Mathematics. — *Neue Integraldarstellungen für* WHITTAKER*sche Funktionen.* (Fünfte Mitteilung). Von C. S. MEIJER. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of April 26, 1941.)

§ 14. Ich setze jetzt

$\beta = \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m$, $\varkappa = \frac{3}{2}k - \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}$ und $\lambda = -\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}m$ in (62),
$\beta = \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m$, $\varkappa = -\frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}$ und $\lambda = -\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}m$ in (64),
$\beta = \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m$, $\varkappa = -\frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}$ und $\lambda = \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}m$ in (64),
$\beta = \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m$, $\varkappa = \frac{3}{2}k - \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}$ und $\lambda = -\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}m$ in (66),
$\beta = \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m$, $\varkappa = \frac{3}{2}k - \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}$ und $\lambda = \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}m$ in (66),
$\beta = -\frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m$, $\varkappa = \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}$ und $\lambda = \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}m$ in (68),
$\beta = -\frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m$, $\varkappa = \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}$ und $\lambda = -\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}m$ in (68),
$\beta = -\frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m$, $\varkappa = -\frac{3}{2}k - \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}$ und $\lambda = \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}m$ in (69),
$\beta = -\frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m$, $\varkappa = -\frac{3}{2}k - \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}$ und $\lambda = -\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}m$ in (69),
$\beta = -\frac{3}{2}k - \frac{1}{2}m$, $\varkappa = \frac{3}{2}k - \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}$ und $\lambda = \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}m$ in (70),
$\beta = -\frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m$, $\varkappa = \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}$ und $\lambda = \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}m$ in (71),
$\beta = -\frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m$, $\varkappa = \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}$ und $\lambda = -\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}m$ in (71),
$\beta = -\frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m$, $\varkappa = -\frac{3}{2}k - \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}$ und $\lambda = \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}m$ in (72),
$\beta = -\frac{3}{2}k + \frac{1}{2}m$, $\varkappa = -\frac{3}{2}k - \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}$ und $\lambda = -\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}m$ in (72);

ferner setze ich wieder $\zeta = z^2$ und $v = u^2$ und in (64) und (66) noch $\psi = 2\varphi$.

Die gewonnenen Ergebnisse lauten mit Rücksicht auf (88), (93), (94), (95), (90), (91), (92) und (89)

$$W_{k,m}(z^2) = \frac{2\sqrt{\pi}\, z^{1+2k} e^{-\frac{1}{2}z^2} \Gamma(1-2k)\,\Gamma(1-k+m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)\,\Gamma(\frac{1}{2}-k-m)}$$

$$\times \int_0^{\infty e^{-i \arg z}} u^{-k-m} e^{\frac{1}{2}u^2} W_{\frac{3}{2}k-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}m}(u^2)\, J^2_{-k-m}(zu)\, du$$

(wo $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{3}{4}\pi$ und $\Re(\frac{1}{2}-k \pm m) > 0$),

$$W_{k,m}(z^2) = \frac{4\sqrt{\pi}\, z^{1+2k} e^{-\frac{1}{2}z^2} \Gamma(1-2k)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)\,\Gamma(\frac{1}{2}-k-m)\,\Gamma(1-k-m)}$$

$$\times \int_0^{\infty e^{i\varphi}} u^{-k-m} e^{-\frac{1}{2}u^2} M_{-\frac{3}{2}k+\frac{1}{2}m+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}m}(u^2)\, I_{-k-m}(zu)\, K_{-k-m}(zu)\, du$$

(wo $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{3}{4}\pi$ und $\Re(\frac{1}{2}-k \pm m) > 0$),

$$\left.\begin{aligned} W_{k,m}(z^2) &= \frac{z^{1+2k}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\, \Gamma(-k-m)\, \Gamma(\frac{1}{2}+k+m)\, \Gamma(1-k+m)}{\sqrt{\pi}\, \Gamma(\frac{1}{2}-k+m)} \\ &\times \int_0^{\infty e^{i\varphi}} u^{-k-m}\, e^{-\frac{1}{2}u^2}\, M_{-\frac{3}{2}k+\frac{1}{2}m+\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}k+\frac{1}{2}m}(u^2)\, \{I^2_{k+m}(zu) - I^2_{-k-m}(zu)\}\, du \end{aligned}\right\} \quad (161)$$

(wo $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{3}{4}\pi$, $|\Re(k+m)| < 1$ und $\Re(\frac{1}{2}-k+m) > 0$),

$$W_{k,m}(z^2) = \frac{\sqrt{\pi}\, z^{1+2k}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\, \Gamma(\frac{1}{2}+k+m)\, \Gamma(1-2k)}{2i\, \Gamma(\frac{1}{2}-k+m)\, \Gamma(1-k-m)}$$

$$\times \int_B u^{-k-m}\, e^{\frac{1}{2}u^2}\, M_{\frac{3}{2}k-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2},\, -\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}m}(u^2)\, H^{(1)}_{k+m}(zu)\, H^{(2)}_{k+m}(zu)\, du$$

(wo $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{3}{4}\pi$ und $\Re(\frac{1}{2}-k+m) > 0$),

$$\left.\begin{aligned} W_{k,m}(z^2) &= \frac{\sqrt{\pi}\, z^{1+2k}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\, \Gamma(\frac{1}{2}+k+m)\, \Gamma(1-k+m)}{2i\, \Gamma(\frac{1}{2}-k+m)\, \Gamma(1+k+m)} \\ &\times \int_B u^{-k-m}\, e^{\frac{1}{2}u^2}\, M_{\frac{3}{2}k-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}k+\frac{1}{2}m}(u^2)\, H^{(1)}_{k+m}(zu)\, H^{(2)}_{k+m}(zu)\, du \end{aligned}\right\} \quad (162)$$

(wo $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{3}{4}\pi$ und $\Re(\frac{1}{2}-k+m) > 0$),

$$W_{k,m}(z^2) = -\frac{2\sqrt{\pi}\, z^{1-2k}\, e^{\frac{1}{2}z^2}\, \Gamma(1+2k)}{\Gamma(1+k-m)}.$$

$$\times \int_0^{\infty e^{-i\arg z}} u^{k-m}\, e^{-\frac{1}{2}u^2}\, M_{\frac{3}{2}k+\frac{1}{2}m+\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}k-\frac{1}{2}m}(u^2)\, J_{k-m}(zu)\, Y_{k-m}(zu)\, du$$

(wo $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$, $\Re(\frac{1}{2}+k-m) > 0$ und $\Re(1+k+m) > 0$),

$$\left.\begin{aligned} W_{k,m}(z^2) &= \frac{z^{1-2k}\, e^{\frac{1}{2}z^2}\, \Gamma(k-m)\, \Gamma(1+k+m)}{\sqrt{\pi}} \\ &\times \int_0^{\infty e^{-i\arg z}} u^{k-m}\, e^{-\frac{1}{2}u^2}\, M_{\frac{3}{2}k+\frac{1}{2}m+\frac{1}{2},\, -\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}m}(u^2)\, \{J^2_{m-k}(zu) - J^2_{k-m}(zu)\}\, du \end{aligned}\right\} \quad (163)$$

(wo $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$, $|\Re(k-m)| < 1$ und $\Re(1+k+m) > 0$),

$$W_{k,m}(z^2) = \frac{2 z^{1-2k}\, e^{\frac{1}{2}z^2}\, \Gamma(1+2k)}{\pi^{\frac{3}{2}}\, i\, \Gamma(1+k-m)}$$

$$\times \int_C u^{k-m}\, e^{\frac{1}{2}u^2}\, M_{-\frac{3}{2}k-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}k-\frac{1}{2}m}(u^2)\, K^2_{k-m}(zu)\, du$$

(wo $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$ und $\Re(1+k+m) > 0$),

$$\left.\begin{aligned} W_{k,m}(z^2) &= \frac{2\,z^{1-2k}\,e^{\frac{1}{2}z^2}\,\Gamma(1+k+m)}{\pi^{\frac{3}{2}}\,i\,\Gamma(1-k+m)} \\ &\times \int\limits_C u^{k-m}\,e^{\frac{1}{2}u^2}\,M_{-\frac{3}{2}k-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}m}(u^2)\,K_{k-m}^2(zu)\,du \end{aligned}\right\} \quad . \qquad (164)$$

(wo $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$ und $\Re(1+k+m) > 0$),

$$\left.\begin{aligned} M_{k,m}(z^2) &= \frac{2\sqrt{\pi}\,z^{1-2k}\,e^{\frac{1}{2}z^2}\,\Gamma(1+2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}+k+m)} \\ &\times \int\limits_0^\infty u^{k+m}\,e^{-\frac{1}{2}u^2}\,W_{\frac{3}{2}k-\frac{1}{2}m+\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}m}(u^2)\,J_{k+m}^2(zu)\,du \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \qquad (165)$$

(wo $z \neq 0$ und $\Re(\frac{1}{2}+k+m) > 0$),

$$\begin{aligned} M_{k,m}(z^2) &= \frac{2\sqrt{\pi}\,z^{1-2k}\,e^{\frac{1}{2}z^2}\,\Gamma(1+2m)\,\Gamma(1+2k)}{\Gamma(\frac{1}{2}+k+m)\,\Gamma(1+k-m)} \\ &\times \int\limits_0^{\infty e^{-i\arg z}} u^{k-m}\,e^{-\frac{1}{2}u^2}\,M_{\frac{3}{2}k+\frac{1}{2}m+\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}m}(u^2)\,J_{k-m}(zu)\,J_{m-k}(zu)\,du \end{aligned}$$

(wo $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$, $\Re(1+k-m) > 0$ und $\Re(\frac{1}{2}+k+m) > 0$),

$$\left.\begin{aligned} M_{k,m}(z^2) &= \frac{2\sqrt{\pi}\,z^{1-2k}\,e^{\frac{1}{2}z^2}\,\Gamma(1+2m)\,\Gamma(1+k+m)}{\Gamma(\frac{1}{2}+k+m)\,\Gamma(1-k+m)} \\ &\times \int\limits_0^{\infty e^{-i\arg z}} u^{k-m}\,e^{-\frac{1}{2}u^2}\,M_{\frac{3}{2}k+\frac{1}{2}m+\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}m}(u^2)\,J_{m-k}^2(zu)\,du \end{aligned}\right\} \qquad (166)$$

(wo $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$, $\Re(1-k+m) > 0$ und $\Re(\frac{1}{2}+k+m) > 0$),

$$\begin{aligned} M_{k,m}(z^2) &= \frac{2\,z^{1-2k}\,e^{\frac{1}{2}z^2}\,\Gamma(1+2m)\,\Gamma(1+2k)}{\sqrt{\pi}\,i\,\Gamma(\frac{1}{2}+k+m)\,\Gamma(1+k-m)} \\ &\times \int\limits_C u^{k-m}\,e^{\frac{1}{2}u^2}\,M_{-\frac{3}{2}k-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}m}(u^2)\,I_{m-k}(zu)\,K_{m-k}(zu)\,du \end{aligned}$$

(wo $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$ und $\Re(\frac{1}{2}+k+m) > 0$),

$$\left.\begin{aligned} M_{k,m}(z^2) &= \frac{2\,z^{1-2k}\,e^{\frac{1}{2}z^2}\,\Gamma(1+2m)\,\Gamma(1+k+m)}{\sqrt{\pi}\,i\,\Gamma(\frac{1}{2}+k+m)\,\Gamma(1-k+m)} \\ &\times \int\limits_C u^{k-m}\,e^{\frac{1}{2}u^2}\,M_{-\frac{3}{2}k-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}m}(u^2)\,I_{m-k}(zu)\,K_{m-k}(zu)\,du \end{aligned}\right\} \qquad (167)$$

(wo $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$ und $\Re(\frac{1}{2}+k+m) > 0$).

Die Formeln (161), (162), (163), (164), (165) und (167) sind Verallgemeinerungen bezw. von (141), (148), (146), (149), (147) und (153). Mit Rücksicht auf (113), (112), (114), (115) und (116) sieht man nämlich leicht ein, dass die Relationen (161), (162), (163), (164), (165) und (167) für $k=0$ nach einiger Reduktion in (141), (148), (146), (149), (147) und (153) übergehen; Formel (147) kann auch aus (166) mit $k=0$ abgeleitet werden.

§ 15. Nimmt man $\beta=\frac{1}{2}$, $\varkappa=k$ und $\lambda=m$ in (69) und ersetzt man ζ durch z^2 und v durch u^2, so erhält man mit Rücksicht auf (106)

$$W_{k,m}(z^2)=\frac{2^{-2k-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)}{\sqrt{\pi}\,i\,\Gamma(1+2m)}\int\limits_C u^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}(z-u)^2}M_{k,m}(u^2)\,W_{2k+\frac{1}{2},2m}(2zu)\,du;$$

diese Beziehung gilt für $z\neq 0$, $|\arg z|<\frac{1}{4}\pi$ und $\Re(k)<\frac{1}{4}$.

Die Substitutionen: $\beta=\frac{1}{2}$, $\varkappa=k-1$, $\lambda=m$; $\beta=-\frac{1}{2}$, $\varkappa=k-1$, $\lambda=m$; $\beta=-\frac{1}{2}$, $\varkappa=k-2$, $\lambda=m$; $\beta=0$, $\varkappa=k-\frac{1}{2}$, $\lambda=m+\frac{1}{2}$; $\beta=0$, $\varkappa=k-\frac{3}{2}$, $\lambda=m+\frac{1}{2}$; $\beta=0$, $\varkappa=k-\frac{1}{2}$, $\lambda=m-\frac{1}{2}$; $\beta=0$, $\varkappa=k-\frac{3}{2}$, $\lambda=m-\frac{1}{2}$ in (69) liefern analoge Formeln. Relation (69) mit $\beta=0$, $\varkappa=k-\frac{1}{2}$, $\lambda=m+\frac{1}{2}$, $\zeta=z^2$ und $v=u^2$ ergibt z. B.

$$W_{k,m}(z^2)=\frac{2^{-2k}\Gamma(\frac{3}{2}-k+m)}{\sqrt{\pi}\,i\,\Gamma(2+2m)}\int\limits_C u^{-1}e^{\frac{1}{2}(z-u)^2}M_{k-\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}(u^2)\,W_{2k,2m+\frac{1}{2}}(2zu)\,du;$$

hierin ist $z\neq 0$, $|\arg z|<\frac{1}{4}\pi$ und $\Re(k)<\frac{1}{2}$.

§ 16. Wegen (75) und (105) hat man

$$G^{2,2}_{2,4}\left(\tfrac{1}{4}w^2\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{4}+\frac{1}{2}n,\ \frac{3}{4}+\frac{1}{2}n\\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}+\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}\nu,\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}\nu\end{matrix}\right)$$

$$=2^{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}n}w^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}\nu}G^{2,2}_{2,4}\left(\tfrac{1}{4}w^2\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\nu+\frac{1}{4}n,\ \frac{3}{4}+\frac{1}{4}\nu+\frac{1}{4}n\\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\nu-\frac{1}{4}n,\ -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\nu-\frac{1}{4}n,\ \frac{3}{4}-\frac{1}{4}\nu+\frac{1}{4}n,\ \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\nu+\frac{1}{4}n\end{matrix}\right)$$

$$=\frac{2^{\nu+\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(-n)}{\Gamma(\nu-n)}w^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}w}M_{-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}n,\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}(w).$$

Aus (63) mit $\zeta=\frac{1}{2}z^2$, $v=\frac{1}{2}u^2$, $k=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}n$, $m=\frac{1}{4}$, $\beta=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}\nu$, $\varkappa=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\nu$ und $\lambda=\frac{1}{4}$ folgt also mit Rücksicht auf (111)

$$D_n(z)=\frac{z^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}\nu}}{\Gamma(\nu-n)}\int\limits_0^\infty u^{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}n-1}e^{-\frac{1}{4}(z+u)^2}D_\nu(u)\,M_{-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}n,\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}(zu)\,du; \quad (168)$$

hierin ist $z\neq 0$ und ν beliebig mit $\Re(\nu-n)>0$.

Auf analoge Weise findet man, wenn man $\zeta = \frac{1}{2} z^2$, $v = \frac{1}{2} u^2$, $k = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} n$, $m = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} n - \frac{1}{2} \nu$, $\varkappa = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \nu$ und $\lambda = \frac{1}{4}$ substituiert in (63)

$$D_n(z) = -\frac{z^{\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\nu + 1}}{(n+1)\,\Gamma(\nu - n - 2)} \int_0^\infty u^{\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}n - 2}\, e^{-\frac{1}{4}(z+u)^2}\, D_\nu(u)\, M_{-\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}n,\, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}n - \frac{3}{2}}(zu)\, du; \qquad (169)$$

in dieser Relation ist $z \neq 0$ und ν beliebig mit $\Re(\nu - n - 2) > 0$.

Für $\nu = -n$ geht (168) wegen (112) in (138) über; setzt man $\nu = -n$ in (169), so erhält man (139).

Nun folgt aus (111) und (116)

$$D_0(u) = e^{-\frac{1}{4}u^2}, \qquad D_1(u) = u\, e^{-\frac{1}{4}u^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (170)$$

Hieraus geht hervor mit Rücksicht auf (114), dass Formel (120) ein Spezialfall sowohl von (168) wie von (169) ist; man findet nämlich (120), wenn man $\nu = 0$ in (168) oder $\nu = 1$ in (169) setzt. Nimmt man $\nu = 1$ in (168), so bekommt man

$$D_n(z) = \frac{z^{\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}}\, e^{-\frac{1}{4}z^2}}{\Gamma(1-n)} \int_0^\infty u^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n}\, e^{-\frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{2}zu}\, M_{-\frac{1}{2}n - \frac{1}{4},\, -\frac{1}{4}n}(zu)\, du; \qquad (171)$$

diese Beziehung gilt für $z \neq 0$ und $\Re(n) < 2$.

§ 17. Setzt man $\zeta = 2z^2$, $v = 2u^2$, $\beta = \lambda = \frac{1}{4}$ und $\varkappa = \frac{3}{4} + k$ in (70), so findet man infolge (111) und (107), falls $z \neq 0$ und $\Re(\frac{1}{2} + m) > 0$ ist,

$$M_{k,m}(2z^2) = \frac{2^{-k-\frac{1}{2}}\, e^{z^2}\, \Gamma(\frac{1}{2} - k + m)}{\sqrt{\pi}\, \Gamma(1+2m)} \int_0^\infty u^{-1}\, e^{-u^2}\, D_{2k+1}(2u)\, M_{k,m}(4izu)\, M_{k,m}(-4izu)\, du. \qquad (172)$$

Diese Beziehung ist eine Erweiterung von (147). Es gilt nämlich [44])

$$M_{0,m}(2iw)\, M_{0,m}(-2iw) = 2^{1+4m}\, w\, \Gamma^2(1+m)\, J_m^2(w);$$

berücksichtigt man nun noch (112) und (170), so sieht man leicht ein, dass (172) für $k = 0$ in (147) übergeht.

Nimmt man $\beta = \lambda = \frac{1}{4}$, $\varkappa = k - \frac{3}{4}$, $\zeta = z^2$, $v = u^2$ und $\psi = 2\varphi$ in (66), so bekommt man wegen (109)

$$W_{k,m}(z^2) = \frac{2\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\, \Gamma(\frac{3}{2} - k)}{\pi i} \int_B u^{-\frac{3}{2}}\, e^{\frac{1}{2}u^2}\, M_{k - \frac{3}{4},\, \frac{1}{4}}(u^2)\, W_{k,m}(2izu)\, W_{k,m}(-2izu)\, du; \qquad (173)$$

hierin ist $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{3}{4}\pi$ und $\Re(\frac{1}{2} - k) > 0$.

---

[44]) [15], 633, Formel (53).

Der Ansatz $\beta=\lambda=\frac{1}{4}$, $\varkappa=-k-\frac{3}{4}$, $\zeta=z^2$ und $v=u^2$ in (69) und in (72) liefert infolge (110) und (108)

$$W_{k,m}(z^2)=\frac{2e^{\frac{1}{2}z^2}\Gamma(\frac{3}{2}+k)}{\pi i}\int\limits_C u^{-\frac{3}{2}}e^{\frac{1}{2}u^2}M_{-k-\frac{3}{4},\frac{1}{4}}(u^2)\,W_{k,m}(2zu)\,W_{-k,m}(2zu)\,du \qquad (174)$$

(wo $z\neq 0$, $|\arg z|<\frac{1}{4}\pi$ und $\Re(\frac{3}{2}+k)>0$)

und

$$M_{k,m}(z^2)=\frac{2e^{\frac{1}{2}z^2}\Gamma(\frac{3}{2}+k)}{\pi i}\int\limits_C u^{-\frac{3}{2}}e^{\frac{1}{2}u^2}M_{-k-\frac{3}{4},\frac{1}{4}}(u^2)\,M_{k,m}(2zu)\,W_{-k,m}(2zu)\,du \qquad (175)$$

(wo $z\neq 0$, $|\arg z|<\frac{1}{4}\pi$ und $\Re(\frac{1}{2}+k)>0$).

Man findet analoge Relationen, wenn man in (66), (69) und (72) $\beta=-\lambda=\frac{1}{4}$ (statt $\beta=\lambda=\frac{1}{4}$) substituiert.

Nun ist [45])

$$W_{0,m}(2iw)\,W_{0,m}(-2iw)=\tfrac{1}{2}\pi w\,H_m^{(1)}(w)\,H_m^{(2)}(w).$$

Nimmt man $k=0$ in (173) und ersetzt man z durch $z\sqrt{2}$ und u durch $u\sqrt{2}$, so erhält man also wegen (113) und (115)

$$K_m(z^2)=\frac{\pi e^{-z^2}}{i}\int\limits_E u\,e^{2u^2}H_m^{(1)}(2zu)\,H_m^{(2)}(2zu)\,du;$$

diese Beziehung habe ich in § 11 auf andere Weise abgeleitet (siehe (148)).

Die mit (148) verwandten Formeln (149) und (153) sind Spezialfälle bezw. von (174) und (175); man sieht nämlich leicht ein mit Rücksicht auf (113), (112) und (115), dass die Relationen (174) und (175) mit $k=0$ in (149) bezw. (153) übergeführt werden können.

§ 18. Wegen (75) und (108) hat man

$$G_{2,4}^{3,1}\left(\tfrac{1}{4}w^2\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2}n+\frac{3}{4},-\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}\\ \lambda-\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\lambda-\frac{1}{4}\end{matrix}\right)=\frac{2^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda-\frac{1}{2}n)}{w^{\frac{3}{2}}\Gamma(1+2\lambda)}M_{-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2},\lambda}(w)\,W_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\lambda}(w).$$

Aus (64) mit $k=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}n$, $m=\frac{1}{4}$, $\beta=-\frac{1}{4}$, $\varkappa=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n$, $\zeta=\frac{1}{2}z^2$, $v=\frac{1}{2}u^2$ und $\psi=2\varphi$ ergibt sich also mit Rücksicht auf (111)

$$\left.\begin{aligned}D_n(z)&=\frac{e^{-\frac{1}{4}z^2}\Gamma(\lambda-\frac{1}{2}n)\,\Gamma(1+\lambda-\frac{1}{2}n)}{2^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}z\,\Gamma(-n)\,\Gamma^2(1+2\lambda)}\\ &\times\int\limits_0^{\infty e^{i\varphi}}u^{-1}e^{-\frac{1}{4}u^2}M_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n,\lambda}(\tfrac{1}{2}u^2)\,M_{-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2},\lambda}(zu)\,W_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\lambda}(zu)\,du;\end{aligned}\right\}\qquad(176)$$

hierin ist $z\neq 0$, $|\arg z|<\frac{3}{4}\pi$, $\Re(n)<0$ und λ beliebig mit $\Re(\frac{1}{2}+\lambda)>0$.

---

[45]) [15], 633, Formel (54).

Analoge Beziehungen kommen zum Vorschein, wenn man

$k=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}n,\ m=\frac{1}{4},\ \beta=-\frac{1}{4},\ \varkappa=\frac{1}{2}n-\frac{1}{2},\ \zeta=\frac{1}{2}z^2,\ v=\frac{1}{2}u^2$ und $\psi=2\varphi$ in (66)

oder

$k=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}n,\ m=\frac{1}{4},\ \beta=-\frac{1}{4},\ \varkappa=-\frac{1}{2}n-1,\ \zeta=\frac{1}{2}z^2$ und $v=\frac{1}{2}u^2$ in (69)

setzt.

Diese Substitutionen ergeben infolge (111), (109) und (110)

$$D_n(z)=\frac{e^{-\frac{1}{4}z^2}\,\Gamma(\lambda-\frac{1}{2}n)\,\Gamma(-\lambda-\frac{1}{2}n)\,\Gamma(1+\lambda-\frac{1}{2}n)}{2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\,\pi i z\,\Gamma(-n)\,\Gamma(1+2\lambda)}$$

$$\times\int\limits_B u^{-1}\,e^{\frac{1}{4}u^2}\,M_{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2},\lambda}(\tfrac{1}{2}u^2)\,W_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\lambda}(izu)\,W_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\lambda}(-izu)\,du$$

(wo $z\neq 0$, $|\arg z|<\frac{3}{4}\pi$, $\Re(n)<0$ und λ beliebig)

und

$$D_n(z)=\frac{2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\,e^{\frac{1}{4}z^2}\,\Gamma(\frac{3}{2}+\lambda+\frac{1}{2}n)}{\sqrt{\pi}\,iz\,\Gamma(1+2\lambda)}\int\limits_C u^{-1}\,e^{\frac{1}{4}u^2}\,M_{-\frac{1}{2}n-1,\lambda}(\tfrac{1}{2}u^2)\,W_{\frac{1}{2}n,\lambda}(zu)\,W_{-\frac{1}{2}n,\lambda}(zu)\,du \tag{177}$$

(wo $z\neq 0$, $|\arg z|<\frac{1}{4}\pi$, $\Re(n+3)>0$ und λ beliebig).

Für $\lambda=-\frac{1}{2}n$ geht (176) wegen (114) und (116) in

$$D_n(z)=\frac{z^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{1}{4}z^2}}{\Gamma(1-n)}\int\limits_0^{\infty e^{i\varphi}} u^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n}\,e^{-\frac{1}{4}u^2-\frac{1}{2}zu}\,M_{-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}n}(zu)\,du$$

über, und diese Relation kann leicht auf (171) zurückgeführt werden.

Der Spezialfall mit $\lambda=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}$ von (177) liefert infolge (115) und (116) die für jedes $z\neq 0$ geltende Beziehung

$$D_n(z)=\frac{2^{-\frac{1}{2}}\,z^{-\frac{1}{2}n-1}\,e^{\frac{1}{4}z^2}}{\sqrt{\pi}\,i}\int\limits_E u^{\frac{1}{2}n+1}\,e^{\frac{1}{4}u^2-\frac{1}{2}zu}\,W_{\frac{1}{2}n,\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}(zu)\,du.$$

§ 19. Wegen (75) und (108) hat man

$$G^{3,1}_{2,4}\left(w^2\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2}+k,\ \frac{1}{2}-k-2m\\ \frac{1}{2}-m,\ m,\ -m,\ -3m\end{matrix}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}\,w^{-2m-1}\,\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)}{\Gamma(1+4m)}\,M_{-k-m,2m}(2w)\,W_{k+m,2m}(2w).$$

Aus (64) mit $\beta = \frac{1}{4} - 2m$, $\varkappa = \frac{3}{4} - k$, $\lambda = \frac{1}{4} + m$, $\zeta = z^2$, $v = u^2$ und $\psi = 2\varphi$ folgt also

$$\left.\begin{aligned} W_{k,m}(z^2) &= \frac{2\sqrt{\pi}\, z^{-2m}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\, \Gamma(\frac{3}{2} - k + m)}{\Gamma(\frac{1}{2} - k - m)\, \Gamma(\frac{3}{2} + 2m)\, \Gamma(1 + 4m)} \\ &\times \int_0^{\infty e^{i\varphi}} u^{2m-\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}u^2}\, M_{\frac{3}{4}-k,\frac{1}{4}+m}(u^2)\, M_{-k-m,2m}(2zu)\, W_{k+m,2m}(2zu)\, du; \end{aligned}\right\} \quad (178)$$

hierin ist $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{3}{4}\pi$, $\Re(\frac{1}{4} + m) > 0$ und $\Re(\frac{1}{2} - k - m) > 0$.

Die Substitutionen

$\beta = -\frac{3}{4} - 2m$, $\varkappa = \frac{3}{4} - k$ und $\lambda = \frac{1}{4} + m$ in (64), . . (179)

$\beta = \frac{1}{4} - 2m$, $\varkappa = k - \frac{3}{4}$ und $\lambda = \frac{1}{4} + m$ in (66), . . . (180)

$\beta = \frac{1}{4} - 2m$, $\varkappa = k - \frac{3}{4}$ und $\lambda = -\frac{1}{4} - m$ in (66),

$\beta = -\frac{3}{4} - 2m$, $\varkappa = k - \frac{3}{4}$ und $\lambda = \frac{1}{4} + m$ in (66),

$\beta = -\frac{3}{4} - 2m$, $\varkappa = k - \frac{3}{4}$ und $\lambda = -\frac{1}{4} - m$ in (66),

$\beta = \frac{1}{4} - 2m$, $\varkappa = -k - \frac{3}{4}$ und $\lambda = \frac{1}{4} + m$ in (69), . . (181)

$\beta = \frac{1}{4} - 2m$, $\varkappa = -k - \frac{3}{4}$ und $\lambda = -\frac{1}{4} - m$ in (69),

$\beta = -\frac{3}{4} - 2m$, $\varkappa = -k - \frac{3}{4}$ und $\lambda = \frac{1}{4} + m$ in (69),

$\beta = -\frac{3}{4} - 2m$, $\varkappa = -k - \frac{3}{4}$ und $\lambda = -\frac{1}{4} - m$ in (69),

$\beta = \frac{1}{4} - 2m$, $\varkappa = k + \frac{3}{4}$ und $\lambda = \frac{1}{4} + m$ in (70), . . (182)

$\beta = -\frac{3}{4} - 2m$, $\varkappa = k + \frac{3}{4}$ und $\lambda = \frac{1}{4} + m$ in (70),

$\beta = \frac{1}{4} + 2m$, $\varkappa = -k - \frac{3}{4}$ und $\lambda = \frac{1}{4} - m$ in (72), . . (183)

$\beta = \frac{1}{4} + 2m$, $\varkappa = -k - \frac{3}{4}$ und $\lambda = -\frac{1}{4} + m$ in (72),

$\beta = -\frac{3}{4} + 2m$, $\varkappa = -k - \frac{3}{4}$ und $\lambda = \frac{1}{4} - m$ in (72),

$\beta = -\frac{3}{4} + 2m$, $\varkappa = -k - \frac{3}{4}$ und $\lambda = -\frac{1}{4} + m$ in (72)

liefern mit (178) verwandte Formeln; die Substitutionen (179), (180), (181), (182) und (183) ergeben z. B.[46]) mit Rücksicht auf (108), (109), (110) und (107)

$$W_{k,m}(z^2) = \frac{2\sqrt{\pi}\, z^{-2m-1}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\, \Gamma(\frac{3}{2} - k + m)}{\Gamma(\frac{1}{2} - k - m)\, \Gamma(\frac{3}{2} + 2m)\, \Gamma(2 + 4m)}$$

$$\times \int_0^{\infty e^{i\varphi}} u^{2m-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}u^2}\, M_{\frac{3}{4}-k,\frac{1}{4}+m}(u^2)\, M_{-k-m-\frac{1}{2},2m+\frac{1}{2}}(2zu)\, W_{k+m+\frac{1}{2},2m+\frac{1}{2}}(2zu)\, du$$

(wo $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{3}{4}\pi$, $\Re(\frac{1}{2} + m) > 0$ und $\Re(k + m) < 0$),

[46]) Ich setze immer $\zeta = z^2$ und $v = u^2$ und in (64) und (66) überdies noch $\psi = 2\varphi$.

$$W_{k,m}(z^2) = \frac{z^{-2m} e^{-\frac{1}{2} z^2} \Gamma(\frac{3}{2} - k + m) \Gamma(\frac{1}{2} - k - 3m)}{\sqrt{\pi}\, i\, \Gamma(\frac{1}{2} - k - m) \Gamma(\frac{3}{2} + 2m)}$$

$$\times \int_B u^{2m-\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{2} u^2} M_{k-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}+m}(u^2)\, W_{k+m, 2m}(2izu)\, W_{k+m, 2m}(-2izu)\, du$$

(wo $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{3}{4}\pi$ und $\Re(\frac{1}{2} - k - m) > 0$),

$$W_{k,m}(z^2) = \frac{z^{-2m} e^{\frac{1}{2} z^2} \Gamma(\frac{3}{2} + k + m)}{\sqrt{\pi}\, i\, \Gamma(\frac{3}{2} + 2m)}$$

$$\times \int_C u^{2m-\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{2} u^2} M_{-k-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}+m}(u^2)\, W_{k-m, 2m}(2zu)\, W_{m-k, 2m}(2zu)\, du$$

(wo $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$ und $\Re(\frac{3}{2} + k - m) > 0$),

$$M_{k,m}(z^2) = \frac{2^{-4m} z^{-2m} e^{\frac{1}{2} z^2} \Gamma(\frac{1}{2} - k + 3m)}{\Gamma(1 + 4m) \Gamma(\frac{1}{2} + 2m)}$$

$$\times \int_0^\infty u^{2m-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2} u^2} W_{k+\frac{3}{4}, \frac{1}{4}+m}(u^2)\, M_{k-m, 2m}(2izu)\, M_{k-m, 2m}(-2izu)\, du$$

(wo $z \neq 0$ und $\Re(\frac{1}{4} + m) > 0$),

$$M_{k,m}(z^2) = \frac{2^{-4m} z^{2m} e^{\frac{1}{2} z^2} \Gamma(\frac{3}{2} + k - m) \Gamma(\frac{1}{2} + k + 3m)}{i\, \Gamma(\frac{1}{2} + k + m) \Gamma(\frac{1}{2} + 2m) \Gamma(\frac{3}{2} - 2m)}$$

$$\times \int_C u^{-2m-\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{2} u^2} M_{-k-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}-m}(u^2)\, M_{k+m, 2m}(2zu)\, W_{-k-m, 2m}(2zu)\, du$$

(wo $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$ und $\Re(\frac{1}{2} + k + m) > 0$).