Mathematics. — *Elemente der intuitionistischen Funktionentheorie.* (Vierte Mitteilung) [1]). *Der* WEIERSTRASS*sche Unbestimmtheitssatz.* By M. J. BELINFANTE. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of April 26, 1941.)

Der vorliegende Teil meiner Untersuchung [1]) enthält den Beweis für die intuitionistischen Uebertragungen des WEIERSTRASSschen Unbestimmtheitssatzes [2]), für den Fundamentalsatz der Algebra und für eine von BROUWER herrührende, intuitionistische Ergänzung, die im Beweis des WEIERSTRASSschen Satzes Anwendung findet.

§ 1. Fundamentalsatz der Algebra.

Die Funktion $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ hat n Nullstellen.

Beweis. Setzen wir $M = 2\,(1 + \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|)$, so gilt für $|z| \geqq M$:

$$|f(z) - z^n| < \tfrac{1}{2}\,|z^n|, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

mithin:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{|z|=M} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = n.$$

Folglich hat $f(z)$ nach dem Hauptsatz der dritten Mitteilung n Nullstellen im Innern des Kreises $|z| = M$ und wegen (1) hat sie keine Nullstellen ausserhalb dieses Kreises.

§ 2. Intuitionistische Ergänzung des Fundamentalsatzes. [3])

Falls $a_k \neq 0$ ist, so hat die Funktion $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a^n$ wenigstens $n - k$ Nullstellen.

Beweis. Sei $|a_k| > \alpha > 0$, wobei $\alpha < 1$ gewählt werden darf.

Wir setzen $M = \frac{4}{\alpha}(1 + \sum\limits_{k+1}^{n} |a_i|)$ und haben *entweder*:

$$\sum_{0}^{k-1} |a_i|\, M^{n-i} < \tfrac{1}{4}\,\alpha\, M^{n-k}$$

oder:

$$\sum_{0}^{-} |a_i|\, M^{n-i} > \tfrac{1}{8}\,\alpha\, M^{n-k}.$$

---

[1]) Vgl. diese Proceedings, Bd. **44**, S. 173, 276, 420.

[2]) Diese Uebertragungen wurden schon mitgeteilt in Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **34**, 1395—1397 (1931).

[3]) L. E. J. BROUWER. Intuitionistische Ergänzung des Fundamentalsatzes der Algebra. Proc. Kon. Akad v. Wetensch., Amsterdam, **27**, 631—634 (1924).

Im ersten Fall ist für $|z| = M$ offenbar $|f(z) - a_k z^{n-k}| < \frac{1}{2} |a_k z^{n-k}|$, mithin:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{|z|=M} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = n-k.$$

Folglich hat $f(z)$ in diesem Fall $n-k$ Nullstellen im Innern des Kreises $|z| = M$. Im zweiten Fall gibt es ein $a_l \neq 0$ mit $0 \leqq l < k$. Ist $l = 0$, so folgt die Behauptung sofort aus dem Fundamentalsatz. Ist $l > 0$, so wiederholen wir das Beweisverfahren mit l statt k. Nach höchstens k-maliger Wiederholung folgt also die Behauptung unseres Satzes.

§ 3. **Satz I.** *Es sei $f(z)$ eine ganze transzendente Funktion, d.h. es sei $f(z)$ überall regulär und es existiere zu jedem positivem A ein ganzes $n > A$ derart, dass $f^n(0) \neq 0$ ist. Es seien weiter zwei positive Zahlen $\varepsilon < 1$ und R und eine komplexe Zahl w beliebig vorgelegt. Alsdann lässt sich ein solches z_1 mit $|z_1| \geqq R$ bestimmen, dass $|f(z_1) - w| < \varepsilon$ ist.*

Beweis. Wie aus der Betrachtung von $F(z) = f(Rz) - w$ ersichtlich, können wir ohne wesentliche Beschränkung $R = 1$ und $w = 0$ setzen. Sei R_1 eine positive Zahl > 1. Es ist entweder $|f(z_1)| < \varepsilon$ für wenigstens einen Punkt z_1 in dem Ring $1 \leqq |z| \leqq R_1$, oder $|f(z)| > \frac{1}{2}\varepsilon$ für jeden Punkt dieses Ringes. Nur den letzten Fall brauchen wir weiter zu betrachten. Sei:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{|z|=R_1} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = m \geqq 0.$$

Falls $m > 0$ ist, bezeichnen wir das Nullstellenpolynom [4]) von $f(z)$ in dem Kreise $|z| = R_1$ mit $P(z)$; sonst setzen wir $P(z) = 1$. Alsdann ist $\frac{f(z)}{P(z)}$ innerhalb des Kreises $|z| = R_1$ regulär und $\neq 0$ [4]), und es gilt dasselbe für die Funktion $\frac{P(z)}{f(z)}$, die wir mit $h(z)$ bezeichnen. Insbesondere ist also $h(0) \neq 0$.

Wir bestimmen folgenderweise entweder ein solches $p > 0$, dass $h^{m+p}(0) \neq 0$ ist, oder ein solches z_1, dass $|f(z_1)| < \varepsilon$ ist. Sei μ eine solche positive Zahl, dass $|P(z)| < \mu |z^m|$ ist, sobald z, dem absoluten Betrage nach, grösser als Eins genommen wird. Wir wählen $n > m$ derart, dass $f^n(0) \neq 0$ ist. Wegen:

$$P^n(0) = h^n(0) f(0) + \binom{n}{1} h^{n-1}(0) f'(0) + \ldots + h(0) f^n(0) = 0,$$

gibt es eine von Null entfernte Ableitung $h^k(0)$. Falls $k \leqq m$ ist, so

[4]) Vgl. den Hauptsatz der dritten Mitteilung, diese Proceedings, Bd. **44**, S. 420.

bestimmen wir nach dem Satz von § 2 eine Nullstelle x der Funktion $h(0)+\sum_{1}^{m}\frac{z^j h^j(0)}{j!}$. Sei nun $R_2=R_1+|x|$. Es ist *entweder*: $|f(z_1)|<\varepsilon$ für ein gewisses z_1 in dem Ring $R_1 \leqq |z| \leqq R_2$, *oder*: $|f(z)|>\frac{1}{2}\varepsilon$ für jeden Punkt des Ringes $R_1\leqq|z|\leqq R_2$. Wir brauchen nur den zweiten Fall zu betrachten. In diesem Fall ist $h(z)$ regulär für jedes $|z|\leqq R_2$. Da $h(x)=\sum_{m+1}^{\infty}\frac{x^j h^j(0)}{j!}\neq 0$ ist, lässt sich $p>0$ so bestimmen, dass $h^{m+p}(0)\neq 0$ ist. Sei $|h^{m+p}(0)|>\alpha>0$ (I) und $R_3=R_2+\sqrt[p]{\frac{2\mu(m+p)!}{\alpha\varepsilon}}$ (II) [5].
Wir zeigen nun, dass die Ungleichung $|f(z)|>\frac{1}{2}\varepsilon$ nicht für jeden Punkt des Ringes $R_2\leqq|z|\leqq R_3$ erfüllt sein kann und dass sich folglich ein solches z_1 mit $R_2\leqq|z_1|\leqq R_3$ bestimmen lässt, dass $|f(z_1)|<\varepsilon$ ist. Denn wäre $|f(z)|>\frac{1}{2}\varepsilon$ in $R_2\leqq|z|\leqq R_3$, so wäre $h(z)$ dort regulär und dem absoluten Betrage nach $<\frac{2\mu R_3^m}{\varepsilon}$. Wegen (II) wäre dann:

$$|h^{m+p}(0)|=\left|\frac{(m+p)!}{2\pi\sqrt{-1}}\int\limits_{|z|=R_3}\frac{h(z)\,dz}{z^{m+p+1}}\right|<\alpha,$$

entgegen der Ungleichung (I).

§ 4. Satz von WEIERSTRASS.

Es sei $f(z)$ regulär für $0<|z-z_0|<R$ und es sei z_0 eine wesentlich singuläre Stelle, d.h. zu jeder vorgelegten positiven Zahl A existiere eine solche ganze Zahl $m>A$, dass der Koeffizient b_m der für $0<|z-z_0|<R$ gültigen LAURENT*schen Entwicklung*:

$$f(z)=\sum_{0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{1}^{\infty}b_n(z-z_0)^{-n}$$

$\neq 0$ ist. Es seien weiter zwei positive Zahlen ε und $r<R$ und eine komplexe Zahl w beliebig vorgelegt. Alsdann lässt sich ein z_1 mit $0<|z_0-z_1|<r$ so bestimmen, dass $|f(z_1)-w|<\varepsilon$ ist.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir $R=1$, $z_0=0$ und $w=0$. Für $0<|z|<1$ hat man:

$$f(z)=\sum_{1}^{\infty}a_n z^n+\sum_{0}^{\infty}b_n z^{-n}=\varphi(z)+\psi\left(\frac{1}{z}\right),$$

wo $\varphi(z)$ im Innern des Kreises $|z|=1$ regulär und $\psi\left(\frac{1}{z}\right)$ bzw. $\psi(\zeta)$ eine ganze transzendente Funktion von $\frac{1}{z}$ bzw. ζ ist. Bestimmt man nun $r_1<r$ derart, dass $|\varphi(z)|<\frac{1}{2}\varepsilon$ bleibt, sobald $|z|<r_1$ genommen wird

[5]) In dem Fall, dass schon $k>m$ ist, sei $R_2=R_1$.

und wählt man dann nach dem vorigen Satz ζ_1 mit $|\zeta_1| > \frac{1}{r_1}$ derart, dass $|\psi(\zeta_1)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ ist, so hat man $\left|f\left(\frac{1}{\zeta_1}\right)\right| < \varepsilon$ und $0 < \left|\frac{1}{\zeta_1}\right| < r$, w.z.b.w.

§ 5. **Umkehrung des WEIERSTRASSschen Satzes.**

Es sei $f(z)$ regulär für $0 < |z - z_0| < R$ und es seien zwei positive Zahlen $r < R$ und ε und eine komplexe Zahl w derart gegeben, dass für $0 < |z - z_0| < r$ $|f(z) - w| > \varepsilon$ ist. Alsdann ist der Punkt z_0 entweder regulär oder ein Pol von bestimmter Ordnung, d.h. für die Koeffizienten b_n der LAURENTschen Entwicklung:

$$f(z) = \sum_1^\infty a_n (z-z_0)^n + \sum_0^\infty b_n (z-z_0)^{-n}$$

lässt sich $m \geqq 0$ so bestimmen, dass $b_m \neq 0$, jedoch $b_{m+i} = 0$ ist.

Bemerkung. Dass nicht jeder Pol eine bestimmte Ordnung hat, erkennt man an Beispielen wie $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{a}{z^2}$, wo a eine Zahl ist, für die weder $a = 0$ noch $a \neq 0$ festgestellt ist.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $R = 1$, $z_0 = 0$ und $w = 0$. Wir setzen wieder:

$$f(z) = \sum_1^\infty a_n z^n + \sum_0^\infty b_n z^{-n} = \varphi(z) + \psi\left(\frac{1}{z}\right)$$

und bestimmen $r_1 < r$, sodass für $|z| \leqq r_1$:

$$|\varphi(z)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon, \text{ mithin: } \left|\psi\left(\frac{1}{z}\right)\right| > \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (I)$$

ist. Sei nun

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{|z| = \frac{1}{r_1}} \frac{\psi'(z)\,dz}{\psi(z)} = m.$$

Wir behaupten, dass $z = 0$ ein regulärer Punkt oder ein Pol m-ter Ordnung ist, je nachdem $m = 0$ oder $m > 0$ ist. Denn sei $P(z)$ das Nullstellenpolynom von $\psi(z)$ innerhalb des Kreises $|z| = \frac{1}{r_1}$. (Falls $m = 0$ ist, sei $P(z)$ die Zahl Eins.) Sei μ eine solche positive Zahl, dass:

$$|P(z)| < \mu\,|z^m| \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (II)$$

bleibt, sobald $|z| > \frac{1}{r_1}$ ist. Setzen wir dann $h(z) = \frac{P(z)}{\psi(z)}$, so gilt für jedes ganze p und jedes positive η: $|h^{m+p}(0)| < \eta$. Setzt man nämlich $\varrho = \frac{1}{r_1} + \sqrt[p]{\frac{2\mu(m+p)!}{\varepsilon\eta}}$, so folgt aus (I) und (II):

$$|h^{m+p}(0)| = \left| \frac{(m+p)!}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{|z|=\varrho} \frac{h(z)\,dz}{z^{m+p+1}} \right| < \eta.$$

Es ist also $h^{m+p}(0) = 0$ für jedes $p > 0$. Falls nun $m = 0$ ist, so ist $h(z)$, folglich auch $\psi\left(\frac{1}{z}\right)$ konstant, mithin $f(z)$ in der Tat regulär im Punkte $z = 0$. Falls dagegen $m > 0$ ist, so kann die Ungleichung $h^p(0) \neq 0$ nicht für $p > 0$ erfüllt sein, denn sonst könnte man nach dem Satz von § 2 eine Nullstelle von $h(z)$ bestimmen, während jedoch $h(z) \neq 0$ für jedes z gilt. Auch in diesem Fall ist $h(z)$ also konstant. Es ist mithin $\psi(z)$ ein Polynom m-ten Grades in z und der Punkt $z = 0$ ein Pol m-ter Ordnung van $f(z)$, w.z.b.w.
