**Mathematics.** — *Simultane Approximationen in imaginären quadratischen Zahlkörpern.* Von J. F. KOKSMA und B. MEULENBELD. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of February 22, 1941.)

§ 1. *Einleitung.*

I. Ist $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ ein System von $n$ reellen Zahlen, so gibt es nach MINKOWSKI [1]) unendlich viele verschiedene Systeme rationaler Zahlen $\left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_n}{q}\right)$ $(q \geqq 1, p_1, p_2, \ldots, p_n$ ganz rational), derart dass simultan gilt:

$$\left|\theta_\nu - \frac{p_\nu}{q}\right| < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right) q^{1+\frac{1}{n}}} \qquad \text{für } \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Nach Herrn H. F. BLICHFELDT [2]) gibt es sogar unendlich viele solche Bruchsysteme mit:

$$\left|\theta_\nu - \frac{p_\nu}{q}\right| < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{1+\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+3}\right\}^{\frac{1}{n}} q^{1+\frac{1}{n}}} \qquad \text{für } \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Schon MINKOWSKI [3]) hat seinen Satz ins Komplexe übertragen, indem er die simultane Approximation eines beliebigen Systems komplexer Zahlen $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ durch Bruchsysteme $\left(\frac{P_1}{Q}, \frac{P_2}{Q}, \ldots, \frac{P_n}{Q}\right)$ untersuchte, wo die $Q, P_1, P_2, \ldots, P_n$ ganze Zahlen aus dem Körper $K(i)$ bedeuten.

Sei $m$ eine quadratfreie natürliche Zahl und

$$\left.\begin{array}{l} \chi = 0, \lambda = 1 \text{ für } m \not\equiv 3 \pmod 4 \\ \chi = 1, \lambda = 2 \text{ für } m \equiv 3 \pmod 4 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

gesetzt. Dann bildet bekanntlich $\left(1, \frac{\chi + i\sqrt{m}}{\lambda}\right)$ eine Basis des Körpers $K(i\sqrt{m})$, so dass das System der ganzen Zahlen von $K(i\sqrt{m})$ mit dem System der Zahlen

$$X = x + \frac{\chi + i\sqrt{m}}{\lambda} y \qquad (x, y \text{ ganz rational}) \quad \ldots \quad (2)$$

---

[1]) H. MINKOWSKI, Geometrie der Zahlen (Leipzig—Berlin, 1910). S. 108 ff.

[2]) H. F. BLICHFELDT, A new principle in the geometry of numbers, with some applications. Trans. Amer. Math. Soc. **15**, S. 227—235 (1914).

[3]) Siehe [1]).

identisch ist. Anwendung der MINKOWSKIschen Methode lehrt, dass für jedes System komplexer $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ die Ungleichungen

$$\left|\theta_\nu - \frac{P_\nu}{Q}\right| < \frac{2n}{(n+1)\sqrt{\pi}} \sqrt[2n]{\frac{4(2n+1)m^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)\pi\lambda^{n+1}}} \frac{1}{|Q|^{1+\frac{1}{n}}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

unendlich viele Lösungen in ganzen $Q \neq 0, P_1, P_2, \ldots, P_n$, aus $K(i\sqrt{m})$ besitzen, ein Ergebnis, das für $m = 1$ mit dem MINKOWSKIschen identisch ist [4]) und nach einer Bemerkung des Herrn H. HOFREITER [5]) von Herrn H. ARAL in seiner Münchener Dissertation hergeleitet wurde [6]).

In dieser Arbeit leiten wir mittels Übertragung der BLICHFELDTschen Methode auf den komplexen Fall den folgenden Satz 1 her, der offenbar eine Verschärfung der angeführten Approximationen enthält.

**Satz 1.** *Für ganze $n \geqq 1$, $m \geqq 1$ ($m$ quadratfrei) werde $\lambda$ durch* (1) *und $\gamma_{n,m}$ durch*

$$\gamma_{n,m} =$$

$$= \frac{2n}{(n+1)\sqrt{\pi}} \sqrt[2n]{\frac{4(2n+1)m^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)\pi\lambda^{n+1}}} \sqrt[2n]{\frac{1}{1 + \frac{(n-1)^{2n+2}}{(n+1)^{2n+1}n} + \frac{2^{2n+3}n^{2n+1}(2n+1)}{(n+1)^{2n+1}} \sum_{\mu=2n+3}^{\infty} \frac{1}{\mu}\left(\frac{n-1}{2n}\right)^{\mu}}} \qquad (3)$$

*definiert; ferner seien $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ beliebige, komplexe Zahlen und $t$ eine reelle Zahl $> 2$. Dann gibt es wenigstens ein System ganzer Zahlen $Q, P_1, P_2, \ldots, P_n$ aus $K(i\sqrt{m})$ mit*

$$1 \leqq |Q| \leqq 2t^n \gamma_{n,m}^n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

*das für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ den Ungleichungen*

$$\left|\theta_\nu - \frac{P_\nu}{Q}\right| \leqq \frac{\gamma_{n,m}}{|Q|^{1+\frac{1}{n}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

---

4) Siehe 1), S. 115.

5) H. HOFREITER, Diophantische Approximationen komplexer Zahlen. Monatsh. f. Math. u. Physik. **49**, S. 299—302 (1940).

6) Der Satz wird zwar nur unter der Voraussetzung ausgesprochen, dass die $\theta_\nu$ i. B. auf $K(i\sqrt{m})$ linear unabhängig sind, d.h., dass der Ausdruck

$$\theta_1 X_1 + \theta_2 X_2 + \ldots + \theta_n X_n - Y$$

für jede Wahl nicht sämtlich verschwindender ganzer $X_1, X_2, \ldots, X_n, Y$ aus $K(i\sqrt{m})$ ungleich Null ist, aber diese Voraussetzung lässt sich leicht beseitigen: wenn die Behauptung für den Fall der linearen Unabhängigkeit schon bewiesen ist, ist sie für den Fall der linearen Abhängigkeit eine triviale Folgerung.

*und*

$$\left|\theta_\nu - \frac{P_\nu}{Q}\right| \leqq \frac{2}{t\,|Q|} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

*genügt.*

*Bemerkungen.* 1. Es genügt den Satz zu zeigen mit

$$1 \leqq |Q| \leqq t^n \gamma_{n,m}^n (2+\delta),$$

$$\left|\theta_\nu - \frac{P_\nu}{Q}\right| < \frac{\gamma_{n,m}(1+\delta)}{|Q|^{1+\frac{1}{n}}}, \quad \left|\theta_\nu - \frac{P_\nu}{Q}\right| < \frac{2+\delta}{t\,|Q|} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

($\delta$ beliebig positiv), statt mit (4), (5) und (6), denn weil diesen Ungleichungen höchstens endlich viele Systeme ganzer $Q, P_1, \ldots, P_n$ aus $K(i\sqrt{m})$ genügen können, folgt aus Stetigkeitsgründen sofort der Satz.

2. Ist wenigstens eines der $\theta_\nu$ i.B. auf $K(i\sqrt{m})$ irrational (was z.B. erfüllt ist wenn die $\theta_\nu$ i.B. auf $K(i\sqrt{m})$ linear unabhängig sind; vgl.[6])), so ist für wenigstens ein $\nu$ die linke Seite von (6) stets $\neq 0$, so dass bei unbeschränkt wachsendem $t$ das System $(Q, P_1, \ldots, P_n)$ mit (4), (5), (6) nicht immer dasselbe bleiben kann; vielmehr gilt $|Q| \to \infty$ falls $t \to \infty$, *so dass es unendlich viele verschiedene Systeme ganzer* $Q \neq 0, P_1, \ldots, P_n$ *aus* $K(i\sqrt{m})$ *mit* (5) *gibt.*

3. Im Fall $n > 1$ sind uns keine schärferen Ergebnisse als die vom Satz 1 gelieferten bekannt; im Fall $n = 1$ zeigte Herr A. OPPENHEIM[7]) mit andren Methoden, dass es zu jeder Zahl $\theta$, die nicht in $K(i\sqrt{m})$ liegt unendlich viele Paare ganzer Zahlen $Q \neq 0, P$ aus $K(i\sqrt{m})$ mit

$$\left|\theta - \frac{P}{Q}\right| < \frac{C}{|Q|^2} \text{ mit } C = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{m}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

gibt. Für spezielle Werte von $m$ $(n = 1)$ haben mehrere Autore schärfere Ergebnisse mitgeteilt. Nur im Fall $m = 1, 2, 3, 7$ $(n = 1)$ ist der endgültige Wert der Konstante $C$ in (7) bekannt[8]).

4. In einer vorigen Arbeit[9]) haben wir im reellen Fall die Annäherung

---

[7]) A. OPPENHEIM, Diophantische Approximationen in imaginären quadratischen Zahlkörpern. Monatsh. f. Math. u. Phys. **46**, S. 196 (1938).

[8]) Siehe z.B. H. HOFREITER, Diophantische Approximationen in imaginären quadratischen Zahlkörpern. Monatsh. f. Math. u. Phys. **45**, S. 175—190 (1937). Lit. über diesen Problemkreis bis Ende 1935 bei J. F. KOKSMA, Diophantische Approximationen. Erg. d. Math. IV, 4; Berlin (1936), Kap. IV, V.

[9]) J. F. KOKSMA und B. MEULENBELD, Ueber die Approximation einer homogenen Linearform an die Null, Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam **44**, S. 62—74 (1941).

Wir benutzen die Gelegenheit zur Berichtigung dreier Druckfehler. S. 66 ist zwischen den beiden Ungleichungen der Formel (8) ein Komma zu setzen.

S. 68, 1⁰ Zeile v.u. lese man für das 1⁰ Zeichen $<$ das Zeichen $\leqq$. Man kann diese an die Null der mit dem Zahlensystem $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ eng zusammenhängenden homogenen Linearform $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \ldots + \theta_n x_n - y$ untersucht; in einer folgenden Arbeit werden wir das entsprechende Problem in $K(i\sqrt{m})$ betrachten [10]).

II. Beim Beweise des Satzes 1 im § 2 benutzen wir den folgenden BLICHFELDTschen [2])

Satz 2. *Der Raum* $R_M$ *der Punkte* $(u_1, u_2, \ldots, u_M)$ $(M \geqq 2)$ *werde durch die „Ebenen"*

$$u_\mu = a_\mu + b_\mu t \; (\mu = 1, 2, \ldots, M;\; t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\; a_\mu, b_\mu \text{ reell, fest})$$

*in Fundamentalparallelepipede* $R$ *eingeteilt. In jedem* $R$ *seien* $k$ $(k \geqq 1)$ *beliebige Punkte fest gegeben. Diese Punkte heissen hier die Gitterpunkte des Raumes* $R_M$. *Der Inhalt von* $R$ *sei* $W$. *Ist nun* $S$ *eine beliebige beschränkte offene stetig zusammenhängende Punktmenge im* $R_M$ *mit äusserem Volumen* $V$ *und ist* $\varepsilon > 0$, *so kann man durch eine passende Translation die Menge* $S$ *immer in eine solche Lage bringen, dass die Anzahl der Gitterpunkte, welche innerhalb von* $S$ *oder innerhalb einer* $\varepsilon$*-Umgebung eines Randpunktes von* $S$ *liegen, grösser als* $\frac{Vk}{W}$ *ist.*

§ 2. *Beweis des Satzes 1.* Wir setzen $\theta_\nu = \alpha_\nu + i\beta_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ und bilden den Raum $R_{2n+2}$ der Punkte

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1})$$

auf den Raum $R'_{2n+2}$ der Punkte $(u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}, v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1})$ durch die Transformation

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} u_\nu = x_\nu + \dfrac{\chi}{\lambda} y_\nu - \alpha_\nu x_{n+1} + \left(\dfrac{\beta_\nu \sqrt{m}}{\lambda} - \alpha_\nu \dfrac{\chi}{\lambda}\right) y_{n+1} \\ v_\nu = \dfrac{\sqrt{m}}{\lambda} y_\nu - \beta_\nu x_{n+1} - \left(\dfrac{\alpha_\nu \sqrt{m}}{\lambda} + \beta_\nu \dfrac{\chi}{\lambda}\right) y_{n+1} \end{array}\right\} (\nu = 1, 2, \ldots, n) \\ u_{n+1} = x_{n+1} + \dfrac{\chi}{\lambda} y_{n+1} \\ v_{n+1} = \dfrac{\sqrt{m}}{\lambda} y_{n+1} \end{array}\right\} . \tag{8}$$

Verbesserung unterlassen, wenn man auf Z. 1 und 14 v.u. die Zahl $\frac{1}{2}$ durch eine beliebige Zahl $\eta$ die nicht zu dem Wertevorrat der Form

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n - y \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_n, y \text{ ganz rational})$$

gehört, ersetzt denkt.

S. 70, Formel (18) lese man $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$, statt $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

[10]) J. F. KOKSMA und B. MEULENBELD, Diophantische Approximationen homogener Linearformen in imaginären quadratischen Zahlkörpern. (Erscheint demnächst in diesen Proc.).

ab. Setzt man in (8) für $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1})$ sämtliche Gitterpunkte des $R_{2n+2}$ ein, so erhält man im $R'_{2n+2}$ ein System von Punkten $(u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}, v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1})$, welche wir als „Gitterpunkte" des $R'_{2n+2}$ im Sinne des Satzes 2 auffassen wollen. Weil diese Punkte ein abzählbares System bilden, lässt sich im $R'_{2n+2}$ ein Punkt $(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, b_1, b_2, \ldots, b_n, b_{n+1})$ finden, der i. B. auf alle Koordinaten von sämtlichen „Gitterpunkten" des $R'_{2n+2}$ verschieden ist. Wir betrachten im $R'_{2n+2}$ jetzt die Fundamentalparallelepipede $R$, welche von den „Ebenen"

$$\left.\begin{aligned} u_\nu &= a_\nu + g_\nu \\ v_\nu &= b_\nu + \frac{\sqrt{m}}{\lambda} h_\nu \end{aligned}\right\} (\nu = 1, 2, \ldots, n), \qquad \begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} + k_1 g_{n+1} \\ v_{n+1} &= b_{n+1} + \frac{\sqrt{m}}{\lambda} k_2 h_{n+1} \end{aligned}$$

begrenzt werden; hierin sind $k_1$ und $k_2$ vorgegebene natürliche Zahlen, während $g_1, g_2, \ldots, g_n, g_{n+1}, h_1, h_2, \ldots, h_n, h_{n+1}$ unabhängig voneinander alle ganzen rationalen Zahlen durchlaufen. Jedes der $R$ hat offenbar das Volumen

$$W = \left(\frac{\sqrt{m}}{\lambda}\right)^{n+1} k_1 k_2, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

und enthält genau

$$k = k_1 k_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

„Gitterpunkte" des $R'_{2n+2}$, denn bei festen $g_\nu$ und $h_\nu$ genügen genau $k_1 k_2$ Systeme von ganzen rationalen Zahlen

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$$

den Ungleichungen

$$\left.\begin{aligned} a_\nu + g_\nu &< x_\nu + \frac{\chi}{\lambda} y_\nu - \alpha_\nu x_{n+1} + \left(\frac{\beta_\nu \sqrt{m}}{\lambda} - \alpha_\nu \frac{\chi}{\lambda}\right) y_{n+1} < a_\nu + g_\nu + 1 \\ b_\nu + \frac{\sqrt{m}}{\lambda} h_\nu &< \frac{\sqrt{m}}{\lambda} y_\nu - \beta_\nu x_{n+1} - \left(\frac{\alpha_\nu \sqrt{m}}{\lambda} + \beta_\nu \frac{\chi}{\lambda}\right) y_{n+1} < b_\nu + \frac{\sqrt{m}}{\lambda} (h_\nu + 1) \end{aligned}\right\} (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

$$a_{n+1} + k_1 g_{n+1} < x_{n+1} + \frac{\chi}{\lambda} y_{n+1} < a_{n+1} + k_1 (g_{n+1} + 1)$$

$$b_{n+1} + \frac{\sqrt{m}}{\lambda} k_2 h_{n+1} < \frac{\sqrt{m}}{\lambda} y_{n+1} < b_{n+1} + \frac{\sqrt{m}}{\lambda} k_2 (h_{n+1} + 1).$$

Sei jetzt im Raum $R'_{2n+2}$ der Körper $S'$ durch die Ungleichungen

$$|u_{n+1} + i v_{n+1}| < a$$

$$|u_\nu + i v_\nu| \, t + \frac{2^{n+1} n^n |u_{n+1} + i v_{n+1}|}{(n+1)^{n+1} a} < 1 \text{ für } \frac{|u_{n+1} + i v_{n+1}|}{a} \leqq \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n$$

$$\frac{|u_{n+1}+iv_{n+1}|}{a}\{|u_\nu+iv_\nu|\,t+1\}^n<1 \text{ für } \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n<\frac{|u_{n+1}+iv_{n+1}|}{a}<1$$

$$(\nu=1,2,\ldots,n),$$

wo zur Abkürzung

$$a=t^n\gamma_{n,m}^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

gesetzt wurde, definiert. Das Volumen $V$ dieses Körpers $S'$ ist gleich

$$\left.\begin{aligned} V=J_1+J_2 \text{ mit } J_1&=\iint\limits_{G_1}\ldots\int du_1\ldots du_{n+1}\,dv_1\ldots dv_{n+1},\\ J_2&=\iint\limits_{G_2}\ldots\int du_1\ldots du_{n+1}\,dv_1\ldots dv_{n+1},\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

wo $G_1$ der Teil des Körpers $S'$ mit

$$\frac{|u_{n+1}+iv_{n+1}|}{a}\leqq\left(\frac{n+1}{2n}\right)^n, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

und $G_2$ der Teil des Körpers $S'$ mit

$$\left(\frac{n+1}{2n}\right)^n<\frac{|u_{n+1}+iv_{n+1}|}{a}<1 \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

bedeutet. Offenbar ist

$$J_1=\iint\limits_{C_{n+1}}du_{n+1}\,dv_{n+1}\prod_{\nu=1}^{n}\iint\limits_{C_\nu}du_\nu\,dv_\nu,$$

wo $C_\nu$ $(\nu=1,2,\ldots,n)$ bei festen $u_{n+1}$, $v_{n+1}$ die durch die Ungleichung

$$|u_\nu+iv_\nu|<\frac{1}{t}\left(1-\frac{2^{n+1}n^n|u_{n+1}+iv_{n+1}|}{(n+1)^{n+1}a}\right)$$

definierte Kreisfläche in der $(u_\nu, v_\nu)$-Ebene bedeutet, und $C_{n+1}$ die Kreisfläche (13) der $(u_{n+1}, v_{n+1})$-Ebene bezeichnet. Deshalb ist

$$J_1=\iint\limits_{C_{n+1}}\frac{\pi^n}{t^{2n}}\left(1-\frac{2^{n+1}n^n|u_{n+1}+iv_{n+1}|}{(n+1)^{n+1}a}\right)^{2n}du_{n+1}\,dv_{n+1}$$

$$=\frac{2\pi^{n+1}}{t^{2n}}\int\limits_0^{\left(\frac{n+1}{2n}\right)^n a}\left(1-\frac{2^{n+1}n^n\varrho}{(n+1)^{n+1}a}\right)^{2n}\varrho\,d\varrho=\frac{\pi^{n+1}a^2(n+1)^{2(n+1)}}{t^{2n}\,2^{2n+1}\,n^{2n}}\int\limits_0^{\frac{2}{n+1}}(1-v)^{2n}\,v\,dv$$

$$=\frac{\pi^{n+1}a^2(n+1)^{2n+2}}{t^{2n}\,2^{2n+1}\,n^{2n}}\int\limits_{\frac{n-1}{n+1}}^{1}(1-w)\,w^{2n}\,dw$$

$$= \frac{\pi^{n+1} a^2 (n+1)^{2n+2}}{t^{2n} 2^{2n+1} n^{2n}} \left\{ \frac{1}{2n+1} w^{2n+1} - \frac{1}{2n+2} w^{2n+2} \right\}_{\frac{n-1}{n+1}}^{1}$$

$$= \frac{\pi^{n+1} a^2 (n+1)^{2n+1}}{t^{2n} 2^{2n+2} n^{2n} (2n+1)} \left\{ 1 - (5n+3) \frac{(n-1)^{2n+1}}{(n+1)^{2n+2}} \right\}.$$

Ferner ist

$$J_2 = \iint\limits_{C^*_{n+1}} du_{n+1}\, dv_{n+1} \prod_{\nu=1}^{n} \iint\limits_{C^*_\nu} du_\nu\, dv_\nu,$$

wo $C^*_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ bei festen $u_{n+1}, v_{n+1}$ die durch die Ungleichung

$$| u_\nu + i v_\nu | < \frac{1}{t} \left( \frac{a^{\frac{1}{n}}}{| u_{n+1} + i v_{n+1} |^{\frac{1}{n}}} - 1 \right)$$

definierte Kreisscheibe in der $(u_\nu, v_\nu)$-Ebene bedeutet und $C^*_{n+1}$ die Kreisringfläche (14) in der $(u_{n+1}, v_{n+1})$-Ebene bezeichnet. Deshalb ist

$$J_2 = \iint\limits_{C^*_{n+1}} \frac{\pi^n}{t^{2n}} \left( \frac{a^{\frac{1}{n}}}{| u_{n+1} + i v_{n+1} |^{\frac{1}{n}}} - 1 \right)^{2n} du_{n+1}\, dv_{n+1}$$

$$= \frac{2\pi^{n+1}}{t^{2n}} \int\limits_{\left(\frac{n+1}{2n}\right)^n a}^{a} \left( \frac{a^{\frac{1}{n}}}{\varrho^{\frac{1}{n}}} - 1 \right)^{2n} \varrho\, d\varrho = \frac{2\pi^{n+1} a^2 n}{t^{2n}} \int\limits_0^{\frac{n-1}{n+1}} \frac{v^{2n}}{(1+v)^{2n+1}}\, dv$$

$$= \frac{2\pi^{n+1} a^2 n}{t^{2n}} \int\limits_0^{\frac{n-1}{2n}} \frac{w^{2n}}{1-w}\, dw = \frac{2\pi^{n+1} a^2 n}{t^{2n}} \sum_{\mu=2n+1}^{\infty} \frac{1}{\mu} \left( \frac{n-1}{2n} \right)^\mu$$

$$= \frac{2\pi^{n+1} a^2 n}{t^{2n}} \left\{ \frac{6n^2+3n-1}{4n(n+1)(2n+1)} \left( \frac{n-1}{2n} \right)^{2n+1} + \sum_{\mu=2n+3}^{\infty} \frac{1}{\mu} \left( \frac{n-1}{2n} \right)^\mu \right\}$$

$$= \frac{\pi^{n+1} a^2 (n+1)^{2n+1}}{t^{2n} 2^{2n+2} n^{2n} (2n+1)} \left\{ \frac{6n^2+3n-1}{n} \frac{(n-1)^{2n+1}}{(n+1)^{2n+2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2^{2n+3} n^{2n+1} (2n+1)}{(n+1)^{2n+1}} \sum_{\mu=2n+3}^{\infty} \frac{1}{\mu} \left( \frac{n-1}{2n} \right)^\mu \right\}.$$

Wegen (12) ist also

$$V = J_1 + J_2 = \frac{\pi^{n+1} a^2 (n+1)^{2n+1}}{t^{2n} 2^{2n+2} n^{2n} (2n+1)} \left\{ 1 + \frac{(n-1)^{2n+2}}{(n+1)^{2n+1} n} + \right.$$

$$\left. + \frac{2^{2n+3} n^{2n+1} (2n+1)}{(n+1)^{2n+1}} \sum_{\mu=2n+3}^{\infty} \frac{1}{\mu} \left( \frac{n-1}{2n} \right)^\mu \right\} = \frac{a^2}{t^{2n}} \left( \frac{\sqrt{m}}{\lambda} \right)^{n+1} \frac{1}{\gamma^{2n}_{n,m}}$$

wegen (3); also gilt wegen (11)

$$V = \left(\frac{\sqrt{m}}{\lambda}\right)^{n+1}.$$

Nach Satz 2 gibt es nun zu jedem vorgegebenen positiven $\varepsilon$ im Raum $R'_{2n+2}$ eine Translation

$$z_\nu = u_\nu + d_\nu, \quad w_\nu = v_\nu + e_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n+1) \quad . \quad . \quad (15)$$

durch die der Körper $S'$ in eine solche Lage versetzt wird, dass die Anzahl der „Gitterpunkte" des $R'_{2n+2}$, welche zu $S'$ oder zu einer $\varepsilon$-Umgebung eines Randpunktes von $S'$ gehören, grösser als $\frac{Vk}{W}$, also wegen (9) und (10) grösser als

$$\left(\frac{\sqrt{m}}{\lambda}\right)^{n+1} k_1 k_2 \left\{\left(\frac{\sqrt{m}}{\lambda}\right)^{n+1} k_1 k_2\right\}^{-1} = 1$$

ist. Es gibt also wenigstens zwei solche „Gitterpunkte"

$$\left.\begin{array}{l} (z'_1, z'_2, \ldots, z'_n, z'_{n+1}, w'_1, w'_2, \ldots, w'_n, w'_{n+1}), \\ (z''_1, z''_2, \ldots, z''_n, z''_{n+1}, w''_1, w''_2, \ldots, w''_n, w''_{n+1}); \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

die ihnen vermöge der Translation (15) entsprechenden Punkte seien mit

$(u'_1, u'_2, \ldots, u'_n, u'_{n+1}, v'_1, v'_2, \ldots, v'_n, v'_{n+1})$, $(u''_1, u''_2, \ldots, u''_n, u''_{n+1}, v''_1, v''_2, \ldots, v''_n, v''_{n+1})$

und die ihnen vermöge (8) entsprechenden Gitterpunkte des $R_{2n+2}$ mit

$$\left.\begin{array}{l} (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, x'_{n+1}, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n, y'_{n+1}), \\ (x''_1, x''_2, \ldots, x''_n, x''_{n+1}, y''_1, y''_2, \ldots, y''_n, y''_{n+1}) \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

angedeutet. Wir nehmen jetzt die in der Bemerkung 1 beim Satz 1 genannte Zahl $\delta > 0$ beliebig, aber ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\leqq \frac{1}{2}$ an, und wir wählen ein positives $\varepsilon'$ mit

$$\left.\begin{array}{c} 2(1 + 6\varepsilon') < t \text{ und } \varepsilon' < \frac{1}{100}\delta, \text{ also mit} \\ 1 < \left(\frac{1+\varepsilon'}{1-\varepsilon'}\right)^{\frac{1}{n}} \leqq \frac{1+\varepsilon'}{1-\varepsilon'} < 1 + 3\varepsilon'. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Dann ist in der obigen Aussage, wo man offenbar $\varepsilon = \varepsilon(\varepsilon') > 0$ nur hinreichend klein zu wählen hat, folgendes enthalten:

$$|u'_{n+1} + i v'_{n+1}| < a(1 + \varepsilon'), \; |u''_{n+1} + i v''_{n+1}| < a(1 + \varepsilon') \quad . \quad . \quad (19)$$

und entweder

$$\left.\begin{array}{l} |u'_\nu + i v'_\nu|\, t + \frac{2^{n+1} n^n |u'_{n+1} + i v'_{n+1}|}{(n+1)^{n+1} a} < 1 + \varepsilon' \text{ mit} \\ \frac{|u'_{n+1} + i v'_{n+1}|}{a} < \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n (1 + \varepsilon') \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \end{array}\right\} \quad . \quad (20)$$

oder

$$\left.\begin{aligned}&\frac{|u'_{n+1}+i v'_{n+1}|}{a}\{|u'_\nu+i v'_\nu|\,t+1\}^n<1+\varepsilon' \text{ mit}\\ &\left(\frac{n+1}{2n}\right)^n(1-\varepsilon')<\frac{|u'_{n+1}+i v'_{n+1}|}{a}<1+\varepsilon' \quad (\nu=1,2,\ldots,n),\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

sowie entweder

$$\left.\begin{aligned}&|u''_\nu+i v''_\nu|\,t+\frac{2^{n+1}\,n^n\,|u''_{n+1}+i v''_{n+1}|}{(n+1)^{n+1}\,a}<1+\varepsilon' \text{ mit}\\ &\frac{|u''_{n+1}+i v''_{n+1}|}{a}<\left(\frac{n+1}{2n}\right)^n(1+\varepsilon') \quad (\nu=1,2,\ldots,n),\end{aligned}\right\}. \tag{22}$$

oder

$$\left.\begin{aligned}&\frac{|u''_{n+1}+i v''_{n+1}|}{a}\{|u''_\nu+i v''_\nu|\,t+1\}^n<1+\varepsilon' \text{ mit}\\ &\left(\frac{n+1}{2n}\right)^n(1-\varepsilon')<\frac{|u''_{n+1}+i v''_{n+1}|}{a}<1+\varepsilon' \quad (\nu=1,2,\ldots,n).\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Wir behaupten nun zunächst, dass für $\nu=1,2,\ldots,n$

$$|u'_\nu-u''_\nu+i(v'_\nu-v''_\nu)|<1 \quad \ldots\ldots \tag{24}$$

gilt. Dabei sind drei Fälle zu unterscheiden:

*A.* Es gelten (20) und (22), also erst recht

$$|u'_\nu+i v'_\nu|<\frac{1+\varepsilon'}{t},\ |u''_\nu+i v''_\nu|<\frac{1+\varepsilon'}{t}.$$

Hieraus folgt wegen (18) sofort (24).

*B.* Es gelten (21) und (23). Also

$$|u'_\nu+i v'_\nu|\,t<\left\{\frac{(1+\varepsilon')\,a}{|u'_{n+1}+i v'_{n+1}|}\right\}^{\frac{1}{n}}-1<\left(\frac{1+\varepsilon'}{1-\varepsilon'}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{2n}{n+1}-1<1+6\,\varepsilon'$$

wegen (18), und gleichfalls

$$|u''_\nu+i v''_\nu|\,t<1+6\,\varepsilon'$$

d.h. (man beachte (18)):

$$|u'_\nu-u''_\nu+i(v'_\nu-v''_\nu)|<\frac{2(1+6\,\varepsilon')}{t}<1.$$

*C.* Es gelten (20) und (23) [11]. Wie im Fall *A*, bzw. im Fall *B* ist nun

$$|u'_\nu + i v'_\nu| < \frac{1+\varepsilon'}{t}, \qquad |u''_\nu + i v''_\nu| < \frac{1+6\varepsilon'}{t},$$

d.h. (man beachte (18))

$$|u'_\nu - u''_\nu + i(v'_\nu - v''_\nu)| < \frac{2+7\varepsilon'}{t} < 1,$$

so dass (24) jetzt in allen Fällen gezeigt worden ist.

Wir behaupten nun, dass die Annahme

$$u'_{n+1} = u''_{n+1},\ v'_{n+1} = v''_{n+1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

zu einem Widerspruch mit (24) führt. Denn weil aus (15) folgen würde

$$z'_{n+1} = z''_{n+1},\ w'_{n+1} = w''_{n+1},$$

wäre für wenigstens ein $\nu$ $(1 \leqq \nu \leqq n)$ mindestens eine der beiden Ungleichungen $z'_\nu \neq z''_\nu$, $w'_\nu \neq w''_\nu$ erfüllt; daher würde wegen (15) für dieses $\nu$ wenigstens eine der beiden Ungleichungen $u'_\nu \neq u''_\nu$, $v'_\nu \neq v''_\nu$ gelten, also wegen (25) und (8)

$$|u'_\nu - u''_\nu + i(v'_\nu - v''_\nu)| \geqq Min\left(1, \frac{\sqrt{m}}{\lambda}\right) \geqq 1 \text{ für } m \neq 3. \quad . \quad (26)$$

Für $m = 3$ gilt (man beachte $\chi = 1, \lambda = 2$) für jenes $\nu$

$$|u'_\nu - u''_\nu + i(v'_\nu - v''_\nu)| \geqq Min\,(1, \sqrt{\tfrac{3}{4} + (\tfrac{1}{2})^2}) = 1. \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Sowohl (26) als (27) steht mit (24) im Widerspruch, und damit haben wir (25) widerlegt. Es gilt also wenigstens eine der beiden Ungleichungen

$$u'_{n+1} \neq u''_{n+1},\ v'_{n+1} \neq v''_{n+1},$$

aus der man mit Hilfe von (8) die Richtigkeit von (26) und (27), jetzt aber für $\nu = n+1$ folgert. Wir haben also gezeigt:

$$|u'_{n+1} - u''_{n+1} + i(v'_{n+1} - v''_{n+1})| \geqq 1. \quad \ldots\ldots \quad (28)$$

Wir setzen jetzt

$$\left.\begin{aligned} X_\nu &= x'_\nu - x''_\nu,\ Y_\nu = y'_\nu - y''_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n+1), \\ P_\nu &= X_\nu + \frac{\chi + i\sqrt{m}}{\lambda} Y_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \\ Q &= X_{n+1} + \frac{\chi + i\sqrt{m}}{\lambda} Y_{n+1}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (29)$$

---

[11]) Der Fall, dass (21) und (22) gelten, führt man durch Vertauschung von $(u'_1, \ldots, u'_n, u'_{n+1}, v'_1, \ldots, v'_n, v'_{n+1})$ und $(u''_1, \ldots, u''_n, u''_{n+1}, v''_1, \ldots, v''_n, v''_{n+1})$ auf diesen Fall zurück.

Wegen (15) und (8) (man beachte, dass die Gitterpunkte (17) in (8) eingesetzt, die Punkte (16) liefern) gilt dann für $\nu = 1, 2, \ldots, n$

$$\left.\begin{aligned} u'_\nu - u''_\nu + i(v'_\nu - v''_\nu) &= z'_\nu - z''_\nu + i(w'_\nu - w''_\nu) \\ &= X_\nu + \frac{\chi}{\lambda} Y_\nu - \alpha_\nu X_{n+1} + \left(\frac{\beta_\nu \sqrt{m}}{\lambda} - \alpha_\nu \frac{\chi}{\lambda}\right) Y_{n+1} \\ &\quad + i\left\{\frac{\sqrt{m}}{\lambda} Y_\nu - \beta_\nu X_{n+1} - \left(\frac{\alpha_\nu \sqrt{m}}{\lambda} + \beta_\nu \frac{\chi}{\lambda}\right) Y_{n+1}\right\} \\ &= P_\nu - \theta_\nu Q, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

sowie

$$u'_{n+1} - u''_{n+1} + i(v'_{n+1} - v''_{n+1}) = X_{n+1} + \frac{\chi}{\lambda} Y_{n+1} + i \frac{\sqrt{m}}{\lambda} Y_{n+1} = Q. \tag{31}$$

Wir zeigen jetzt die Ungleichungen:

$$1 \leqq |Q| < a(2 + \delta), \tag{32}$$

$$|P_\nu - \theta_\nu Q| < \frac{2 + \delta}{t} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{33}$$

$$|P_\nu - \theta_\nu Q|\, |Q|^{\frac{1}{n}} < \frac{a^{1/n}}{t}(1 + \delta) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{34}$$

Es folgt (32) wegen (31) sofort aus (28) und (19), weil wegen (18) $2\varepsilon' < \delta$ ist.

Zum Beweise von (33) und (34) unterscheiden wir drei Fälle.

**Fall 1.** Es mögen (20) und (22) gelten. Subtraktion liefert wegen (30) und (31) für $\nu = 1, 2, \ldots, n$

$$|P_\nu - \theta_\nu Q|\, t + \frac{2^{n+1} n^n |Q|}{(n+1)^{n+1} a} < 2 + 2\varepsilon' < 2 + \delta, \tag{35}$$

also erst recht (33). Weil ferner das geometrische Mittel von $n + 1$ absoluten Beträgen höchstens gleich ihrem arithmetischen Mittel ist, hat man für $\nu = 1, 2, \ldots, n$

$$|P_\nu - \theta_\nu Q|^n t^n \frac{2^{n+1} n^{n+1} |Q|}{(n+1)^{n+1} a} \leqq \left\{\frac{n |P_\nu - \theta_\nu Q|\, t + \dfrac{2^{n+1} n^{n+1} |Q|}{(n+1)^{n+1} a}}{n+1}\right\}^{n+1}.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung ist wegen (35) höchstens gleich

$$\left(\frac{n}{n+1}(2 + 2\varepsilon')\right)^{n+1};$$

wir haben also für $\nu = 1, 2, \ldots, n$

$$|P_\nu - \theta_\nu Q|^n t^n \frac{|Q|}{a} < (1 + \varepsilon')^{n+1} < (1 + 3\varepsilon')^{\frac{n+1}{2}} < (1 + \delta)^n$$

wegen (18), so dass auch (34) gezeigt worden ist.

**Fall 2.** Es mögen (20) und (23) [11]) gelten. Also ist

$$|u'_\nu + i v'_\nu|\, t < 1 - \frac{2^{n+1} n^n\, |u'_{n+1} + i v'_{n+1}|}{(n+1)^{n+1} a} + \varepsilon',$$

$$|u''_\nu + i v''_\nu|\, t < -1 + \left\{ \frac{(1+\varepsilon')\, a}{|u''_{n+1} + i v''_{n+1}|} \right\}^{\frac{1}{n}},$$

d.h. wegen (30) für $\nu = 1, 2, \ldots, n$

$$|P_\nu - \theta_\nu Q|\, t < \left\{ \frac{(1+\varepsilon')\, a}{|u''_{n+1} + i v''_{n+1}|} \right\}^{\frac{1}{n}} - \frac{2^{n+1} n^n\, |u'_{n+1} + i v'_{n+1}|}{(n+1)^{n+1} a} + \varepsilon'. \quad (36)$$

Wegen (23) folgt also sogleich

$$|P_\nu - \theta_\nu Q|\, t < \left(\frac{2n}{n+1}\right) \left(\frac{1+\varepsilon'}{1-\varepsilon'}\right)^{\frac{1}{n}} + \varepsilon' < 2 + 7\varepsilon' < 2 + \delta$$

wegen (18), d.h., es gilt (33).

Wir setzen nun

$$\frac{|u'_{n+1} + i v'_{n+1}|}{a} = p \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n (1+\varepsilon');$$

$$\frac{|u''_{n+1} + i v''_{n+1}|}{a} = q \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n (1-\varepsilon'),$$

so dass wegen (20), (23) und (18)

$$0 \leqq p < 1 \quad , \quad 1 < q < \frac{1+\varepsilon'}{1-\varepsilon'} \left(\frac{2n}{n+1}\right)^n < 2^{n+1} \quad . \; . \; . \quad (37)$$

und ferner wegen (31)

$$\frac{|Q|}{a} \leqq (p+q) \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n (1+\varepsilon') \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (38)$$

ist. Statt (36) können wir dann schreiben ($\nu = 1, 2, \ldots, n$)

$$\left.\begin{aligned} |P_\nu - \theta_\nu Q|\, t &< \frac{2n}{(n+1)\, q^{\frac{1}{n}}} \left(\frac{1+\varepsilon'}{1-\varepsilon'}\right)^{\frac{1}{n}} - \frac{2p}{n+1}(1+\varepsilon') + \varepsilon' \\ &< \frac{2n}{(n+1)\, q^{\frac{1}{n}}} - \frac{2p}{n+1} + 7\varepsilon' \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (39)$$

wegen $q > 1$ und (18). Wegen

$$\frac{1}{q^{1/n}} - \frac{1}{(p+q)^{1/n}} \leqq \frac{p}{n\, q^{1+\frac{1}{n}}}$$

(Mittelwertsatz) hat man

$$\frac{2n}{(n+1)q^{1/n}} \leqq \frac{2p}{(n+1)q^{1+\frac{1}{n}}} + \frac{2n}{(n+1)(p+q)^{\frac{1}{n}}} < \frac{2p}{n+1} + \frac{2n}{(n+1)(p+q)^{1/n}}$$

(man beachte $q > 1$), daher

$$\frac{2n}{(n+1)\,q^{\frac{1}{n}}} - \frac{2p}{n+1} < \frac{2n}{(n+1)(p+q)^{\frac{1}{n}}}.$$

Aus (39) geht also hervor

$$\frac{|Q|^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}}\,|P_\nu - \theta_\nu Q|\,t < \frac{2n\,|Q|^{\frac{1}{n}}}{(n+1)(p+q)^{\frac{1}{n}}\,a^{\frac{1}{n}}} + 7\,\frac{|Q|^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}}\,\varepsilon' \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

also wegen (38)

$$< (1+\varepsilon')^{\frac{1}{n}} + 7\,(p+q)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{n+1}{2n}\right)(1+\varepsilon')^{\frac{1}{n}}\,\varepsilon' < 1 + \varepsilon' + 7.8(1+\varepsilon')\varepsilon' < 1 + \delta$$

wegen (37) und (18), so dass auch (34) gezeigt worden ist.

**Fall 3.** Es mögen (21) und (23) gelten. Dann ist also

$$|u'_\nu + i v'_\nu|\,t < \left\{\frac{(1+\varepsilon')\,a}{|u'_{n+1} + i v'_{n+1}|}\right\}^{\frac{1}{n}} - 1;$$

$$|u''_\nu + i v''_\nu|\,t < \left\{\frac{(1+\varepsilon')\,a}{|u''_{n+1} + i v''_{n+1}|}\right\}^{\frac{1}{n}} - 1 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

so dass wegen (30) gilt

$$\left.\begin{aligned} |P_\nu - \theta_\nu Q|\,t < \Bigg\{ &\left(\frac{a}{|u'_{n+1} + i v'_{n+1}|}\right)^{\frac{1}{n}} + \\ + &\left(\frac{a}{|u''_{n+1} + i v''_{n+1}|}\right)^{\frac{1}{n}} \Bigg\} (1+\varepsilon')^{\frac{1}{n}} - 2 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Aus (40) folgt wegen (21) und (23) sofort:

$$|P_\nu - \theta_\nu Q|\,t < \frac{4n}{n+1}\left(\frac{1+\varepsilon'}{1-\varepsilon'}\right)^{\frac{1}{n}} - 2 < 2 + 12\,\varepsilon' < 2 + \delta$$

(wegen (18)), so dass (33) schon gezeigt worden ist. Wir setzen jetzt (siehe (21) und (23))

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{|u'_{n+1}+iv'_{n+1}|}{a}=p_1\left(\dfrac{n+1}{2n}\right)^n(1-\varepsilon'),\ \dfrac{|u''_{n+1}+iv''_{n+1}|}{a}=q_1\left(\dfrac{n+1}{2n}\right)^n(1-\varepsilon')\\ \text{mit } p_1>1,\ q_1>1,\ p_1\geqq q_1\end{array}\right\}\quad (41)$$

(die letzte Ungleichung kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden). Wegen (32) und (41) folgt dann sofort

$$0<\frac{|Q|}{a}\leqq(p_1+q_1)\left(\frac{n+1}{2n}\right)^n(1-\varepsilon')\quad .\ .\ .\ .\quad (42)$$

und aus (40) und (31) geht für $\nu=1,2,\ldots,n$ hervor

$$|P_\nu-\theta_\nu Q|\,t<\left(\frac{1}{p_1^{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{q_1^{\frac{1}{n}}}\right)\left(\frac{2n}{n+1}\right)\left(\frac{1+\varepsilon'}{1-\varepsilon'}\right)^{\frac{1}{n}}-2.\ .\quad (43)$$

Wir bemerken noch, dass aus (32) folgt

$$0<\frac{|Q|}{a}<2+\delta<3.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad (44)$$

Nach dem Mittelwertsatz haben wir

$$\frac{1}{p_1^{\frac{1}{n}}}-\frac{1}{(p_1+q_1)^{\frac{1}{n}}}\leqq\frac{q_1}{n\,p_1^{1+\frac{1}{n}}}\leqq\frac{1}{n\,q_1^{\frac{1}{n}}}$$

(wegen $p_1\geqq q_1$) und also wegen $q_1>1$ und (42)

$$\frac{1}{p_1^{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{q_1^{\frac{1}{n}}}\leqq\frac{1}{(p_1+q_1)^{\frac{1}{n}}}+\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{q_1^{\frac{1}{n}}}<$$

$$<\frac{a^{\frac{1}{n}}}{|Q|^{\frac{1}{n}}}\left(\frac{n+1}{2n}\right)(1-\varepsilon')^{\frac{1}{n}}+\frac{n+1}{n},$$

so dass aus (43) für $\nu=1,2,\ldots,n$ hervorgeht

$$|P_\nu-\theta_\nu Q|\,t<\frac{a^{\frac{1}{n}}}{|Q|^{\frac{1}{n}}}(1+\varepsilon')^{\frac{1}{n}}+2\left(\frac{1+\varepsilon'}{1-\varepsilon'}\right)^{\frac{1}{n}}-2<\frac{a^{\frac{1}{n}}}{|Q|^{\frac{1}{n}}}(1+\delta)$$

wegen (18) und (44).

Wir haben nun bei beliebigem positivem $\delta$ die Existenz eines Systems von ganzen Zahlen $P_1, P_2, \ldots, P_n$, $Q$ aus $K(i\sqrt{m})$ mit (32) (33), (34) und damit nach der Bemerkung 1 beim Satz 1 (man beachte (11)) die Richtigkeit dieses Satzes gezeigt.