Mathematics. — *Elemente der intuitionistischen Funktionentheorie.* (Zweite Mitteilung)[1]: *Der Satz vom Integral der logarithmischen Ableitung.* I. By M. J. BELINFANTE. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of February 22, 1941.)

Diese zweite und die dritte Mitteilung bringen nebst vorbereitenden Hilfssätzen eine intuitionistische Uebertragung des klassischen Satzes vom Integral der logarithmischen Ableitung. Wir schicken unseren Betrachtungen zwei Bemerkungen über klassische Aussagen voraus.

a. Es sei $f(z)$ für $|z| \leqq R$ regulär und es sei festgestellt, dass die Beziehung $|f(z)| > 0$ nicht für jedes $|z| \leqq R$ erfüllt sein kann. Der Schluss: „Alsdann lässt sich im Innern des Kreises $|z| = R$ eine Nullstelle von $f(z)$ bestimmen" ist aber unberechtigt. Denn sind a_1 und a_2 zwei reelle Zahlen, die der Bedingung $0 \leqq a_2 \leqq a_1$ genügen, während keine der Beziehungen $0 < a_1$ oder $0 = a_2 = a_1$ festgestellt ist, so ist $f(z) = a_1 z + a_2$ regulär für $|z| \leqq 1$ und kann die Beziehung $|f(z)| > 0$ unmöglich für jedes $|z| \leqq 1$ erfüllt sein. Dennoch lässt sich keine Nullstelle von $f(z)$ in $|z| \leqq 1$ bestimmen. (Ein Beispiel für die Zahlen a_1 und a_2 ist $a_n = 2^{-k_n}$, wenn wir unter k_n die Ordinalzahl der ersten Ziffer in der Dezimalentwicklung von π verstehen, welcher von wenigstens n Sequenzen 1234567890 hintereinander gefolgt wird.) Es tritt die hier getadelte Schlussfolgerung unter anderen in den klassischen Beweisen der PICARDschen Sätze auf. In dem Fall, dass das Integral $\int\limits_{|z|=R} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)}$ nicht verschwindet, lässt sich die Wurzelexistenz aus dem Satz von § 8 folgern.

b. Nach einem klassischen Satz nimmt der absolute Betrag einer für $|z| \leqq 1$ regulären Funktion kein Maximum im Innern des Einheitskreises an[2]. Jedoch ist es im allgemeinen nicht möglich auf dem Rande dieses Kreises einen Punkt zu bestimmen, wo die Funktion, dem absoluten Betrage nach, wenigstens nicht kleiner ist als ein vorgelegter Funktionswert, der innerhalb des Kreises angenommen wird. (Beispiel: $f(z) = 1 + az$; $a = e^{-k_1(1-\sqrt{-1})\frac{\pi}{2}}$; es ist $f(0) = 1$: man hat aber kein Mittel z mit $|z| = 1$ so zu bestimmen, dass $|f(z)| \geqq |f(0)|$ ist.) Ist die reguläre Funktion *variabel*, d.h. sind zwei von einander entfernte Funk-

---

[1]) Die erste Mitteilung über denselben Gegenstand ist in diesen Proceedings, Bd. **44**, S. 173 erschienen.

[2]) Vgl. § 3, Bemerkung.

tionswerte bekannt, so lässt sich ein Punkt mit der verlangten Eigenschaft angeben [3]). Ist die Funktion konstant, so hat natürlich jeder Punkt auf dem Rande die Eigenschaft. Es ist aber die Disjunktion: „eine Funktion ist entweder variabel oder konstant" im intuitionistischen Sinne unberechtigt.

Schliesslich bemerken wir, dass das in diesem Teil auftretende Integral $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f'(z)\,dz}{f(z)}$, wo $f(z)$ längs des geschlossenen Weges L regulär und dem absoluten Betrage nach grösser als eine positive Konstante a ist, entweder Null oder einer ganzen positiven oder negativen Zahl gleich ist. Denn es gilt der

Hilfssatz. *Es sei die Funktion* $w = f(z)$ *längs* $z(t)$ *regulär,* $W(t) = f[z(t)]$ *und die Funktion* $\varphi(w)$ *längs* $W(t)$ *regulär. Alsdann hat man:*

$$\int\limits_{W(t)} \varphi(w)\,dw = \int\limits_{z(t)} \varphi[f(z)] \,.\, f'(z)\,dz.$$

Beweis des Hilfssatzes. Es ist die Differenz der Summen:

$$A = \Sigma\,\varphi(w_i)(w_{i+1} - w_i) = \Sigma\,\varphi[f(z_i)] \,.\, \frac{f(z_{i+1}) - f(z_i)}{z_{i+1} - z_i} \,.\, (z_{i+1} - z_i)$$

und:

$$B = \Sigma\,\varphi[f(z_i)]\, f'(z_i)(z_{i+1} - z_i)$$

für eine t-Zerlegung, deren Breite [4]) hinreichend klein gewählt wird, dem absoluten Betrage nach kleiner als eine beliebig vorgegebene positive Zahl ε.

Wendet man nun den Hilfssatz an auf das obige Integral mit $\varphi(w) = \frac{1}{w}$, so ergibt sich nach einem vorigen Satz [4a]):

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{z(t)} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{W(t)} \frac{dw}{w} = k \quad (k \text{ ganz oder Null}).$$

§ 1. **Satz 1.** *Wenn eine Funktion* $f(z)$ *in einem Gebiete* G *regulär und variabel ist, so lässt sich innerhalb* G *ein Kreis* C *bestimmen, in dessen Innern die erste Ableitung* $f'(z)$ *von Null entfernt ist.*

Beweis. Da $f'(z)$ gleichmässig stetig ist, genügt es einen *Punkt* zu bestimmen, wo die Ableitung von Null entfernt ist. Nach Voraussetzung gibt es in G zwei Punkte Z' und Z'', so dass $f(Z') - f(Z'')$ dem absoluten

---

[3]) Vgl. § 3, Satz III.

[4]) Vgl. die erste Mitteilung, § 2.

[4a]) Vgl. die erste Mitteilung, § 3, Satz 10c.

Betrage nach grösser als eine positive Zahl a ist. Bestimmen wir nun einen in G liegenden Polygonzug mit den Ecken $z_1 = Z', z_2, z_3, \ldots, z_n = Z''$, so lässt sich j so wählen, dass $|f(z_{j+1}) - f(z_j)| > \frac{a}{n} = a_1$ ist. Sei $|z_{j+1} - z_j| = d$. Wir bestimmen ein solches δ, dass $|f'(x') - f'(x'')| < \frac{a_1}{2d}$ bleibt, sobald $|x' - x''| < \delta$ genommen wird und wir wählen ein ganzes $N > \frac{d}{\delta}$. Setzen wir nun $x_n = z_j + \frac{n}{N}(z_{j+1} - z_j)$ für $n = 0, 1, \ldots, N$, so lässt sich p so bestimmen, dass $|f(x_{p+1}) - f(x_p)| = \left|\int\limits_{x_p}^{x_{p+1}} f'(x)\,dx\right| > \frac{a_1}{N}$ ist. Es ist dann $|f'(x_p)| > \frac{a_1}{2d}$, mithin $f'(x_p)$ von Null entfernt.

§ 2. **Satz II.** *Wenn $f(z)$ für $|z - z_0| \leqq R$ regulär und variabel ist, so lässt sich zu jedem positiven $d < R$ eine positive Zahl a und eine ganze Zahl N so bestimmen, dass in jedem Punkt ζ mit $|\zeta - z_0| \leqq R - d$ eine Ableitung existiert, die dem absoluten Betrage nach grösser als a ist und die eine Ordnung $< N$ hat.*

Beweis. Wie aus der Betrachtung von $F(z) = f(Rz + z_0)$ ersichtlich, darf man hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit $R = 1$ und $z_0 = 0$ setzen. Wir bestimmen nach dem vorigen Satz z_1 und $a > 0$ derart, dass

$$|f'(z_1)| > a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

ist. Sei r eine positive Zahl, die kleiner ist als jede der beiden positiven Zahlen $\frac{1}{2}d$ und $\frac{1}{2}(1 - |z_1|)$, ν eine ganze Zahl $> \frac{4}{r}$ und $\mu > 1$ eine solche Zahl, dass $|f(z)| < \mu$ bleibt, falls $|z| \leqq 1 - r$ genommen wird. Wir bestimmen noch in folgender Weise $\nu + 1$ positive Hilfszahlen $a_1 > a_2 > \ldots > a_{\nu+1}$ und $\nu + 1$ ganze Zahlen $M_1 < M_2 < \ldots < M_{\nu+1}$. Es wird $a_1 = a$ und $M_1 = 2$ gesetzt. Wenn nun $a_1, a_2, \ldots, a_i$ und $M_1, M_2, \ldots, M_i$ schon bestimmt sind, so soll $M_{i+1} > M_i$ so gewählt werden, dass

$$\frac{\mu}{r^{M_i}} \sum_{p = M_{i+1} - M_i}^{p = \infty} \frac{(M_i + p)!}{2^p . p!} < \frac{a_i}{4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (IIa)$$

ist. Wir setzen weiter:

$$a_{i+1} = \frac{a_i}{4(M_{i+1} - M_i)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (IIb)$$

Wir behaupten nun, dass $a = a_{\nu+1}$ und $N = M_{\nu+1}$ die gesuchten Zahlen sind. Zum Beweis wählen wir, wenn ein Punkt ζ des Kreises $|z| = 1 - d$ beliebig vorgelegt ist, die Hilfspunkte:

$$z_j = z_1 + \frac{j-1}{\nu}(\zeta - z_1) \quad (j = 1, 2 \ldots, \nu + 1) \quad . \quad . \quad . \quad (III)$$

und zeigen wir die Richtigkeit der Aussage: „*Wenn die Ungleichung* $|f^{n_i}(z_i)| > a_i (A)$ *für ein bestimmtes* $n_i < M_i$ *gilt, so lässt sich ein* $n_{i+1} < M_{i+1}$ *derart bestimmen, dass auch die Ungleichung* $|f^{n_{i+1}}(z_{i+1})| > a_{i+1}$ (B) *gilt*". Diese Aussage ist für $i = 1$ mit $n_1 = 1$ nach (I) statthaft und liefert für $i = \nu$ wegen (III) die Behauptung unseres Satzes. Ihre Richtigkeit folgt aus der TAYLORschen Reihe

$$f^{n_i}(z_i) - f^{n_i}(z_{i+1}) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(z_i - z_{i+1})^p}{p!} f^{n_i+p}(z_{i+1}) \quad . \quad . \quad . \quad (IV)$$

Denn es ist *entweder* $|f^{n_i}(z_{i+1})| > \frac{a_i}{4} > a_{i+1}$ und alsdann gilt (B) mit $n_{i+1} = n_i$ *oder* $|f^{n_i}(z_{i+1})| < \frac{a_i}{2}$ und dann ist die linke Seite von (IV) wegen (A) dem absoluten Betrage nach $> \frac{1}{2} a_i$. Nun ist

$$\left| \sum_{M_{i+1}-M_i}^{\infty} \frac{(z_i - z_{i+1})^p}{p!} f^{n_i+p}(z_{i+1}) \right| < \tfrac{1}{4} a_i,$$

wie man aus (IIa) und $|z_i - z_{i+1}| < \frac{1}{2} r$ mit Hilfe der CAUCHYschen Abschätzung $|f^m(z_{i+1})| < \frac{\mu\, m!}{r^m}$ folgert. Mithin gibt es ein solches $q < M_{i+1} - M_i$, dass $|f^{n_i+q}(z_{i+1})| > \frac{a_i}{4(M_{i+1} - M_i)} = a_{i+1}$ ist. Also ist in diesem Fall (B) mit $n_{i+1} = n_i + q < M_{i+1}$ erfüllt.

§ 3. **Satz III.** *Es sei $f(z)$ regulär und variabel für $|z| < R$ und es seien zwei positive Zahlen $d < R$ und ε beliebig vorgelegt. Alsdann lässt sich eine positive Zahl $k < \varepsilon$ mit folgender Eigenschaft bestimmen:*

A. Jedem z_0 mit $|z_0| < R - d$ lässt sich ein z_1 mit $|z_1| < R - \frac{1}{2} d$ so zuordnen, dass $|f(z_1)| > |f(z_0)| + k$ ist.

B. Jedem z_0 mit $|z_0| < R - d$ kann man zwei zwischen k und ε liegende positive Zahlen r_1 und r_2 so zuordnen, dass die Ungleichung $|f(z)| > k$ für $r_1 \leqq |z - z_0| \leqq r_2$ erfüllt ist.

Bemerkung. Die Eigenschaft A verschärft den klassischen Satz, dass der absolute Betrag einer regulären Funktion kein Maximum innerhalb des Regularitätsgebietes besitzt[5]). Die Eigenschaft B gibt als Ersatz für

[5]) Vgl. die Einleitung, Beispiel b).

die in der intuitionistischen Mathematik nicht stichhaltige Disjunktion: „Es ist $|f(z)|$ in einem Punkt entweder >0 oder $=0$" ein Mittel zur Bestimmung von „Nullpunktfreien" Gebieten. Eine leichte Folgerung von B ist der in § 5, 6 und 8 angewandte

Zerlegungssatz. *Ist $f(z)$ regulär für $|z|<r$ und G ein innerhalb des Kreises $|z|=r$ liegendes Gebiet, auf dessen Rand $f(z)\neq 0$ ist, so kann man G zerlegen in Teilgebiete $p_1, p_2, \ldots$ auf deren Rand $f(z)$ ebenfalls $\neq 0$ ist, während zwei Punkte desselben Teilgebietes p_i eine Entfernung haben, die kleiner ist als eine beliebig vorgegebene, positive Zahl ε.*

Beweis des Satzes III. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man $R=1$ setzen. Es haben r, μ, α und N dieselbe Bedeutung wie in dem Beweis von § 2 und es sei $m=2\mu : r^N$. Für $|z|<1-d$, $|h|<\frac{1}{2}r$ und $p<N$ gilt dann

$$\left|\sum_{p}^{\infty} \frac{h^n f^n(z)}{n!}\right| < m\,|h|^p, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (I)$$

wie man leicht aus der CAUCHYschen Abschätzung $|f^n(z)|<\frac{\mu n!}{r^n}$ folgert. Es sei β_1 eine positive Zahl, die kleiner als jede der Zahlen r, α und ε ist. Wir bestimmen die Hilfszahlen β_i und δ_i für $i=1, 2, \ldots, N+1$ aus

$$\delta_i = \frac{\beta_i}{4\,m\,N!} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (IIa)$$

und

$$\beta_{i+1} = \frac{\delta_i^{N+1}}{4N} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (IIb)$$

Es ist dann $k=\frac{1}{4}\beta_{N+1}$ eine Zahl mit der verlangten Eigenschaft. Für den Beweis zeigen wir, dass folgende Aussage richtig ist:

„Falls in einem Punkt z_0 mit $|z_0|<1-d$ die Ungleichung

$$|f^p(z_0)| > \beta_i \quad \ldots \ldots \ldots \quad (III)$$

für ein gewisses $p\,(1 \leqq p < N)$ gilt, so hat man *entweder*:

$$|f^q(z_0)| > \beta_{i+1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (IV)$$

für ein q, das der Ungleichung $1 \leqq q < p$ genügt, *oder*:

$$|f(z_0+h)| > |f(z_0)| + k \quad \ldots \ldots \quad (Va)$$

für ein gewisses h, das dem absoluten Betrage nach kleiner als $\frac{d}{2}$ ist, und:

$$|f(z_0+h)| > k \quad \ldots \ldots \ldots \quad (Vb)$$

für jedes h, das der Bedingung $r_1 < |h| < r_2$ genügt, wo r_1 und r_2 passend zwischen k und ε zu wählende, positive Zahlen sind".

Diese Aussage ist für $i = 1$ nach Satz II wegen $\beta_1 < \alpha$ statthaft und es sind die Beziehungen Va und Vb die Behauptungen (A) und (B) unseres Satzes, während die Beziehung IV eine neue Anwendung mit kleinerem p ermöglicht [6]). Nach höchstens N-maliger Anwendung lässt sich also die Richtigkeit unseres Satzes folgern. Für den Beweis der Aussage setzen wir nach TAYLOR:

$$\left.\begin{aligned} f(z_0+h)-f(z_0) &= \sum_{0}^{p-1} \frac{h^n f^n(z_0)}{n!} + \frac{h^p f^p(z_0)}{p!} + \sum_{p+1}^{\infty} \frac{h^n f^n(z_0)}{n!} \\ &= \quad S_1 \quad + \quad S_2 \quad + \quad S_3 \end{aligned}\right\} . \quad (VI)$$

Wenn nun h der Bedingung $\delta_i \leqq |h| \leqq 2\,\delta_i$ genügt, so ist

$$|S_3| < \frac{\beta_i\,|h|^p}{2N!},$$

wie man aus (I) mit $p+1$ statt p und (IIa) folgert. Weiter is wegen (III):

$$|S_2| > \frac{\beta_i\,|h|^p}{N!}, \text{ mithin: } |S_2| > 2\,|S_3| . \quad . \quad . \quad . \quad (VII)$$

Wir setzen noch [7])

$$T_1 = \sum_{1}^{p-1} \frac{(2\,\delta_i)^n\,|f^n(z_0)|}{n!} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (VIII)$$

und

$$\theta = \frac{\delta_i^p\,\beta_i}{4N!}.$$

Es ist dann:

$$|S_1| < T_1 \; ; \; |S_2| > 4\,\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (IX)$$

und es gilt entweder:

$$T_1 > \tfrac{1}{4}\,\theta$$

oder:

$$T_1 < \tfrac{1}{2}\,\theta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (X)$$

Im ersten Fall gibt es nach $(VIII)$ und (IIa, b) ein solches q mit $1 \leqq q < p$, dass

$$|f^q(z_0)| > \frac{\theta}{4p} > \frac{\delta_i^p\,\beta_i}{16\,N\,.\,N!} > \beta_{i+1}$$

---

[6]) Für $p = 1$ findet man, wie aus dem Beweis ersichtlich, sofort die Beziehungen Va und Vb.

[7]) Für $p = 1$ setzen wir $T_1 = 0$.

ist, d.h. es gilt die Ungleichung (*IV*) unserer Aussage. Im zweiten Fall hat man neben (*X*) entweder:

$$|f(z_0)| < \tfrac{1}{2}\theta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (XI)$$

oder:

$$|f(z_0)| > \tfrac{1}{4}\theta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (XII)$$

Aus (*XI*) folgt nun wegen (*VII*) und (*IX*):

$$|f(z_0+h)| > |S_2| - |S_3| - |S_1| - |f(z_0)| > \theta,$$

folglich sowohl: $|f(z_0+h)| > |f(z_0)| + \frac{1}{2}\theta > |f(z_0)| + k$ als $|f(z_0+h)| > k$.

Es ist also die Ungleichung (*Va*) bzw (*Vb*) der Aussage erfüllt, sobald h der Beziehung $|h| = \delta_i < \frac{1}{2}d$ bzw $r_1 = \delta_i \leqq |h| \leqq 2\,\delta_i = r_2$ genügt.

Gilt (*XII*), so folgert man (*Va*) indem man h so bestimmt, dass $\dfrac{h^p f^p(z_0)}{f(z_0)}$ positiv und $|h| = \delta_i$ ist. Denn es ist dann:

$$|f(z_0+h)| > |f(z_0)| + |S_2| - |S_1| - |S_3| > |f(z_0)| + k.$$

Auch (*Vb*) ergibt sich jetzt leicht, denn wegen (*I*) mit $p=1$ hat man für jedes h, das der Beziehung: $r_1 = \dfrac{\theta}{16\,m} \leqq |h| \leqq \dfrac{\theta}{8\,m} = r_2$ genügt: $|f(z_0+h) - f(z_0)| < \frac{1}{8}\theta$, also wegen (*XII*) auch: $|f(z_0+h)| > \frac{1}{8}\theta > k$. Schliesslich folgert man aus (*IIa, b*) und den obigen Festsetzungen für r_1 und r_2, dass in jedem Fall die Ungleichung: $k < r_1 < r_2 < \varepsilon$ erfüllt ist.

§·4. **Satz IV.** *Wenn $f(z)$ für $|z| \leqq R$ regulär und variabel ist, so kann man zu jedem Punkt z_0 in $|z| < R$ zwei positive Zahlen r_1 und r_2 ($r_1 < r_2$) so bestimmen, dass* $\dfrac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\displaystyle\int \frac{f'(z)\,dz}{f(z) - f(z_0)} \geqq 1$ *ist, falls das Integral erstreckt wird über ein einfaches geschlossenes Polygon W, das den Kreis $|z - z_0| = r_1$ im positiven Sinne umschliesst und innerhalb des Kreises $|z - z_0| = r_2$ liegt.*

Bemerkung. Sätze wie der obige sind sofort klar, wenn man über die genaue Lage und Multiplizität der Nullstellen von $f(z) - f(z_0)$ orientiert ist und fehlen deshalb in der klassischen Theorie.

Beweis. Sei $|z_0| < R$. Nach Satz II können wir $p < N$ so bestimmen, dass $f^p(z_0) \neq 0$ ist. Wenn S_1, S_2 und S_3 dieselbe Bedeutung haben wie in § 3 (*VI*), so lässt sich offenbar ein solches positives $r < \dfrac{R - |z_0|}{2}$ bestimmen, dass $|S_3| < \frac{1}{4}|S_2|$ ist, sobald h der Ungleichung $|h| < 2\,r$ genügt. Wir setzen $U_1 = \displaystyle\sum_1^{p-1} \frac{(2\,r)^n\,|f^n(z_0)|}{n!}$ und $C = \dfrac{r^p\,|f^p(z_0)|}{8\,p!}$. [8])

[8]) Für $p=1$ setzen wir $U_1 = 0$.

Es ist nun entweder: $U_1 < 2C$ oder: $U_1 > C$. Im ersten Fall hat man für jedes h, das der Ungleichung $r_1 = r < |h| < 2r = r_2$ genügt:

$$|f(z_0+h) - f(z_0) - S_2| < \tfrac{1}{2}|S_2|,$$

mithin:

$$|Arg\{f(z_0+h) - f(z_0)\} - Arg\{S_2\}| < \frac{\pi}{6}$$

und hieraus folgert man sofort, dass in der Tat: $\dfrac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\displaystyle\int\limits_W \frac{f'(z)\,dz}{f(z)-f(z_0)} = p \geqq 1$

ist.

Im zweiten Fall lässt sich ein ganzes q mit $1 \leqq q < p$ so bestimmen, dass $|f^q(z_0)| \neq 0$ ist. Alsdann kann der Beweis mit q statt p wiederholt werden. Nach höchstens p-maliger Wiederholung gelangt man also zu der Behauptung des Satzes.

§ 5. **Satz V.** *Es sei $f(z)$ regulär und variabel im Innern eines Kreises C und G ein innerhalb C liegendes einfach zusammenhängendes Gebiet, auf dessen Rand $f(z) \neq 0$ ist. Alsdann gilt:*

$$I_G = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\limits_G \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} \geqq 0.$$

Beweis. Aus der Annahme $I_G < 0$ leiten wir in folgender Weise einen Widerspruch her. Es sei $\{\varepsilon_n\}$ eine gegen Null strebende, monotone Folge positiver Zahlen. Wir denken G zerlegt in Teilgebiete g_{i_1}, jedes dieser Teilgebiete wieder in Teilgebiete $g_{i_1 i_2}$, usw. Es soll dabei $f(z)$ auf dem Rande jedes dieser Teilgebiete $\neq 0$ sein und es soll die Entfernung zweier Punkte eines Teilgebietes $g_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ kleiner als ε_n sein. Nach dem Zerlegungssatz (§ 3) ist eine derartige Zerlegung möglich. Es ist dann

$$I_G = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\limits_G \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = \sum_{(i_1)} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\limits_{g_{i_1}} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = \sum_{(i_1)} I_{g_i}$$

und allgemein:

$$I_{g_{i_1 i_2 \ldots i_n}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\limits_{g_{i_1 \ldots i_n}} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} =$$

$$= \sum_{(i_{n+1})} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\limits_{g_{i_1 \ldots i_n i_{n+1}}} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = \sum_{(i_{n+1})} I_{g_{i_1 \ldots i_n i_{n+1}}}.$$

Falls nun $I_G < 0$ wäre, so könnte man eine gegen einen Punkt z_0 konvergierende Folge von Gebieten $g_{k_1}, g_{k_1 k_2 \ldots}$ so bestimmen, dass *jedes* $I_{g_{k_1 k_2 \dots k_m}} < 0$ ist. Hieraus folgern wir leicht, dass $f(z)$ samt ihren Ableitungen von beliebiger Ordnung in dem Punkt z_0 Null wäre, im Gegensatz zu der Annahme, dass $f(z)$ variabel ist. Denn wäre ja $f(z_0) \neq 0$, so könnte man r derart bestimmen, dass $|f(z) - f(z_0)| < \frac{1}{2} |f(z_0)|$ bleibt, sobald z der Bedingung $|z - z_0| < r$ genügt, und hieraus würde folgen, dass $I_{g_{k_1 \dots k_m}} = 0$ wäre für diejenigen Gebiete $g_{k_1 \dots k_m}$ der Folge, die ganz innerhalb des Kreises $|z - z_0| = r$ liegen. Und hätte man $f(z_0) = 0$, $f^p(z_0) = 0$ für $p = 1, 2, \dots n-1$ aber $f^n(z_0) \neq 0$, so könnte man r so bestimmen, dass

$$\left| f(z) - \frac{(z-z_0)^n f^n(z_0)}{n!} \right| = \left| \sum_{n+1}^{\infty} \frac{(z-z_0)^p f^p(z_0)}{p!} \right| < \frac{1}{2} \left| \frac{(z-z_0)^n f^n(z_0)}{n!} \right|$$

bleibt, sobald z der Bedingung $|z - z_0| < r$ genügt, und hieraus würde folgen, dass $I g_{k_1 \dots k_m} = n > 0$ wäre für diejenigen Gebiete $g_{k_1 \dots k_m}$ der Folge, die ganz innerhalb des Kreises $|z - z_0| = r$ liegen.

§ 6. **Satz VI.** *Es sei $f(z)$ regulär im Innern des Kreises $|z| = R$. Es liege der einfach zusammenhängende Bereich G ganz innerhalb dieses Kreises und es sei auf seinem Rande*

$$|f(z)| \geqq k. \quad \dots \dots \dots \dots (1)$$

Wenn nun

$$\int_G \frac{f'(z)\, dz}{f(z)} = 0$$

ist, so gilt (1) *für jeden Punkt von G.*

Beweis. Sei z_0 ein beliebiger Punkt von G. Um zu zeigen, dass $|f(z_0)| \geqq k$ ist, wählen wir eine beliebige positive Zahl ε. Wir haben dann *entweder:*

$$|f(z) - f(z_0)| > \varepsilon \quad \dots \dots \dots \dots (2)$$

für jeden Punkt z auf dem Rande von G, *oder:*

$$|f(z_1) - f(z_0)| < 2\varepsilon \quad \dots \dots \dots \dots (3)$$

für wenigstens einen Punkt z_1 auf diesem Rande.

Falls (2) gilt, bestimmen wir nach Satz IV ein solches Polygon p, dass

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_p \frac{f'(z)\, dz}{f(z) - f(z_0)} \geqq 1 \quad \dots \dots \dots \dots (4)$$

ist und zerlegen wir G in Teilgebiete $p_1 = p, p_2, p_3, \dots, p_n$, auf deren Rand $f(z) - f(z_0) \neq 0$ ist. Es ist nach Satz V

$$\sum_{\nu=2}^{n} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{p_\nu} \frac{f'(z)\, dz}{f(z) - f(z_0)} \geqq 0,$$

also wegen (4):

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\limits_G \frac{f'(z)\,dz}{f(z)-f(z_0)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\limits_{p_\nu} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)-f(z_0)} \geqq 1. \quad . \quad (5)$$

Wenn nun w beliebig komplex, aber absolut genommen kleiner als k ist, so hat man:

$$\int\limits_G \frac{f'(z)\,dz}{f(z)-w} = \int\limits_G \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} + \sum_{m=1}^{\infty} w^m \int\limits_G \frac{f'(z)\,dz}{\{f(z)\}^{m+1}} = 0, \quad . \quad . \quad (6)$$

da ja auf dem Rande von G $|f(z)| \geqq k > |w|$ ist. Vergleicht man aber die für jedes w mit $|w| < k$ gültige Beziehung (6) mit (5), so erkennt man, dass $|f(z_0)| \geqq k$ ist, w.z.b.w.

Gilt (3), so hat man wegen (1): $|f(z_0)| > k - 2\varepsilon$. Da ε beliebig ist, folgt wieder $|f(z_0)| \geqq k$.

§ 7. **Satz VII.** *Es sei $f(z)$ regulär für $|z| \leqq R$ und es sei für jedes $|z| = R$:*

$$|f(z)| \leqq \mu. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Alsdann gilt (1) *auch für jedes $|z| < R$.*

Beweis. Wenn $|z_0| < R$ und $|f(z_0)| > \mu$ wäre, so könnten wir folgenderweise einen Widerspruch herleiten. Wir setzen:

$$|f(z_0)| = \mu + \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und bestimmen $d < R - |z_0|$, so dass:

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

bleibt, sobald $|z' - z''| < d$ genommen wird. Sei $k = k(d; \varepsilon)$ die in Satz III bestimmte Konstante. Wir bestimmen z_1 mit $|z_1| < R - d$, so dass die Ungleichung

$$|f(z_1)| > |f(z)| - k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

für jedes $|z| < R - d$ erfüllt ist. Nach Satz III existiert nun z_2 mit $|z_2| < R - \frac{1}{2}d$, so dass

$$|f(z_2)| > |f(z_1)| + k, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

folglich, wegen (4) und (2), auch

$$|f(z_2)| > \mu + \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

ist. Wegen (4) und (5) ist $|z_2| \geqq R - d$. Setzen wir jetzt $z_3 = \dfrac{Rz_2}{|z_2|}$, so ist $|z_3| = R$, $|z_2 - z_3| < d$ folglich, wegen (3) und (6): $|f(z_3)| > \mu$ entgegen der Annahme (1).