e^{\pi i b_1} G_{\sigma+p+1,\tau+p}^{\mu+p,\nu+1} \left(\frac{\omega e^{-\pi i}}{\eta} \,\middle|\, \begin{matrix} b_1, c_1, \ldots, c_\sigma, b_2, \ldots, b_{p+1} \\ a_1, \ldots, a_p, d_1, \ldots, d_\tau \end{matrix} \right) \right.$$
$$\left. - e^{-\pi i b_1} G_{\sigma+p+1,\tau+p}^{\mu+p,\nu+1} \left(\frac{\omega e^{\pi i}}{\eta} \,\middle|\, \begin{matrix} b_1, c_1, \ldots, c_\sigma, b_2, \ldots, b_{p+1} \\ a_1, \ldots, a_p, d_1, \ldots, d_\tau \end{matrix} \right) \right\}$$

ist; und dieser Ausdruck kann mit Hilfe von (42) [17]) auf

$$\frac{2\pi i}{\eta}\, G_{\sigma+p+1,\tau+p}^{\mu+p,\nu} \left(\frac{\omega}{\eta} \,\middle|\, \begin{matrix} c_1, \ldots, c_\sigma, b_1, \ldots, b_{p+1} \\ a_1, \ldots, a_p, d_1, \ldots, d_\tau \end{matrix} \right)$$

zurückgeführt werden.

Hiermit ist der Beweis geliefert [18]).

---

[16]) Ich benutze den ersten Fall von Satz 1, falls $p > 0$, $1 + \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\tau - \nu < \mu$ und $|\arg\omega| < (\mu + \nu - \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}\tau - 1)\pi$ ist, den vierten Fall, falls $p > 0$, $1 + \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\tau - \nu \leqq \mu$ und $|\arg\omega| \leqq (\mu + \nu - \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}\tau - 1)\pi$ ist, und den zweiten Fall, falls $p = 0$ ist.

[17]) Man beachte die Symmetrieeigenschaften der G-Funktion.

[18]) Voraussetzung (51) darf bei (49) fortgelassen werden, weil der Punkt $x = 0$ nicht auf dem Integrationswege liegt.