Mathematics. — *Sur des séries et des intégrales définies contenantes les fonctions de* BESSEL. IV. By J. G. RUTGERS. (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN.)

(Communicated at the meeting of June 28, 1941.)

Multiplions les deux membres de (209) par *sin x* resp. *cos x* et ceux de (216) par *cos x* resp. *sin x*, alors nous trouvons par soustraction resp. addition des membres correspondants:

$$\int_0^x \sin 2a \, . \sqrt{\frac{x-a}{a}}\, da = \frac{\pi x}{2} \{\sin x \, I_0(x) - \cos x \, I_1(x)\}, \quad . \quad (229)$$

$$\int_0^x \cos 2a \, . \sqrt{\frac{x-a}{a}}\, da = \frac{\pi x}{2} \{\cos x \, I_0(x) + \sin x \, I_1(x)\}. \quad . \quad (230)$$

En faisant de même à l'égard de (201) et (202), ainsi de (203) et (204), on obtient:

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2) \{(2n+1) \sin x \, I_{2n+1}(x) - (2n+3) \cos x \, I_{2n+2}(x)\} = \\ = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^x \sin 2a \, . \sqrt{\frac{x-a}{a}}\, da = \frac{x}{2} \{\sin x \, I_0(x) - \cos x \, I_1(x)\} \text{ en vertu de (225),} \end{array}\right\} \quad (231)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2) \{(2n+1) \cos x \, I_{2n+1}(x) + (2n+3) \sin x \, I_{2n+2}(x)\} = \\ = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^x \cos^2 a \, . \sqrt{\frac{x-a}{a}}\, da = \frac{x}{2} \{1 + \cos x \, I_0(x) + \sin x \, I_1(x)\} \text{ en vertu de (226),} \end{array}\right\} \quad (232)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2) \{(2n+1) \sin x \, I_{2n+2}(x) - (2n+3) \cos x \, I_{2n+3}(x)\} = \\ = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^x \sin^2 a \, . \sqrt{\frac{x-a}{a}}\, da = \frac{x}{2} \{1 - \cos x \, I_0(x) - \sin x \, I_1(x)\} \text{ en vertu de (226),} \end{array}\right\} \quad (233)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2) \{(2n+1) \cos x \, I_{2n+2}(x) + (2n+3) \sin x \, I_{2n+3}(x)\} = \\ = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^x \sin 2a \, . \sqrt{\frac{x-a}{a}}\, da = \frac{x}{2} \{\sin x \, I_0(x) - \cos x \, I_1(x)\} \text{ en vertu de (225).} \end{array}\right\} \quad (234)$$

De (198) nous faisons encore une autre application. A cause de la propriété des fonctions de BESSEL: $\frac{2\nu}{x} I_\nu(x) = I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x)$ on peut écrire pour le membre gauche de (198) en y substituant $\varrho = \nu + 1$:

$$\frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2) \{ I_{2\nu+2n+1}(x) + I_{2\nu+2n+3}(x) \} =$$

$$= \frac{x}{2} \{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2) I_{2\nu+2n+1}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2) I_{2\nu+2n+3}(x) \} =$$

$$= x I_{2\nu+1}(x) - \frac{x}{2} \{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+4) I_{2\nu+2n+3}(x) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2) I_{2\nu+2n+3}(x) \} =$$

$$= x I_{2\nu+1}(x) - x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{2\nu+2n+3}(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{2\nu+2n+1}(x),$$

de sorte que nous avons trouvé la formule suivante:

$$x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{2\nu+2n+1}(x) = \int_0^x I_\nu(x-\alpha) I_\nu(\alpha)\, \alpha\, d\alpha, \quad R(\nu) > -1. \qquad (235)$$

Posons maintenant $\nu = m$ resp. $\nu = m - \frac{1}{2}$ (m entier positif ou nulle), alors nous trouvons en vertu des séries (b) et (c):

$$\int_0^x I_m(x-\alpha) I_m(\alpha)\, \alpha\, d\alpha = (-1)^m \frac{x}{2} \{ \sin x - 2 \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n I_{2n+1}(x) \}, \quad m \geqq 0 \qquad (236)$$

$$\int_0^x I_{m-\frac{1}{2}}(x-\alpha) I_{m-\frac{1}{2}}(\alpha)\, \alpha\, d\alpha = (-1)^m \frac{x}{2} \{ \cos x + I_0(x) - 2 \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n I_{2n}(x) \}, \quad m \geqq 0; \qquad (237)$$

de la dernière formule (211) et (212) sont des cas particuliers, nommément pour $m = 0$ et $m = 1$.

§ 9. Si nous remplaçons dans (a) ν par $\nu + 2n$ et multiplions les deux membres par $2^{\nu-\mu} \frac{(\nu+2n)\, \Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\mu+n+1)} \binom{\mu-\nu}{n}$, alors nous trouvons, après la sommation sur n de 0 à ∞ d'après III:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2^{\nu-\mu}}{\varrho+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu+2n)\, \Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\mu+n+1)} \binom{\mu-\nu}{n} I_{\nu+\varrho+2n+1}(x) = \\ &\quad = \int_0^x I_\mu(x-\alpha) I_{\varrho+1}(\alpha) (x-\alpha)^{\nu-\mu} \frac{d\alpha}{\alpha}, \begin{cases} R(\nu) > -1 \\ R(\varrho) > -1 \end{cases} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \qquad (238)$$

qui pour $\mu = \nu - 1$ se réduit à (89). Alors nous supposons maintenant $\mu \neq \nu - 1$.

En substituant $\varrho = -\frac{1}{2}$ on obtient la formule particulière:

$$\left. \begin{aligned} & 2^{\nu-\mu+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu+2n)\,\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\mu+n+1)} \binom{\mu-\nu}{n} I_{\nu+2n+\frac{1}{2}}(x) = \\ & \qquad = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x I_\mu(x-a) \sin a \,.\, (x-a)^{\nu-\mu} \frac{da}{a\sqrt{a}},\; R(\nu) > -1. \end{aligned} \right\} . \quad (239)$$

La substitution $\mu = \nu + m$ resp. $\mu = \nu - m - 2$ (m entier positif ou nulle) dans (238) et (239) donne les formules particulières:

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^x I_{\nu+m}(x-a)\, I_{\varrho+1}(a) \frac{da}{a\,(x-a)^m} = \\ & = \frac{1}{2^m(\varrho+1)} \sum_{n=0}^{m} \frac{(\nu+2n)\binom{m}{n}}{(\nu+m+n)(\nu+m+n-1)\ldots(\nu+n)} I_{\nu+\varrho+2n+1}(x), \begin{cases} R(\nu) > -1 \\ R(\varrho) > -1 \\ m \geqq 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} (240)$$

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^x I_{\nu+m}(x-a) \sin a \frac{da}{a\,(x-a)^m \sqrt{a}} = \\ & = \frac{1}{2^m(\varrho+1)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{m} \frac{(\nu+2n)\binom{m}{n}}{(\nu+m+n)(\nu+m+n-1)\ldots(\nu+n)} I_{\nu+2n+\frac{1}{2}}(x), \begin{cases} R(\nu) > -1 \\ m \geqq 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} (241)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{2^{m+2}(m+1)!}{\varrho+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\nu+2n) \binom{\nu+n-1}{m+1} \binom{m+n+1}{n} I_{\nu+\varrho+2n+1}(x) = \\ & \qquad = \int_0^x I_{\nu-m-2}(x-a)\, I_{\varrho+1}(a)\, (x-a)^{m+2} \frac{da}{a}, \begin{cases} R(\nu) > -1 \\ R(\varrho) > -1 \\ m \geqq 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} (242)$$

$$\left. \begin{aligned} & 2^{m+3}(m+1)! \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\nu+2n) \binom{\nu+n-1}{m+1} \binom{m+n+1}{n} I_{\nu+2n+\frac{1}{2}}(x) = \\ & \qquad = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x I_{\nu-m-2}(x-a) \sin a \,.\, (x-a)^{m+2} \frac{da}{a\sqrt{a}} \begin{cases} R(\nu) > -1 \\ m \geqq 0. \end{cases} \end{aligned} \right\} (243)$$

En substituant $\mu = -\frac{1}{2}$ resp. $\mu = \frac{1}{2}$ dans (238) et (239) on trouve après une légère réduction:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\Gamma(\nu+1)\, 2^\nu}{\varrho+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\nu+2n}{n} \binom{2\nu+2n-1}{2n-1} I_{\nu+\varrho+2n+1}(x) = \\ & \qquad = \int_0^x I_{\varrho+1}(a) \cos(x-a) \,.\, (x-a)^\nu \frac{da}{a}, \begin{cases} R(\nu) > -1 \\ R(\varrho) > -1 \end{cases} \end{aligned} \right\} . \; . \quad (244)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\Gamma(\nu)\,2^{\nu}}{\varrho+1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\nu+2n}{2n+1}\binom{2\nu+2n-2}{2n}I_{\nu+\varrho+2n+1}(x)= \\ &\qquad=\int I_{\varrho+1}(\alpha)\sin(x-\alpha)\,.\,(x-\alpha)^{\nu-1}\frac{d\alpha}{\alpha},\quad \begin{cases} R(\nu)>-1 \\ R(\varrho)>-1 \end{cases} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (245)$$

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma(\nu+1)\,2^{\nu+1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\nu+2n}{n}\binom{2\nu+2n-1}{n}I_{\nu+2n+\frac{1}{2}}(x)= \\ &\qquad=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x \sin\alpha\cos(x-\alpha)\,.\,(x-\alpha)^{\nu}\frac{d\alpha}{\alpha\sqrt{\alpha}},\quad R(\nu)>-1 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (246)$$

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma(\nu)\,2^{\nu+1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\nu+2n}{2n+1}\binom{2\nu+2n-2}{2n}I_{\nu+2n+\frac{1}{2}}(x)= \\ &\qquad=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x \sin\alpha\sin(x-\alpha)\,.\,(x-\alpha)^{\nu-1}\frac{d\alpha}{\alpha\sqrt{\alpha}},\quad R(\nu)-1. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (247)$$

La substitution $\nu=0$ dans (244) et (246) donne (2) et (35), ainsi $\nu=1$ dans (245) et (248) donne (1) et (34) comme des cas particuliers.

En substituant $\nu=1$ dans (244) et $\nu=2$ dans (245) on trouve:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^2 I_{\varrho+2n+2}(x)= \\ &\qquad=\frac{\varrho+1}{2}\int_0^x I_{\varrho+1}(\alpha)\cos(x-\alpha)\,.\,\frac{x-\alpha}{\alpha}\,d\alpha,\quad R(\varrho)>-1 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (248)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+2)^2 I_{\varrho+2n+3}(x)= \\ &\qquad=\frac{\varrho+1}{2}\int_0^x I_{\varrho+1}(\alpha)\sin(x-\alpha)\,.\,\frac{x-\alpha}{\alpha}\,d\alpha,\quad R(\varrho)>-1 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (249)$$

Substituons nous dans (180) et (181) $\nu=\varrho+1$ et multiplions nous les deux membres par $\frac{\varrho+1}{2}$, alors nous trouvons en ajoutant les deux membres aux membres correspondants de (248) et (249):

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)(\varrho+2n+2)\,I_{\varrho+2n+2}(x)= \\ &\qquad=\frac{(\varrho+1)x}{2}\int_0^x I_{\varrho+1}(\alpha)\cos(x-\alpha)\frac{d\alpha}{\alpha},\quad R(\varrho)>-1 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (250)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+2)(\varrho+2n+3)I_{\varrho+2n+3}(x)=\\&=\frac{(\varrho+1)x}{2}\int_0^x I_{\varrho+1}(\alpha)\sin(x-\alpha)\frac{d\alpha}{\alpha},\quad R(\varrho)>-1\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ (251)$$

Remplaçons dans $I\ \varrho$ par $\varrho+1$ resp. $\varrho+2$ et multiplions les deux membres par $\varrho+1$, alors nous trouvons en ajoutant les deux membres aux membres correspondants de (250) resp. (251):

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\varrho+2n+2)^2 I_{\varrho+2n+2}(x)=\\&=\frac{(\varrho+1)x}{2}\left\{I_{\varrho+1}(x)+\int_0^x I_{\varrho+1}(\alpha)\cos(x-\alpha)\frac{d\alpha}{\alpha}\right\},\quad R(\varrho)>-1\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ (252)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\varrho+2n+3)^2 I_{\varrho+2n+3}(x)=\\&=\frac{(\varrho+1)x}{2}\left\{I_{\varrho+2}(x)+\int_0^x I_{\varrho+1}(\alpha)\sin(x-\alpha)\frac{d\alpha}{\alpha}\right\},\quad R(\varrho)>-1.\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ (253)$$

Les intégrales qui paraissent dans (250) jusqu'à (253) avons nous déjà rencontrées dans (1) et (2); alors on a (qu'on peut déduire aussi directement):

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)(\varrho+2n+2)I_{\varrho+2n+2}(x)=\\&=x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{\varrho+2n+1}(x)-\frac{x}{2}I_{\varrho+1}(x),\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ (254)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+2)(\varrho+2n+3)I_{\varrho+2n+3}(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{\varrho+2n+2}(x),\qquad (255)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\varrho+2n+3)^2 I_{\varrho+2n+3}(x)=\\&=\frac{(\varrho+1)x}{2}I_{\varrho+2}(x)+x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{\varrho+2n+2}(x).\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ .\ (256)$$

En vertu des séries (b) et (e) nous trouvons en substituant dans (254), (255) et (256) $\varrho=2m-1$ resp. $\varrho=2m$ (m entier positif ou nulle):

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)(2m+2n+1)I_{2m+2n+1}(x)=\\&=(-1)^m\frac{x}{2}\left\{\cos x+I_0(x)-2\sum_{n=0}^{m-1}(-1)^n I_{2n}(x)\right\}-\frac{x}{2}I_{2m}(x),\quad m\geqq 0\end{aligned}\right\}\quad .\ (257)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)(2m+2n+2)\,I_{2m+2n+2}(x)=\\&=(-1)^m\frac{x}{2}\left\{\sin x-2\sum_{n=0}^{m-1}(-1)^n I_{2n+1}(x)\right\}-\frac{x}{2}I_{2m+1}(x),\ m\geqq 0\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (258)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+2)(2m+2n+2)\,I_{2m+2n+2}(x)=\\&=(-1)^m\frac{x}{2}\left\{\sin x-2\sum_{n=0}^{m-1}(-1)^n I_{2n+1}(x)\right\},\ m\geqq 0\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (259)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+2)(2m+2n+3)\,I_{2m+2n+3}(x)=\\&=(-1)^{m+1}\frac{x}{2}\left\{\cos x+I_0(x)-2\sum_{n=0}^{m}(-1)^n I_{2n}(x)\right\},\ m\geqq -1\end{aligned}\right\}\ (260)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2m+2n+2)^2\,I_{2m+2n+2}(x)=\\&=(-1)^m\frac{x}{2}\left\{\sin x-2\sum_{n=0}^{m-1}(-1)^n I_{2n+1}(x)\right\}+m\,x\,I_{2m+1}(x),\ m\geqq 0\end{aligned}\right\}\ (261)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2m+2n+3)^2\,I_{2m+2n+3}(x)=\\&=(-1)^{m+1}\frac{x}{2}\left\{\cos x+I_0(x)-2\sum_{n=0}^{m}(-1)^n I_{2n}(x)\right\}+\frac{(2m+1)x}{2}I_{2m+2}(x),\ m\geqq -1.\end{aligned}\right\}\ (262)$$

Les cas particuliers $m=0$ ou $m=-1$ avons nous déjà rencontrés; voir (210), (213) et (223).

§ 10. Eu égard à la série connue[1]):

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-{}^1/_2}{n}I_{\nu+2n+1}(x)=\frac{\sqrt{\pi x}}{2}\,I_{\frac{\nu+1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)I_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)\quad .\ (\mathrm{IV})$$

nous remplaçons dans (a) ν par $\nu+2n$ et ensuite nous multiplions les deux membres par $(-1)^n\binom{-{}^1/_2}{n}$; alors la sommation sur n de 0 à ∞ et le changement des membres nous donne:

$$\int_0^x I_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{x-a}{2}\right)I_{\frac{\nu-1}{2}}\left(\frac{x-a}{2}\right)I_{\varrho+1}(a)\frac{\sqrt{x-a}}{a}\,da=$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{\varrho+1}\,I_{\frac{\nu+\varrho+1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)I_{\frac{\nu+\varrho}{2}}\left(\frac{x}{2}\right),\ \begin{cases}R(\nu)>-1\\R(\varrho)>-1\end{cases}$$

---

[1]) NIELSEN, l. c. p. 270, (4).

ou en remplaçant ν par 2ν, ϱ par 2ϱ, x par $2x$ et a par $2a$:

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^x I_\nu(x-a)\, I_{\nu-\frac{1}{2}}(x-a)\, I_{2\varrho+1}(2a)\frac{\sqrt{x-a}}{a}\,da = \\[2ex] \displaystyle\qquad = \frac{\sqrt{x}}{2\varrho+1} I_{\nu+\varrho+1}(x)\, I_{\nu+\varrho}(x), \quad \begin{cases} R(\nu) > -\frac{1}{2} \\ R(\varrho) > -\frac{1}{2}. \end{cases}\end{array}\right\} \quad . \ . \ (263)$$

En y substituant successivement $\varrho = -\frac{1}{4}$, $\nu = 0$, $\nu = \frac{1}{2}$ et $\nu = 1$ on trouve les formules particulières:

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^x I_\nu(x-a)\, I_{\nu-\frac{1}{2}}(x-a)\sin 2a \,.\sqrt{\frac{x-a}{a}}\frac{da}{a} = \\[2ex] \displaystyle\qquad = 2\sqrt{\pi x}\, I_{\nu+\frac{1}{4}}(x)\, I_{\nu-\frac{1}{4}}(x), \quad R(\nu) > -\frac{1}{2}\end{array}\right\} \quad . \ . \ . \ (264)$$

$$\int_0^x I_0(x-a)\, I_{2\varrho+1}(2a)\cos(x-a)\frac{da}{a} = \frac{1}{2\varrho+1}\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\, I_{\varrho+\frac{1}{2}}(x)\, I_\varrho(x), \quad R(\varrho) > -\frac{1}{2} \quad (265)$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^x I_0(x-a)\, I_{2\varrho+1}(2a)\sin(x-a)\frac{da}{a} = \\[2ex] \displaystyle\qquad = \frac{1}{2\varrho+1}\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\, I_{\varrho+1}(x)\, I_{\varrho+\frac{1}{2}}(x), \quad R(\varrho) > -\frac{1}{2}\end{array}\right\} \quad . \ . \ . \ (266)$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^x I_1(x-a)\, I_{2\varrho+1}(2a)\sin(x-a)\frac{da}{a} = \\[2ex] \displaystyle\qquad = \frac{1}{2\varrho+1}\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\, I_{\varrho+\frac{3}{2}}(x)\, I_{\varrho+1}(x), \quad R(\varrho) > -\frac{1}{2}.\end{array}\right\} \quad . \ . \ . \ (267)$$

Après avoir multiplié les deux membres de (265) par *sin* x resp. *cos* x et ceux de (266) par *cos* x resp. *sin* x, nous trouvons par soustraction resp. addition des membres correspondants:

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^x I_0(x-a)\, I_{2\varrho+1}(2a)\sin a\,\frac{da}{a} = \\[2ex] \displaystyle = \frac{1}{2\varrho+1}\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\, I_{\varrho+\frac{1}{2}}(x)\,\{\sin x\, I_\varrho(x) - \cos x\, I_{\varrho+1}(x)\}, \quad R(\varrho) > -\frac{1}{2}\end{array}\right\} \quad (268)$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^x I_0(x-a)\, I_{2\varrho+1}(2a)\cos a\,\frac{da}{a} = \\[2ex] \displaystyle = \frac{1}{2\varrho+1}\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\, I_{\varrho+\frac{1}{2}}(x)\,\{\cos x\, I_\varrho(x) + \sin x\, I_{\varrho+1}(x)\}, \quad R(\varrho) > -\frac{1}{2}.\end{array}\right\} \quad (269)$$

La substitution $\varrho = -\frac{1}{4}$, $\varrho = 0$ et $\varrho = \frac{1}{2}$ dans (265) jusqu'à (269) donne les formules particulières:

$$\int_0^x I_0(x-\alpha)\cos(x-\alpha)\sin 2\alpha \frac{d\alpha}{\alpha\sqrt{\alpha}} = \pi\sqrt{2x}\, I_{\frac{1}{4}}(x)\, I_{-\frac{1}{4}}(x), \qquad (270)$$

$$\int_0^x I_0(x-\alpha)\sin(x-\alpha)\sin 2\alpha \frac{d\alpha}{\alpha\sqrt{\alpha}} = \pi\sqrt{2x}\, I_{\frac{3}{4}}(x)\, I_{\frac{1}{4}}(x), \quad . \quad (271)$$

$$\int_0^x I_1(x-\alpha)\sin(x-\alpha)\sin 2\alpha \frac{d\alpha}{\alpha\sqrt{\alpha}} = \pi\sqrt{2x}\, I_{\frac{5}{4}}(x)\, I_{\frac{3}{4}}(x), \quad . \quad (272)$$

$$\int_0^x I_0(x-\alpha)\sin\alpha\sin 2\alpha \frac{d\alpha}{\alpha\sqrt{\alpha}} = \pi\sqrt{2x}\, I_{\frac{1}{4}}(x)\left\{\sin x\, I_{-\frac{1}{4}}(x) - \cos x\, I_{\frac{3}{4}}(x)\right\}, \quad (273)$$

$$\int_0^x I_0(x-\alpha)\cos\alpha\sin 2\alpha \frac{d\alpha}{\alpha\sqrt{\alpha}} = \pi\sqrt{2x}\, I_{\frac{1}{4}}(x)\left\{\cos x\, I_{-\frac{1}{4}}(x) + \sin x\, I_{\frac{3}{4}}(x)\right\}, \quad (274)$$

$$\int_0^x I_0(x-\alpha)\, I_1(2\alpha)\cos(x-\alpha)\frac{d\alpha}{\alpha} = \sin x\, I_0(x), \quad . \quad . \quad . \quad (275)$$

$$\int_0^x I_0(x-\alpha)\, I_1(2\alpha)\sin(x-\alpha)\frac{d\alpha}{\alpha} = \sin x\, I_1(x), \quad . \quad . \quad . \quad (276)$$

$$\int_0^x I_1(x-\alpha)\, I_1(2\alpha)\sin(x-\alpha)\frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{1}{2x}(\sin x - x\cos x)\, I_1(x), \quad (277)$$

$$\int_0^x I_0(x-\alpha)\, I_1(2\alpha)\sin\alpha\frac{d\alpha}{\alpha} = \sin x\left\{\sin x\, I_0(x) - \cos x\, I_1(x)\right\}, \quad (278)$$

$$\int_0^x I_0(x-\alpha)\, I_1(2\alpha)\cos\alpha\frac{d\alpha}{\alpha} = \sin x\left\{\cos x\, I_0(x) + \sin x\, I_1(x)\right\}, \quad (279)$$

$$\int_0^x I_0(x-\alpha)\, I_2(2\alpha)\cos(x-\alpha)\frac{d\alpha}{\alpha} = \tfrac{1}{2}\sin x\, I_1(x), \quad . \quad . \quad . \quad (280)$$

$$\int_0^x I_0(x-a)\, I_2(2a) \sin(x-a) \frac{da}{a} = \frac{1}{2x} (\sin x - x\cos x)\, I_1(x), \qquad (281)$$

$$\int_0^x I_1(x-a)\, I_2(2a) \sin(x-a) \frac{da}{a} = \frac{1}{2x} (\sin x - x\cos x)\, I_2(x), \qquad (282)$$

$$\int_0^x I_0(x-a)\, I_2(2a) \sin a \frac{da}{a} = \frac{1}{2x} (\sin x - x\cos x)\, I_1(x), \quad . \quad (283)$$

$$\int_0^x I_0(x-a)\, I_2(2a) \cos a \frac{da}{a} = \frac{\sin^2 x}{2x} I_1(x). \quad . \; . \; . \; . \quad (284)$$

§ 11. En égard aux séries $2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{2n+1}(x) \sin x$ et $2\sum_{n=0}^{\infty} I_{4n+2}(x) = \sin^2 \frac{1}{2} x$ nous substituons dans (235) $\varrho = n$ resp. $\varrho = 2n + \frac{1}{2}$ et ensuite nous multiplions les deux membres par $2(-1)^n$ resp. 2; alors la sommation sur n de 0 à ∞ et le changement des membres nous donne:

$$\left.\begin{aligned} & 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} I_{\nu+n+\frac{1}{2}}(x)\, I_{\nu+n}(x) = \\ & = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x I_\nu(x-a)\, I_{\nu-\frac{1}{2}}(x-a) \sin 2a \, . \sqrt{x-a}\, \frac{da}{a}, \quad R(\nu) > -\tfrac{1}{2} \end{aligned}\right\} (285)$$

$$\left.\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} I_{\nu+2n+1}(x)\, I_{\nu+2n+\frac{1}{2}}(x) = \\ & = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x I_\nu(x-a)\, I_{\nu-\frac{1}{2}}(x-a) \sin^2 a \, . \sqrt{x-a}\, \frac{da}{a}, \quad R(\nu) > -\tfrac{1}{2}. \end{aligned}\right\} (286)$$

Si nous substituons dans (285) et (286) successivement $\nu = 0$, $\nu = \frac{1}{2}$ et $\nu = 1$, nous trouvons comme formules particulières:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} I_{n+\frac{1}{2}}(x)\, I_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \int_0^x I_0(x-a) \cos(x-a) \sin 2a \frac{da}{a}, \quad (287)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} I_{n+1}(x)\, I_{n+\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \int_0^x I_0(x-a) \sin(x-a) \sin 2a \frac{da}{a}, \quad (288)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} I_{n+\frac{3}{2}}(x) I_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \int_0^x I_1(x-a) \sin(x-a) \sin 2a \frac{da}{a}, \quad (289)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} I_{2n+\frac{3}{2}}(x) I_{2n+1}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(x-a) \cos(x-a) \sin^2 a \frac{da}{a}, \quad (290)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} I_{2n+2}(x) I_{2n+\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(x-a) \sin(x-a) \sin^2 a \frac{da}{a}, \quad (291)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} I_{2n+\frac{5}{2}}(x) I_{2n+2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_1(x-a) \sin(x-a) \sin^2 a \frac{da}{a}. \quad (292)$$

En multipliant les deux membres de (287) par *sin x* resp. *cos x* et ceux de (288) par *cos x* resp. *sin x* on trouve après la soustraction resp. l'addition des membres correspondants, et en faisant de même à l'égard de (290) et (291):

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} I_{n+\frac{1}{2}}(x) \{\sin x\, I_n(x) - \cos x\, I_{n+1}(x)\} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} I_{2n+\frac{3}{2}}(x) \{\cos x\, I_{2n+1}(x) + \sin x\, I_{2n+2}(x)\} = \\ &\qquad = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \int_0^x I_0(x-a) \sin 2a \sin a \frac{da}{a}, \end{aligned}\right\} \quad (293)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} I_{n+\frac{1}{2}}(x) \{\cos x\, I_n(x) + \sin x\, I_{n+1}(x)\} = \\ &\qquad = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \int_0^x I_0(x-a) \sin 2a \cos a \frac{da}{a}, \end{aligned}\right\} \quad (294)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} I_{2n+\frac{3}{2}}(x) \{\sin x\, I_{2n+1}(x) - \cos x\, I_{2n+2}(x)\} = \\ &\qquad = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(x-a) \sin^3 a \frac{da}{a}. \end{aligned}\right\} \quad (295)$$

§ 12. En remplaçant dans (263) ϱ par $\varrho + n$ et en multipliant les deux membres par $\frac{(-1)^n}{\sqrt{x}}(2\varrho + 2n + 1)$, on trouve après la sommation sur n de 0 à ∞, ayant égard à I et en changeant les membres:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{\nu+\varrho+n+\frac{1}{2}}(x)\, I_{\nu+\varrho+n}(x)=\\ &\qquad=\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x I_\nu(x-a)\, I_{\nu-\frac{1}{2}}(x-a)\, I_{2\varrho}(2a)\,.\sqrt{x-a}\,da,\quad \begin{cases}R(\nu)>-\frac{1}{2}\\ R(\varrho)>-\frac{1}{2}\end{cases}\end{aligned}\right\}\quad(296)$$

ou en posant $\nu=\mu-\varrho-\frac{1}{2}$:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{\mu+n}(x)\, I_{\mu+n-\frac{1}{2}}(x)=\\ &=\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x I_{\mu-\varrho-\frac{1}{2}}(x-a)\, I_{\mu-\varrho-1}(x-a)\, I_{2\varrho}(2a)\sqrt{x-a}\,da,\quad R(\mu)>R(\varrho)>-\tfrac{1}{2}.\end{aligned}\right\}\quad(297)$$

En substituant dans (296) $\varrho=\mu-\frac{1}{2}$ et $\nu=0$ resp. $\nu=\frac{1}{2}$, ainsi $\nu=\mu-\frac{1}{2}$ et $\varrho=-\frac{1}{4}$ resp. $\varrho=\frac{1}{4}$, on obtient les formules particulières:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{\mu+n}(x)\, I_{\mu+n-\frac{1}{2}}(x)=\\ &\qquad=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_0(x-a)\, I_{2\mu-1}(2a)\cos(x-a)\,da,\quad R(\mu)>0\end{aligned}\right\}.\quad(298)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{\mu+n+\frac{1}{2}}(x)\, I_{\mu+n}(x)=\\ &\qquad=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_0(x-a)\, I_{2\mu-1}(2a)\sin(x-a)\,da,\quad R(\mu)>0\end{aligned}\right\}.\quad(299)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{\mu+n-\frac{1}{4}}(x)\, I_{\mu+n-\frac{3}{4}}(x)=\\ &\quad=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\int_0^x I_{\mu-\frac{1}{2}}(x-a)\, I_{\mu-1}(x-a)\cos 2a\,.\sqrt{\frac{x-a}{a}}\,da,\quad R(\mu)>0\end{aligned}\right\}\quad(300)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{\mu+n+\frac{1}{4}}(x)\, I_{\mu+n-\frac{1}{4}}(x)=\\ &\quad=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\int_0^x I_{\mu-\frac{1}{2}}(x-a)\, I_{\mu-1}(x-a)\sin 2a\,.\sqrt{\frac{x-a}{a}}\,da,\quad R(\mu)>0.\end{aligned}\right\}\quad(301)$$

Multiplions les deux membres de (298) par *sin* x resp. *cos* x et ceux de (299) par *cos* x resp. *sin* x, alors nous trouvons après la soustraction resp. l'addition des membres correspondants:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{\mu+n}(x)\left\{\sin x\, I_{\mu+n-\frac{1}{2}}(x)-\cos x\, I_{\mu+n+\frac{1}{2}}(x)\right\}=\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_0(x-\alpha)\, I_{2\mu-1}(2\alpha)\sin\alpha\, d\alpha,\quad R(\mu)>0\end{aligned}\right\}.\qquad(302)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{\mu+n}(x)\left\{\cos x\, I_{\mu+n-\frac{1}{2}}(x)+\sin x\, I_{\mu+n+\frac{1}{2}}(x)\right\}=\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_0(x-\alpha)\, I_{2\mu-1}(2\alpha)\cos\alpha\, d\alpha,\quad R(\mu)>0.\end{aligned}\right\}.\qquad(303)$$

En multipliant les deux membres de (300) par *sin* $2x$ resp. *cos* $2x$ et ceux de (301) par *cos* $2x$ resp. *sin* $2x$, on obtient après la soustraction resp. l'addition des membres correspondants:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{\mu+n-\frac{1}{2}}(x)\left\{\sin 2x\, I_{\mu+n-\frac{1}{2}}(x)-\cos x\, I_{\mu+n+\frac{1}{2}}(x)\right\}=\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\int_0^x I_{\mu-\frac{1}{2}}(\alpha)\, I_{\mu-1}(\alpha)\sin 2\alpha\,.\sqrt{\frac{\alpha}{x-\alpha}}\, d\alpha,\quad R(\mu)>0\end{aligned}\right\}\qquad(304)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{\mu+n-\frac{1}{2}}(x)\left\{\cos x\, I_{\mu+n-\frac{1}{2}}(x)+\sin x\, I_{\mu+n+\frac{1}{2}}(x)\right\}=\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\int_0^x I_{\mu-\frac{1}{2}}(\alpha)\, I_{\mu-1}(\alpha)\cos 2\alpha\,.\sqrt{\frac{\alpha}{x-\alpha}}\, d\alpha,\quad R(\mu)>0.\end{aligned}\right\}\qquad(305)$$
