Mathematics. — *Elemente der intuitionistischen Funktionentheorie.* (Fünfte Mitteilung) [1]. *Die intuitionistische Uebertragung des* PICARD*schen Satzes.* By M. J. BELINFANTE. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of May 31, 1941.)

Dieser Schlussteil meiner Untersuchung enthält die intuitionistische Uebertragung der PICARDschen Sätze [1], deren elementarer Beweis das Hauptziel meiner Untersuchungen über die Elemente der intuitionistischen Funktionentheorie war. Bei diesem Beweis ist der LANDAUschen Darstellung [2] auf Schritt und Tritt gefolgt. Es enthält § 1 einen Hilfssatz, § 2 den BLOCHschen Satz, § 3 den SCHOTTKYschen Satz, § 4 den kleinen PICARDschen Satz und § 5 die intuitionistische Uebertragung des grossen PICARDschen Satzes.

§ 1. **Satz A.** *Es sei $f(z)$ regulär für $|z| \leqq R$ und ebenda $|f(z)| < M$. Es sei weiter $f(0) = 0$ und $|f'(0)| \geqq \alpha > 0$. Es lässt sich dann eine nur von α, R und M abhängige, positive Konstante $\varphi = \varphi(M; \alpha R)$ derart bestimmen, dass $f(z)$ in $|z| < R$ alle Werte w annimmt, die dem absoluten Betrage nach $\leqq \varphi$ sind.*

Beweis. Wie aus der Betrachtung von $F(z) = \dfrac{f(Rz)}{Rf'(0)}$ ersichtlich, können wir uns auf den Fall $R = 1$, $f'(0) = 1$ beschränken. Es ist dann $M \geqq 1$. Nun hat man für $|z| \leqq \dfrac{1}{4M}$:

$$|f(z) - z| = \left| \sum_{2}^{\infty} \frac{z^n f^n(0)}{n!} \right| < \frac{M|z^2|}{1-|z|} \leqq \tfrac{1}{3}|z|,$$

folglich für $|z| = \dfrac{1}{4M}$: $\quad |f(z)| > \dfrac{1}{6M}$.

Mithin ist für $|w| \leqq \dfrac{1}{6M}$:

$$\int\limits_{|z|=\frac{1}{4M}} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)-w} = \int\limits_{|z|=\frac{1}{4M}} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} + \sum_{1}^{\infty} w^n \int\limits_{|z|=\frac{1}{4M}} \frac{f'(z)\,dz}{\{f(z)\}^{n+1}} = 2\pi\sqrt{-1}.$$

---

[1]) Vgl. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **44**, 173, 276, 420, 563. Von dieser fünften Mitteilung wurden die Resultate schon mitgeteilt in Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **34**, 1395—1397 (1931).

[2]) E. LANDAU, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. 2te Aufl. 1929.

Folglich lässt sich nach dem Hauptsatz der dritten Mitteilung [3]) für $|w| \leqq \frac{1}{6M}$ eine Nullstelle von $f(z) - w$ in $|z| < \frac{1}{4M}$ bestimmen. Also ist $\varphi = \frac{1}{6M}$ und im allgemeinen Fall $\varphi = \frac{a^2 R^2}{6M}$ eine Zahl mit der verlangten Eigenschaft.

§ 2. **Satz B.** *Es sei $f(z)$ regulär für $|z| \leqq 1$ und $|f'(0)| \geqq 1$. Alsdann nimmt $f(z)$ dort alle Werte eines Kreisinnern vom Radius B an, wo B eine absolute Konstante ist.*

Beweis. Wie aus der Betrachtung von $F(z) = \frac{f(z)}{f'(0)}$ ersichtlich, können wir uns auf den Fall $f'(0) = 1$ beschränken. Wir zeigen, dass die Konstante $\varphi(1; \frac{1}{4})$ von Satz A § 1 Radius eines solchen Kreisinnern K ist. Um bei einer vorgelegten Funktion $f(z)$ den Mittelpunkt w_0 von K zu bestimmen, wählen wir eine solche positive Zahl μ, dass $f'(z)$ in $|z| \leqq 1$ dem absoluten Betrage nach $< \mu$ bleibt. Weiter bestimmen wir die ganze Zahl p so, dass $\frac{\mu + \frac{1}{2}}{2^p} < 1$ ist und schliesslich wählen wir zu jeder ganzen Zahl $n \leqq p$ (inklusive Null) eine rationale Zahl M_n und eine komplexe Zahl z_n mit $|z_n| = 1 - \frac{1}{2^n}$ in solcher Weise, dass $|f'(z_n)| > M_n - \frac{1}{2}$ ist und die Beziehung $|f'(z)| \leqq M_n$ für jedes z mit $|z| = |z_n|$ (also nach Satz 7 der zweiten Mitteilung [4]) auch für jedes z mit $|z| < |z_n|$) gilt. Da $z_0 = 0$ und $f'(0) = 1$ ist, darf $M_0 = 1$ gesetzt werden. Es ist offenbar $\frac{M_p}{2^p} < 1$; mithin lässt sich ein solches $\nu < p$ bestimmen, dass:

$$\frac{M_\nu}{2^\nu} \geqq 1 > \frac{M_{\nu+1}}{2^{\nu+1}}$$

ist. Es ist dann $f(z_\nu)$ der gesuchte Mittelpunkt w_0. Denn setzen wir $g(z) = f(z + z_\nu) - f(z_\nu)$, so haben wir für $|z| \leqq \frac{1}{2^{\nu+1}}$:

$$|z + z_\nu| \leqq |z_{\nu+1}|, \text{ mithin } |f'(z + z_\nu)| \leqq M_{\nu+1} < 2^{\nu+1},$$

folglich:

$$|g(z)| = \left| \int_{z_\nu}^{z_\nu + z} f'(\zeta)\, d\zeta \right| < 1.$$

---

[3]) Vgl. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **44**, 420.

[4]) Vgl. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **44**, 285.

Es ist weiter $g(0)=0$ und $|g'(0)|=|f'(z_\nu)|>M_\nu-\frac{1}{2}\geqq 2^{\nu-1}$. Wendet man also den Satz von § 1 an auf $g(z)$ mit $M=1$, $R=\frac{1}{2^{\nu+1}}$ und $\alpha=2^{\nu-1}$, so erkennt man, dass $g(z)$ alle Werte des Kreisinnern $|w|\leqq\varphi(1;\frac{1}{4})=B$ in $|z|<\frac{1}{2^{\nu+1}}$ annimmt. Mithin nimmt die Funktion $f(z)=g(z-z_\nu)+w_0$ alle Werte des Kreisinnern $|w-w_0|\leqq B$ an und zwar in $|z-z_\nu|<\frac{1}{2^{\nu+1}}$, also in $|z|<1$.

§ 3. **Satz C_1.** *Zu jedem $\omega>1$ und jedem ϑ mit $0<\vartheta<1$ lässt sich eine solche positive Zahl $\psi(\omega;\vartheta)$ bestimmen, dass jede in $|z|\leqq 1$ reguläre Funktion $F(z)$, die dort den Bedingungen $F(z)\neq 0$, $F(z)\neq 1$ und $\frac{1}{\omega}<|F(0)|<\omega$* [5] *genügt, in $|z|\leqq\vartheta$ der Ungleichung $|F(z)|<\psi(\omega;\vartheta)$ genügt.*

Dem Beweis schicken wir einige Hilfssätze voraus.

Lemma I. *Setzt man:*

$$G=\pm\log(\sqrt{m+1}+\sqrt{m})\pm\tfrac{1}{2}n\pi\sqrt{-1}$$

(m, n ganz positiv oder Null),

so ist:

$$-e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}[e^{2G}+e^{-2G}]}=1.$$

Lemma II. *Jeder Kreis vom Radius Eins enthält wenigstens einen Punkt $G=\pm\log(\sqrt{m+1}+\sqrt{m})\pm\frac{1}{2}n\pi\sqrt{-1}$ in seinem Innern.*

Lemma III. *Es sei $f(z)$ regulär für $|z|\leqq 1$ und es gäbe in jedem Kreisinnern vom Radius Eins einen Wert, den $f(z)$ auslässt.* [6] *Es sei weiter ϑ eine positive Zahl kleiner als Eins. Alsdann gilt für jedes $|z|\leqq\vartheta$:*

$$|f'(z)|\leqq\frac{1}{(1-\vartheta)B},$$

wo B die Konstante von Satz B § 2 ist.

Beweis von Lemma III. Für jedes $|z_0|\leqq\vartheta$ gilt *entweder*:

$$|f'(z_0)|<\frac{1}{(1-\vartheta)B}\ \textit{oder:}\ |f'(z_0)|>\frac{1}{2(1-\vartheta)B}.$$

---

[5] Diese letzte Bedingung darf durch die geringere $|F(0)|<\omega$ ersetzt werden. Vgl. Satz C_2.

[6] Wir sagen, dass $f(z)$ in einem Gebiet g den Wert a auslässt, falls die Beziehung $f(z)=a$ für jedes z in g ungereimt ist.

Da im letzten Fall die Hilfsfunktion $g(z) = \dfrac{f\{z_0 + (1-\vartheta)z\}}{(1-\vartheta)f'(z_0)}$ in $|z| \leqq 1$ regulär und $g'(0) = 1$ ist, nimmt $g(z)$ dort nach Satz B § 2 alle Werte eines Kreisinnern vom Radius B an. Mithin nimmt $f(z)$ in $|z| \leqq 1$ zwar alle Werte eines gewissen Kreisinnern K vom Radius $B(1-\vartheta)|f'(z_0)|$ an, jedoch (nach Voraussetzung) *nicht* alle Werte eines mit K konzentrischen Kreisinnern vom Radius Eins und hieraus folgt sofort die Behauptung.

Beweis von Satz C_1. Durch die Beziehung:

$$f(z) = \log\left(\sqrt{\frac{\log F(z)}{2\pi\sqrt{-1}}} - \sqrt{\frac{\log F(z)}{2\pi\sqrt{-1}} - 1}\right) \quad . \; . \; . \quad (1)$$

oder:

$$F(z) = -e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}\left\{e^{2f(z)} + e^{-2f(z)}\right\}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

werden wegen $F(z) \neq 0$ und $F(z) \neq 1$ in $|z| \leqq 1$ reguläre Funktionen $f(z)$ definiert. Wegen $\dfrac{1}{\omega} < |F(0)| < \omega$ lässt sich zu jeder die Bedingungen des Satzes erfüllenden Funktion $F(z)$ eine Funktion $f(z)$ so festlegen, dass $f(0)$ dem absoluten Betrage nach kleiner als eine nur von ω abhängige, positive Zahl $\varphi(\omega)$ ist. Wenn nun G dieselbe Bedeutung hat wie in Lemma I, so ist nach Lemma I und (2), wegen $F(z) \neq 1$, $f(z) \neq G$.[7]) Nach Lemma II und III hat man also: $|f'(z)| \leqq \dfrac{1}{(1-\vartheta)B}$ für jedes $|z| \leqq \vartheta$. Mithin ist für jedes $|z| \leqq \vartheta$:

$$|f(z)| \leqq |f(0)| + \int_0^{\vartheta} |f'(z)|\, dz < \varphi(\omega) + \frac{\vartheta}{(1-\vartheta)B} \cdot \quad . \; . \quad (3)$$

Aus (2) und (3) folgert man nun leicht, dass sich eine positive, nur von ω und ϑ abhängige, Zahl $\psi(\omega, \vartheta)$ bestimmen lässt mit der Eigenschaft, dass jede die Bedingungen des Satzes erfüllende Funktion $F(z)$ für $|z| \leqq \vartheta$ absolut genommen kleiner als $\psi(\omega, \vartheta)$ bleibt, w.z.b.w.

Satz C_2. *Es gilt die Behauptung von Satz C_1 auch, falls statt $\dfrac{1}{\omega} < |F(0)| < \omega$ nur $|F(0)| < \omega$ vorausgesetzt wird.*

---

[7]) Denn für eine reguläre Funktion $F(z)$ folgt aus $F(a) \neq F(b)$, dass $a \neq b$ ist, wie aus

$$F(b) - F(a) = \sum_1^{\infty} \frac{(b-a)^n}{n!} F^n(a) \neq 0$$

ersichtlich.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\omega > 3$. Es ist entweder: $|F(0)| > \frac{1}{\omega}$ oder: $|F(0)| < \frac{2}{\omega}$. Im letzten Fall braucht man nur Satz C_1 anzuwenden auf $F_1(z) = 1 - F(z)$ mit $\omega + 1$ statt ω.

§ 4. **Satz D.** *Es sei $F(z)$ ganz und variabel und es seien a und $b \neq a$ komplexe Zahlen. Alsdann nimmt $F(z)$ wenigstens einen der Werte a und b an.*

Bemerkung. Die Aussage: "Eine ganze nicht-konstante Funktion $F(z)$ lässt entweder keinen oder nur einen Wert aus" ist nicht stichhaltend. Man erkennt dies an dem Beispiel $F(z) = e^z(1 + \alpha e^z)$, falls weder $\alpha = 0$ noch $\alpha \neq 0$ bekannt ist.

Beweis von Satz D. Wir setzen $f(z) = \frac{F(z) - a}{b - a}$ und zeigen, dass $f(z)$ wenigstens einen der Werte Eins und Null annimmt. Wir bestimmen z_0 derart, dass $f'(z_0) \neq 0$ ist. Sei $\omega > 1$ so gewählt, dass $|f(z_0)| < \omega$ ist und sei $r = \frac{2\psi(\omega; \frac{1}{2})}{|f' z_0)|}$, wo $\psi(\omega; \frac{1}{2})$ die Konstante von Satz C_2 mit $\vartheta = \frac{1}{2}$ ist. Wir setzen $n_1 = 0$, $n_2 = 1$ und wählen für $\nu = 1; 2$ ein den Kreis $|z - z_0| = r$ in seinem Innern enthaltendes Polygon L_ν, auf dessen Rande $f(z) \neq n_\nu$ ist. Sei nun $I_\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{L_\nu} \frac{f'(z)\,dz}{f(z) - n_\nu}$. Ist $I_\nu > 0$, so lässt sich nach dem Satz vom Integral der logarithmischen Ableitung eine Nullstelle von $f(z) - n_\nu$ bestimmen. Folglich brauchen wir nur zu beweisen, dass die Beziehung $I_1 = I_2 = 0$ unmöglich richtig sein kann. In diesem Fall aber wäre nach Satz VI der zweiten Mitteilung [8]) in dem Kreis $|z - z_0| = r$: $f(z) \neq 0$ und $f(z) \neq 1$. Setzen wir:

$$g(z) = f\left\{\frac{2\psi(\omega; \frac{1}{2})}{f'(z_0)} z + z_0\right\},$$

so wäre für $|z| \leqq \frac{1}{2}$, wegen $|g(0)| = |f(z_0)| < \omega$, nach Satz C_2 $|g(z)| < \psi(\omega; \frac{1}{2})$, folglich $|g'(0)| < 2\psi(\omega; \frac{1}{2})$, entgegen der Beziehung $g'(0) = 2\psi(\omega; \frac{1}{2})$.

Umkehrung von Satz D. *Eine ganze Funktion $F(z)$, die zwei von einander verschiedene Werte a und b auslässt, ist konstant.*

Beweis. Wäre $F(z_1) \neq F(z_2)$, so wäre nach Satz D entweder irgendwo $F(z) = a$ oder irgendwo $F(z) = b$, entgegen der Voraussetzung.

§ 5. **Hilfssatz.** *Es sei $f(z)$ eindeutig-regulär und variabel für $0 < |z| \leqq r$ und es sei $\psi(\omega; \frac{1}{2})$ die Konstante von Satz C_2 mit $\vartheta = \frac{1}{2}$. Es seien weiter drei komplexe Zahlen ζ_1, ζ und ζ_2 gegeben, die folgenden Bedingungen genügen:*

---

[8]) Vgl. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **44**, 284.

$$|\zeta_2| < |\zeta| < |\zeta_1| < r\,e^{-4\pi} \qquad (1)$$

$$|f(\zeta_\nu)| < \omega;\ \nu = 1, 2 \qquad (2)$$

$$|f(\zeta)| > \psi(\omega; \tfrac{1}{2}). \qquad (3)$$

Alsdann nimmt $f(z)$ in $|z| \leqq r$ wenigstens einen der beiden Werte Null und Eins an.

Beweis. Wir setzen $n_1 = 0$ und $n_2 = 1$. Wir wählen für $\nu = 1, 2$ in $|z| < r$ zwei Polygone l_ν und L_ν (l_ν innerhalb L_ν) in solcher Weise, dass der Ring

$$|\zeta_2|\,e^{-4\pi} \leqq |z| \leqq |\zeta_1|\,e^{4\pi} \qquad (C)$$

in dem von l_ν und L_ν gebildeten Polygonring liegt und dass auf dem Rande von l_ν und von L_ν die Ungleichung $f(z) \neq n_\nu$ gilt. Wir setzen weiter:

$$I_\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{L_\nu} \frac{f'(z)\,dz}{f(z) - n_\nu} - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{l_\nu} \frac{f'(z)\,dz}{f(z) - n_\nu}.$$

Falls die ganze, nicht negative Zahl $I_\nu > 0$ ist, so lässt sich nach dem Nebensatz zum Hauptsatz der dritten Mitteilung [9]) eine Nullstelle von $f(z) - n_\nu$ bestimmen. Wir brauchen also nur zu beweisen, dass die Beziehung $I_1 = I_2 = 0$ unmöglich richtig sein kann. In diesem Fall aber wäre nach einem Satz der dritten Mitteilung [10]) die Beziehung $f(z) - n_\nu \neq 0$ in dem Ring (C) erfüllt. Bestimmen wir nun für $p = 1, 2$ die in $|z| \leqq 1$ regulären Funktionen $h_p(z)$ durch die Beziehung $h_p(z) = f(\zeta_p\,e^{4\pi z})$, so wäre für $|z| \leqq 1$: $h_p(z) \neq 0$, $h_p(z) \neq 1$ und $|h_p(0)| < \omega$. Nach Satz C_2 wäre dann für $|z| \leqq \frac{1}{2}$: $|h_p(z)| < \psi(\omega; \frac{1}{2})$, folglich: $|f(z)| < \psi(\omega; \frac{1}{2})$ für jedes z mit $|z| = |\zeta_p|$, mithin (nach einem Satz der dritten Mitteilung [11])) auch für jedes z mit $|\zeta_2| < |z| < |\zeta_1|$, entgegen den Voraussetzungen (3) und (1).

Satz E_1. *Es sei $F(z)$ eindeutig-regulär für $0 < |z - z_0| < R$ und es sei der Punkt z_0 wesentlich singulär. Es seien zwei von einander entfernte komplexe Zahlen a und b und eine positive Zahl $\varrho < R$ beliebig vorgelegt. Alsdann nimmt $F(z)$ in dem Kreise $|z - z_0| = \varrho$ wenigstens einen der beiden Werte a und b an.*

Beweis. Wir setzen $f(z) = \dfrac{F(z_0 + Rz) - a}{b - a}$ und brauchen nur zu zeigen, dass $f(z)$ in dem Kreise $|z| < \dfrac{\varrho}{R} = r$ wenigstens einen der beiden Werte Eins und Null annimmt.

---

[9]) Vgl. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **44**, 425.

[10]) Nebensatz zu Satz VI der zweiten Mitteilung, Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **44**, 425.

[11]) Nebensatz zu Satz VII der zweiten Mitteilung, Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **44**, 425.

Nach dem WEIERSTRASSschen Satz [12]) können wir drei komplexe Zahlen ζ_1, ζ und ζ_2 bestimmen, welche die Bedingungen (1), (2) und (3) des Hilfssatzes erfüllen. Folglich ist der Satz eine unmittelbare Folgerung des Hilfssatzes.

Bemerkung. In der klassischen Theorie beweist man den Satz, dass eine für $0 < |z - z_0| < R$ eindeutig-reguläre Funktion, die dort die Werte a und b auslässt, in z_0 keine wesentlich singuläre Stelle hat. Wir beweisen jetzt eine mit diesem klassischen Satz verwandte intuitionistische Umkehrung des grossen PICARDschen Satzes; wir betonen aber, dass der obige Satz E_1 keineswegs eine unmittelbare Folgerung dieser Umkehrung E_2 ist.

Satz $\mathbf{E}_2$. *Es sei $F(z)$ eindeutig-regulär für $0 < |z - z_0| < R$ und es habe die* LAURENT*sche Reihe:*

$$F(z) = \sum_0^\infty a_n (z - z_0)^n + \sum_1^\infty b_n (z - z_0)^{-n}$$

wenigstens einen von Null entfernten Koeffizienten b_k. Es seien weiter zwei komplexe Zahlen a und $b \neq a$ und eine positive Zahl $\varrho < R$ derart gegeben, dass $F(z)$ in $|z - z_0| < \varrho$ die Werte a und b auslässt. Alsdann ist z_0 ein Pol von bestimmter Ordnung [13]).

Beweis. Wir setzen wieder $f(z) = \dfrac{F(z_0 + Rz) - a}{b - a}$. Wir wählen ζ_1 und $\omega > 1$ derart, dass $|\zeta_1| < \dfrac{\varrho}{R} e^{-4\pi}$ und $|f(\zeta_1)| < \omega$ (1) ist. Sei δ kleiner als jede der Zahlen $|\zeta_1|$ und $\sqrt[k]{\dfrac{|b_k|}{2\psi(\omega;\frac{1}{2})}}$. Es lässt sich dann ζ mit $|\zeta| = \delta$ so bestimmen, dass $|f(\zeta)| > \psi(\omega;\frac{1}{2})$ (2) ist. Denn aus $|f(z)| < 2\psi(\omega;\frac{1}{2})$ für jedes $|z| = \delta$ würde folgen:

$$|b_k| = \left| \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{|z|=\delta} f(z) z^{k-1} dz \right| < |b_k|.$$

Aus (1) und (2) folgern wir nun, dass die Beziehung $|f(\zeta_2)| < \omega$ unmöglich für ein ζ_2 mit $|\zeta_2| < |\zeta|$ erfüllt sein kann, da sonst $f(z)$ nach dem obigen Hilfssatz in $|z| < \dfrac{\varrho}{R}$ einen der beiden Werte Eins und Null annehmen würde. Es gilt somit $|f(z)| > \frac{1}{2}\omega$ für $|z| < |\zeta|$. Folglich hat $f(z)$ nach der Umkehrung des WEIERSTRASSschen Satzes [14]) in $z = 0$ einen Pol bestimmter Ordnung.

---

[12]) Vgl. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **44**, 565.

[13]) Vgl. die Umkehrung des WEIERSTRASSschen Satzes, Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **44**, 566.

[14]) Vgl. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **44**, 566.