Mathematics. — *Folgen und Reihen in bewerteten Körpern.* (Erste Mitteilung.) I. By F. LOONSTRA. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of February 22, 1941.)

§ 1. *Definitionen.*

In seiner Abhandlung „Limesbildung und allgemeine Körpertheorie" [1]) hat KÜRSCHÁK den Begriff der „Bewertung" in die Körpertheorie eingeführt. Einen Körper K nennt man bewertet, wenn jedem Elemente a von K eine positive reelle Zahl $|a|$, die Bewertung von a, zugeordnet wird. Die Bewertungen der Elemente sollen folgende Bedingungen erfüllen:

1. $$|a-b| \leqq |a| + |b|;$$
2. $$|ab| = |a| \cdot |b|;$$
3. $$|0| = 0; \; |a| \neq 0 \text{ für } a \neq 0.$$

Hieraus ergibt sich:

a. $$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \text{ für } b \neq 0;$$

b. $$|1|^2 = |1|, \text{ also } |1| = 1;$$

c. $$|-a| = |a|, \text{ somit } |-1| = 1;$$

d. $$\| |a| - |b| \| \leqq |a-b|$$

(wenn man für gewöhnliche Absolutbetragbewertung Doppelstriche benutzt).

Man nennt die Bewertung archimedisch, wenn wenigstens einmal die Bewertung einer Summe gröszer ist als die beider Summanden. Der Körper R der rationalen Zahlen ist archimedisch bewertet, wenn man jedem Elemente den gewöhnlichen Absolutbetrag zuordnet.

Die Bewertung heiszt nicht-archimedisch, wenn statt 1 die schärfere Forderung

$$|a+b| \leqq max(|a|; |b|)$$

gilt. Die p-adische Bewertung der rationalen Zahlen ist das einfachste Beispiel einer nicht-archimedischen Bewertung. (Sei a eine rationale Zahl, p eine bestimmte Primzahl und

$$a = \frac{u}{v} \cdot p^{\alpha}$$

---

[1]) Journal f. d. Reine und Angew. Math. 142 (1912).

mit durch p nicht teilbaren ganzen Zahlen u und v, so wird durch

$$|a| = c^{\alpha} \qquad (0 < c < 1)$$

eine Bewertung von R definiert.)

Zum Schlusz sei noch erwähnt, dasz jeder Körper „trivial" bewertet ist, wenn man

$$|a| = 1 \text{ für } a \neq 0; \ |0| = 0$$

feststellt.

Unter einer beschränkten Menge V von Elementen x aus einem bewerteten Körper versteht man eine solche Menge, zu der es ein Element a gibt mit

$$|a| \geqq |x|$$

für alle x aus V.

§ 2. *Fundamentalfolgen, vollständige Körper.*

Es sei $\{x_n\}$ eine unendliche Folge von Elementen $x_1, x_2, \ldots$ aus einem bewerteten Körper K. Die Folge heiszt Fundamentalfolge $\{x_n\}$, wenn es zu jeder positiven Grösze ε eine natürliche Zahl $n = n\,(\varepsilon)$ gibt, so dasz

$$|x_p - x_q| < \varepsilon \qquad (p > n; q > n).$$

Durch Ersetzung von x_p durch $x_q + x_p - x_q$ ergibt sich

$$|x_p| \leqq |x_q| + |x_p - x_q| \leqq |x_q| + \varepsilon$$

und für $q = n + 1$

$$|x_p| \leqq |x_{n+1}| + \varepsilon = C \text{ für } p > n.$$

Jede Fundamentalfolge ist also beschränkt.

Die Fundamentalfolgen mit Elementen aus K bilden einen Ring O, wenn man die Summe und das Produkt der Folgen $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ folgendermaszen definiert:

$$\{z_n\} = \{x_n + y_n\} \ ; \ \{u_n\} = \{x_n \cdot y_n\}.$$

Eine Fundamentalfolge $\{x_n\}$ aus K wird Nullfolge genannt, wenn es zu jeder positiven Grösze $\varepsilon > 0$ ein $n = n\,(\varepsilon)$ gibt, so dasz

$$|x_p| < \varepsilon \text{ für } p > n.$$

Die Nullfolgen bilden ein Ideal I im Ring O der Fundamentalfolgen.

Es sei $\{x_n\}$ eine Folge von Elementen aus K. Gibt es ein Element ξ aus K, so dasz $\{x_n - \xi\}$ eine Nullfolge bildet, so sagt man: die Folge $\{x_n\}$ konvergiert nach ξ, oder $\{x_n\} \to \xi$ und der Grenzwert wird mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ bezeichnet.

Wenn $\{x_n\} \rightarrow \xi$, so ist jedem positiven ε eine natürliche Zahl $n_0 = n_0(\varepsilon)$ zugeordnet, so dasz

$$|x_n - \xi| < \varepsilon \text{ für } n > n_0.$$

Jede konvergente Folge $\{x_n\}$ bestimmt ihren Grenzwert ξ eindeutig: Sei $\{x_n\} \rightarrow \xi$ und $\{x_n\} \rightarrow \xi'$, so sind $\{x_n - \xi\}$ und $\{x_n - \xi'\}$ Nullfolgen, d.h. die Differenz

$$\{(x_n - \xi) - (x_n - \xi')\} = \{\xi' - \xi\}$$

ist ebenfalls eine Nullfolge, aber dann ist $\xi = \xi'$.

Weil eine konvergente Folge auch Fundamentalfolge ist, so sind alle konvergenten Folgen von Elementen aus K beschränkt.

Aus der Konvergenz $\{x_n\} \rightarrow \xi$ schlieszt man weiter noch wegen der Relation d des § 1, dasz die Folge $\{|x_n|\} \rightarrow |\xi|$. Umgekehrt kann man aus $\{|x_n|\} \rightarrow |\xi|$ das Vorhandensein von $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ nicht folgen lassen: So besitzt im Sinne der Absolutbetragbewertung des Körpers der rationalen Zahlen die Folge

$$+1{,}9;\ -1{,}99;\ +1.999;\ -1{,}9999; \ldots$$

die Eigenschaft, dasz die Folge der Bewertungen den Grenzwert 2 besitzt, ohne dasz die Folge selber konvergiert.

Für Folgen von Elementen (mit Ausnahme von Nullfolgen) aus einem nicht-archimedisch bewerteten Körper gilt die merkwürdige Eigenschaft, dasz von einer konvergenten Folge $\{x_n\}$ die Elemente von einer Stelle x_n an dieselbe Bewertung haben. Es ist nämlich möglich eine solche positive Zahl g und eine natürliche Zahl n zu bestimmen, so dasz

$$|x_n| > g \text{ und } |x_n - x_{n+k}| < g.$$

Diese Ungleichheiten sagen aus:

$$|x_{n+k}| = |x_n + (x_{n+k} - x_n)| = |x_n|.$$

Es ist nämlich $|a+b| \leqq max\,(|a|, |b|)$; sind $|a|$ und $|b|$ nicht gleich, so ist $|a+b|$ genau gleich der gröszeren der beiden Zahlen.

Ein nicht-trivial bewerteter Körper ist, wenn man den Körper als topologischen Raum betrachtet, immer insichdicht, aber nicht notwendig vollständig, d.h. nicht jede Fundamentalfolge in K konvergiert, wie das Beispiel des Körpers R der rationalen Zahlen in bezug auf die Absolutbetragbewertung zeigt. Ebenso wie in der Cantorschen Theorie der Irrationalzahlen läszt sich nun jeder nicht-trivial bewertete Körper durch Hinzunahme von Fundamentalfolgen zu einem kleinsten vollständigen bewerteten Körper erweitern:

Die Festsetzung der Addition und der Multiplikation von Fundamentalfolgen im bewerteten Körper K erfüllt alle Postulate für einen Ring. Die Nullfolgen bilden im Ring O ein Ideal I, die Restklassen von O nach dem Ideal I bilden einen Restklassenring $O/I = \bar{K}$. Wir beweisen, dasz $\bar{K}$ ein Körper ist, dasz also im Ring der Fundamentalfolgen die Kongruenz

$$a\,x \equiv b\,(I) \text{ für } a \not\equiv 0\,(I)$$

eine Lösung hat.

Es gibt ein n und ein $\varepsilon > 0$ mit $|a_p| \geqq \varepsilon$ für $p > n$. Denn wenn für alle n und alle $\varepsilon > 0$

$$|a_p| < \varepsilon \qquad (p > n)$$

wäre, so könnte man n bei gegebenem ε so grosz wählen, dasz

$$|a_p - a_q| < \varepsilon \qquad (p > n,\, q > n)$$

also wäre die Folge $\{a_p\}$ eine Nullfolge im Widerspruch zur Voraussetzung. Es sei also für jedes Element der Fundamentalfolge $\{a_p\}$

$$|a_p| \geqq \varepsilon \text{ für alle } p.$$

Es ist dann die Folge $\{a_p^{-1}\}$ eine Fundamentalfolge, denn zu jedem ϑ gibt es ein n, so dasz

$$|a_q - a_p| < \vartheta\,\varepsilon^2 \qquad (p > n,\, q > n)$$

und wegen $|a_p| \geqq \varepsilon$, $|a_q| \geqq \varepsilon$

$$\frac{|a_q - a_p|}{|a_p\, a_q|} < \vartheta,$$

also

$$|a_p^{-1} - a_q^{-1}| < \vartheta \qquad (p > n,\, q > n).$$

Die Fundamentalfolge $\{a_p^{-1}\, b_p\}$ ist die erwünschte Lösung der Kongruenz.

Der Körper $\bar{K}$ enthält insbesondere die Restklassen mod I, welche durch die Fundamentalfolgen $\{a, a, \ldots\}$ dargestellt werden. Es läszt sich einfach zeigen, dasz der Körper $\bar{K}$ sich durch Hinzunahme der Fundamentalfolgen nicht mehr erweitern läszt: jede Fundamentalfolge in $\bar{K}$ besitzt schon in $\bar{K}$ einen Limes. Wir setzen voraus, dasz in der Folge $\{\alpha_p\}$ zwei aufeinanderfolgende Elemente immer voneinander verschieden sind.

Wir setzen nun

$$|\alpha_p - \alpha_{p+1}| = \varepsilon_p.$$

Es gibt zu jedem α_p ein a_p, so dasz

$$|a_p - \alpha_p| < \varepsilon_p.$$

Es ist ja α_p definiert durch eine Fundamentalfolge $\{a_{1,p}, a_{2,p}, \dots\}$ als deren Limes es definiert war. Weiter gibt es zu jedem ε ein n', so dasz

$$|\alpha_p - \alpha_q| < \tfrac{1}{3}\varepsilon \qquad (p > n', q > n')$$

und ein n'', so dasz $\varepsilon_p < \frac{1}{3}\varepsilon$ $(p > n'')$. Ist nun $n = max\ (n', n'')$ so sind für $p > n$, $q > n$

$$|\alpha_p - \alpha_p| < \tfrac{1}{3}\varepsilon,\ |\alpha_p - \alpha_q| < \tfrac{1}{3}\varepsilon,\ |\alpha_q - a_q| < \tfrac{1}{3}\varepsilon$$

also

$$|a_p - a_q| \leqq |a_p - \alpha_p| + |\alpha_p - \alpha_q| + |\alpha_q - a_q| < \varepsilon.$$

Folglich bilden die a_n eine Fundamentalfolge in $\overline{K}$ und diese Folge besitzt also einen Limes α in K. Wegen $\{\alpha_n\} = \{a_n - (\alpha_n - a_n)\}$ unterscheidet sich die Fundamentalfolge $\{\alpha_n\}$ von der Folge $\{a_n\}$ um eine Nullfolge, also hat die Folge $\{\alpha_n\}$ den gleichen Limes.

Auf Grund der in § 1 gegebene Ungleichung d bilden die Bewertungen $|a_p|$ der Elemente einer Fundamentalfolge $\{a_p\}$ ebenfalls eine Fundamentalfolge im Körper Z der reellen Zahlen, und diese Folge besitzt in Z einen Limes. Wir setzten nun, wenn die Fundamentalfolge $\{a_p\}$ das Element α definiert,

$$|\alpha| = \lim_{p \to \infty} |a_p|.$$

Alle Fundamentalfolgen mit demselben Limes definieren also dieselbe Bewertung in $\overline{K}$. Diese Erweiterung $\overline{K}$ von K ist also vollständig, und man nennt sie zuweilen perfekt. Das Resultat unserer Ueberlegungen können wir also in der Aussage zusammenfassen:

Jeder bewertete Körper K kann zu einem vollständigen Körper erweitert werden. Diese kleinste vollständige bewertete Erweiterung K eines Körpers K steht in der gleichen Beziehung zum Körper K wie der Körper der reellen Zahlen zu dem der rationalen Zahlen.

Für weitere Untersuchungen benötigen wir den Beweis von $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|n|} = 1$ (in jedem bewerteten Körper) wenn n alle natürlichen Zahlen durchläuft.

1°. Archimedische Bewertung des Körpers R der rationalen Zahlen: Es ist jede Bewertung

$$|n| = \|n\|^{\varrho} \qquad (0 < \varrho \leqq 1)$$ [2]

wo $\|n\|$ der gewöhnliche absolute Betrag ist. Daraus ergibt sich:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|n\|^{\varrho}}.$$

---

[2]) OSTROWSKI, Acta Mathematica **41** (1918).

Im Körper R ist

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|n\|} = 1, \text{ also auch } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n|} = 1.$$

2^0. Nicht-archimedische Bewertung des Körpers R: Für wenigstens eine Primzahl p ist die Bewertung $|p| < 1$. Aber dann ist die Bewertung jeder zu p teilerfremden ganzen Zahl q

$$|q| = 1.$$

Es sei $n = p^\alpha \cdot p_1^\beta \cdot p_2^\gamma \cdot \ldots$, so ist $|n| = p^{-\alpha\tau}$ (falls p nicht Teiler von n ist, setze man $\alpha = 0$). Es ist ja jede nicht archimedische Bewertung der rationalen Zahlen einer p-adischen Bewertung gleich [3]). Es ist nun

$$1 \leqq p^\alpha \leqq n$$

also

$$1 \geqq p^{-\alpha\tau} \geqq n^{-\tau}$$

mithin

$$\sqrt[n]{1} \geqq \sqrt[n]{p^{-\alpha\tau}} \geqq \sqrt[n]{n^{-\tau}}.$$

Die Ausdrücke rechts und links besitzen den Limes 1, also auch der mittelste, w. z. b. w. In dieser Weise zeigt man auch, dasz für beide Bewertungsarten:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n+k|} \text{ und } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n+k}\right|}$$

für festes k alle gleich 1 sind, wenn man darauf achtgibt, dasz $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|n+k\|} = 1$ (für festes k) (im Körper R der rationalen Zahlen mit der Absolutbetragbewertung).

3^0. Ist R trivial bewertet, so ist es ohne weiteres klar, dasz $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n|} = 1$.

Allgemeines Konvergenzkriterium für eine Reihe; es sei $u_1 + u_2 + \ldots$ eine Reihe von Elementen aus einem vollständigen bewerteten Körper K. Setzt man

$$\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu = s_n,$$

so folgt aus dem Erörterten, dasz man die Konvergenz der Reihe bestimmen kann mittels derjenigen der Folge $\{s_n\}$. Aus dem Konvergenzkriterium für Folgen ergibt sich also das allgemeine Konvergenzkriterium für eine Reihe:

Dafür, dasz eine Reihe $u_1 + u_2 + \ldots$ von Elementen aus einem voll-

---

[3]) OSTROWSKI, Acta Mathematica **41** (1918).

ständigen bewerteten Körper konvergiere, ist notwendig und hinreichend, dasz man jeder positiven Zahl ε mindestens eine natürliche Zahl n zuordnen kann, so dasz für jede natürliche Zahl p

$$|u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

Aus dem zweiten Teil folgt, wenn man $p = 1$ ansetzt, eine notwendige, aber keineswegs hinreichende Bedingung

$$|u_m| < \varepsilon \qquad (m \geqq n(\varepsilon)).$$

Für nicht-archimedisch vollständige bewertete Körper ist diese notwendige Forderung auch hinreichend. Aus

$$|u_m| < \varepsilon \qquad (m \geqq n(\varepsilon)).$$

folgt

$$|u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| \leqq max(|u_n|, |u_{n+1}|, \ldots)$$

und folglich

$$|u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| \leqq \varepsilon.$$

Eine hinreichende, aber keine notwendige Bedingung für die Konvergenz von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ (u_n aus K) ist die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

Es ist nämlich

$$|u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| \leqq |u_n| + |u_{n+1}| + \ldots + |u_{n+p}|.$$

Für nicht-archimedisch vollständige bewertete Körper ist die Konvergenz der Reihe der Bewertungen nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig für die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$. Konvergiert nämlich $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$, so ist $\lim\limits_{n \to 0} u_n = 0$ also auch $\lim\limits_{n \to 0} |u_n| = 0$, aber diese Bedingung ist notwendig und hinreichend für die Konvergenz der Reihe

$$|u_0| + |u_1| + |u_2| + \ldots$$

Wir nennen auch hier eine Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ von Elementen aus einem bewerteten Körper absolut konvergent, wenn die Reihe der Bewertungen konvergiert.

§ 3. *Funktionen.*

Eine Funktion $f(x)$, die auf ihrem ganzen Definitionsbereich ausschlieszlich Elemente eines vollständigen bewerteten Körpers K benutzt, läszt jedem Elemente x von K ein Element ebenfalls von K entsprechen. Die einfachsten Funktionen sind die Ringelemente von $K[x]$: die Polynome in x über K; es ist

$$\sum_i a_i x^i + \sum_i b_i x^i = \sum_i (a_i + b_i) x^i$$

$$(\sum_i a_i x^i) \cdot (\sum_k b_k x^k) = \sum_m c_m x^m \qquad (c_m = \sum a_i b_k).$$

Durch Quotientenbildung erhält man den Körper $K(x)$, für welchen jedes Element

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ mit } f(x) \text{ und } g(x) \text{ aus } K[x].$$

Die Ableitung von $f(x)$ für $x = x_0$, welche wir mit $f'(x_0)$ bezeichnen definiert man auch hier derart, dasz man Differenz $f(x_0 + h_n) - f(x_0)$ bildet und dann durch das darin vorkommende Element h_n einer Nullfolge $\{h_n\}$ aus K durchdividiert und

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}$$

bestimmt.

Wenn $f(x)$ für alle x des Definitionbereiches eine Ableitung besitzt, so nennen wir $f(x)$ differenzierbar, und die Ableitung bezeichnen wir mit $f'(x)$. Man beweist einfach, dasz für Polynome

$$(\sum_k a_k x^k)' = \sum_k k a_k x^{k-1}$$

und weiter:

$$(f+g)' = f' + g'; \; (fg)' = fg' + f'g.$$

Weil das Bewertetsein von K die Eigenschaften des Körpers nicht ändert, gilt also für bewertete Körper im allgemeinen: Ist a eine Nullstelle eines Polynoms $f(x)$, so ist $f(x)$ durch $x - a$ teilbar. Daraus ergibt sich, dasz ein von Null verschiedenes Polynom höchstens soviele Nullstellen besitzt wie der Grad des Polynoms angibt.

Stetigkeit. Es sei $f(x)$ definiert für eine Menge V von Elementen x aus einem bewerteten Körper, und x_0 aus V. Man nennt $f(x)$ für $x = x_0$ stetig, wenn man jedem $\varepsilon > 0$ ein ebenfalls positives θ zuordnen kann, so dasz

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ für } |h| < \theta.$$

Man nennt $f(x)$ stetig in V, wenn $f(x)$ für jedes x von V stetig ist. Dasz die ganzen rationalen Funktionen auch in bewerteten Körpern stetig sind, zeigt man einfach für $f(x) = ax^n$ und für die Summe von zwei stetigen Funktionen f und g.

§ 4. *Gleichmäszige Konvergenz.*

Es sei $f(x)$ eine Funktion, definiert in einem vollständigen bewerteten Körper, welche auszerdem abhängig ist von n. Man sagt: $f_n(x)$ konvergiert gleichmäszig zur Funktion $F(x)$, wenn man jeder positiven Zahl ε eine natürliche Zahl N zuordnen kann, so dasz für jedes $n > N$ und alle x, für welche $f_n(x)$ definiert sei,

$$|F(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Wenn eine stetige Funktion $f_n(x)$ gleichmäszig zu einer Funktion $F(x)$ konvergiert, so ist $F(x)$ ebenfalls eine stetige Funktion. Setzt man nämlich an

$$F(x) - f_n(x) = d_n(x),$$

so ist

$$F(x+h) - f_n(x+h) = d_n(x+h).$$

Nun ist

$$F(x+h) - F(x) = \{f_n(x+h) - f_n(x)\} + \{d_n(x+h) - d_n(x)\}$$

und folglich

$$|F(x+h) - F(x)| = |f_n(x+h) - f_n(x)| + |d_n(x+h)| + |d_n(x)|$$

und wegen der Voraussetzungen ist für $|h| < \eta$ ein n zu bestimmen so dasz

$$|F(x+h) - F(x)| < 3\,\varepsilon,$$

d.h. $F(x)$ ist eine stetige Funktion.

Aus dem Beweise geht deutlich hervor, dasz dieser Satz ebenso gut für archimedisch wie für nicht-archimedisch bewertete Körper gültig ist. Für den zweiten bekannten Satz der gleichmäszigen Konvergenz, welche die Vertauschung von Differenzieren und Limesübergang besagt, ist dem üblichen Beweis nicht zu folgen. Der Beweis des Satzes, wie er in der Theorie der reellen Funktionen gewöhnlich gegeben wird, benutzt den Mittelwertsatz der Differentialrechnung, einen Satz, welcher mit Hilfe des Theorems von ROLLE bewiesen wird. Dieses Theorem besagt: „Sind a und b zwei Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, ist $f(x)$ stetig und besitzt $f(x)$ für $a \leqq x \leqq b$ eine Ableitung, so hat $f'(x) = 0$ wenigstens eine Wurzel c, so dasz $a \leqq c \leqq b$". Das Theorem von ROLLE ist z.B. im Körper der komplexen Zahlen ungültig:

$$e^{ix} - 1 = 0$$

hat die Wurzeln $x = 0$ und $x = 2\pi$, während die Ableitung $i \cdot e^{ix}$ zwischen $x = 0$ und $x = 2\pi$ keine Nullstelle besitzt. Dadurch wird dieser Beweis also ungültig. Dasz die Vertauschung von Differentiation und

Limesübergang z.B. im Körper der p-adisch bewerteten Körper der rationalen Zahlen falsch ist, hat Herr H. FREUDENTHAL mir durch folgende Ueberlegung bewiesen: k durchlaufe die Zahlen: $0, 1, \ldots, p^n - 1$. Es sei

$$f_n(x) = k \text{ für jede } x, \text{ wofür } |x - k| \leqq p^{-n}. \text{ Folglich ist } f_n'(x) \equiv 0,$$

also

$$\lim_{n \to \infty} f_n'(x) \equiv 0 \text{ (gleichmäszig).}$$

Aber trotzdem ist:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) \equiv x \text{ (gleichmäszig).}$$

Es stellt sich aber heraus, dasz der Satz von Vertauschung von Differentiation und Limesübergang in bewerteten Körpern für die Partialsummen einer analytischen Funktion gültig ist.

Wir geben den Beweis für den Fall, dasz die Bewertung des Körpers K nicht-archimedisch ist. Die archimedisch bewerteten Körper sind nämlich zu einem mit gewöhnlichen Absolutbeträgen bewerteten Körper aus komplexen Zahlen isomorph [4]), und es ist klar, dasz man für den Beweis des Satzes der Vertauschung auf die Behandlung im Körper der komplexen Zahlen verweisen kann. Es sei also

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

eine Reihe, welche für $|x| < R$ konvergiert und

$$f_1(x) = a_1 + 2 a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$$

die Reihe der Ableitungen, die, wie wir später sehen werden, auch für $|x| < R$ konvergiert.

Es soll gezeigt werden, dasz es für festes x zu jeder positiven Grösze ε eine reelle Grösze η gibt, so dasz

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f_1(x) \right| < \varepsilon \text{ für } |h| < \eta.$$

Wir setzen nun ein festes $x \neq 0$ voraus und auszerdem $|h| \leqq \frac{1}{2}|x|$. Es ist

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f_1(x) \right| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x+h)^n - x^n}{h} - n a_n x^{n-1} \right| \\ &\leqq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left| \frac{(x+h)^n - x^n}{h} - n x^{n-1} \right| \\ &\leqq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left| \sum_{\nu=2}^{n} \binom{n}{\nu} x^{n-\nu} h^{\nu-1} \right| \end{aligned}$$

[4]) OSTROWSKI, Acta Mathematica **41** (1918).

also, weil die Gröszen $\binom{n}{\nu}$ ganze Zahlen sind und somit $\left|\binom{n}{\nu}\right| \leqq 1$,

$$\leqq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{\nu=2}^{\infty} |x|^{n-\nu} |h|^{\nu-1} \quad (*)$$

$$\leqq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^{n-1}| \sum_{\nu=2}^{\infty} \left| \frac{h^{\nu-1}}{x^{\nu-1}} \right| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^{n-1}| \sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{h^{\nu}}{x^{\nu}} \right|$$

$$\leqq \sum_{n-0}^{\infty} |a_n x^{n-1}| \cdot \left| \frac{h}{x} \right| \cdot \frac{1}{1-\left|\frac{h}{x}\right|},$$

folglich, wegen $|h| \leqq \frac{1}{2} . |x|$ und also $\frac{1}{1-\left|\frac{h}{x}\right|} \leqq 2$

$$\leqq \frac{2}{|x|^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \cdot |h|$$

$\leqq C \cdot |h|$, worin C unabhängig von h ist.

Für $x = 0$ tritt an Stelle von (*)

$$\leqq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \cdot |h|^{n-1} \leqq h \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \cdot |h|^{n-2} \leqq C' \cdot h.$$

Hieraus ergibt sich das zu Beweisende sofort, weil $C \cdot h$ resp. $C' \cdot h$ beliebig klein gemacht werden kann.

Zum Schlusz werden wir von folgendem Gebrauch machen: Wenn für die Elemente x einer Menge V aus einem bewerteten Körper die Glieder der Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ (welche alle Funktionen von x sind) Bewertungen besitzen, welche höchstens v_n sind, worin v_n nicht-negative Glieder einer konvergenten Reihe

$$v_0 + v_1 + \ldots + v_n + \ldots$$

darstellen, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ in V gleichmäszig, denn

$$|u_{n+1}(x) + \ldots| \leqq |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \ldots$$

und folglich, wenn wir

$$u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots = R_n(x);\ v_{n+1} + v_{n+2+} \ldots = R'_n$$

ansetzen:

$$|R_n(x)| \leqq R'_n.$$

Nun konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$, also ist für jedes reelle $\varepsilon > 0$ ein $n_1 = n_1(\varepsilon)$ zu bestimmen, so dasz

$$R'_n < \varepsilon \text{ für } n > n_1,$$

also

$$|R_n(x)| < \varepsilon \text{ für } n > n_1$$

und für alle x von V, d.h. die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ konvergiert in V gleichmäszig.