Mathematics. — *Sur des séries et des intégrales définies contenantes les fonctions de* BESSEL. V. By J. G. RUTGERS. (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN.)

(Communicated at the meeting of September 27, 1941.)

La substitution $\mu = \frac{1}{4}$ resp. $\mu = \frac{3}{4}$ dans (298) et (299) ou $\mu = \frac{1}{2}$ resp. $\mu = 1$ dans (300) et (301) donne après une légère réduction:

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{n+\frac{1}{4}}(x) I_{n-\frac{1}{4}}(x) &= \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \cos(x-a) \cos 2a \frac{da}{\sqrt{a}} = \\
&= I_{\frac{1}{4}}(x) I_{-\frac{1}{4}}(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \sin(x-a) \sin 2a \frac{da}{\sqrt{a}} = \\
&= \tfrac{1}{2} I_{\frac{1}{4}}(x) I_{-\frac{1}{4}}(x) + \frac{1}{\pi\sqrt{2x}} \int_0^x I_0(x-a) \cos(x+a) \frac{da}{\sqrt{a}}
\end{aligned}\right\} \quad (306)$$

(comme la demie somme des membres précédents),

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{n+\frac{3}{4}}(x) I_{n+\frac{1}{4}}(x) &= \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \sin(x-a) \cos 2a \frac{da}{\sqrt{a}} = \\
= \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \cos(x-a) \sin 2a \frac{da}{\sqrt{a}} &= \\
&= \frac{1}{\pi\sqrt{2x}} \int_0^x I_0(x-a) \sin(x+a) \frac{da}{\sqrt{a}}
\end{aligned}\right\} \quad (307)$$

(comme la demie somme des membres précédents).

De l'égalité des membres intermédiaires de (306) et (307) suivent:

$$\int_0^x I_0(x-a) \cos(3a-x) \frac{da}{\sqrt{a}} = \pi \sqrt{\frac{x}{2}}\, I_{\frac{1}{4}}(x) I_{-\frac{1}{4}}(x), \quad . \quad . \quad . \quad (308)$$

$$\int_0^x I_0(x-a) \sin(3a-x) \frac{da}{\sqrt{a}} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (309)$$

La substitution $\mu = \frac{1}{2}$ dans (298) et (299) donne:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{n+\frac{1}{2}}(x) I_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(2a) I_0(x-a) \cos(x-a)\, da, \qquad (310)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{n+1}(x) I_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(2a) I_0(x-a) \sin(x-a)\, da. \qquad (311)$$

Ainsi la substitution $\mu = \frac{1}{4}$ resp. $\mu = \frac{3}{4}$ dans (302) et (303) ou $\mu = \frac{1}{2}$ resp. $\mu = 1$ dans (304) et (305) donne les formules particulières:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{n+\frac{1}{4}}(x) \{\sin x\, I_{n-\frac{1}{4}}(x) - \cos x\, I_{n+\frac{3}{4}}(x)\} = \\ &\qquad = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \cos 2a \sin a \frac{da}{\sqrt{a}}, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (312)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{n+\frac{1}{4}}(x) \{\cos x\, I_{n-\frac{1}{4}}(x) + \sin x\, I_{n+\frac{3}{4}}(x)\} = \\ &\qquad = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \cos 2a \cos a \frac{da}{\sqrt{a}}, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (313)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{n+\frac{3}{4}}(x) \{\sin x\, I_{n+\frac{1}{4}}(x) - \cos x\, I_{n+\frac{5}{4}}(x)\} = \\ &\qquad = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \sin 2a \sin a \frac{da}{\sqrt{a}}, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (314)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{n+\frac{3}{4}}(x) \{\cos x\, I_{n+\frac{1}{4}}(x) + \sin x\, I_{n+\frac{5}{4}}(x)\} = \\ &\qquad = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \sin 2a \cos a \frac{da}{\sqrt{a}}, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (315)$$

tandis que la substitution $\mu = \frac{3}{4}$ dans (304) et (305) donne:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{n+\frac{1}{2}}(x) \{\sin x\, I_n(x) - \cos x\, I_{n+1}(x)\} = \\ &\qquad = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(x-a) I_0(2a) \sin a\, da, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (316)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{n+\frac{1}{2}}(x)\left\{\cos x\, I_n(x)+\sin x\, I_{n+1}(x)\right\}=\\&\qquad=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_0(x-a)\, I_0(2a)\cos a\, da.\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (317)$$

Par addition resp. soustraction de (312) et (315), ainsi de (313) et (314), on obtient:

$$\int_0^x I_0(x-a)\sin 3a\,\frac{da}{\sqrt{a}}=\pi\sqrt{\frac{x}{2}}\sin x\, I_{-\frac{1}{4}}(x)\, I_{\frac{1}{4}}(x), \quad . \quad . \quad (318)$$

$$\left.\begin{aligned}&2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{n+\frac{3}{4}}(x)\left\{\cos x\, I_{n+\frac{1}{4}}(x)+\sin x\, I_{n+\frac{5}{4}}(x)\right\}-\\&\qquad-\sin x\, I_{-\frac{1}{4}}(x)\, I_{\frac{1}{4}}(x)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{x}}\int_0^x I_0(x-a)\sin a\,\frac{da}{\sqrt{a}},\end{aligned}\right\} \quad . \quad (319)$$

$$\left.\begin{aligned}&2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{n+\frac{3}{4}}(x)\left\{\sin x\, I_{n+\frac{1}{4}}(x)-\cos x\, I_{n+\frac{5}{4}}(x)\right\}+\\&\qquad+\cos x\, I_{-\frac{1}{4}}(x)\, I_{\frac{1}{4}}(x)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{x}}\int_0^x I_0(x-a)\cos a\,\frac{da}{\sqrt{a}},\end{aligned}\right\} \quad . \quad (320)$$

$$\int_0^x I_0(x-a)\cos 3a\,\frac{da}{\sqrt{a}}=\pi\sqrt{\frac{x}{2}}\cos x\, I_{-\frac{1}{4}}(x)\, I_{\frac{1}{4}}(x). \quad . \quad . \quad (321)$$

Enfin la substitution $\mu=\frac{1}{2}$ resp. $\mu=1$ dans (304) et (305) donne les formules particulières:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{n+\frac{1}{4}}(x)\left\{\sin 2x\, I_{n-\frac{1}{4}}(x)-\cos 2x\, I_{n+\frac{3}{4}}(x)\right\}=\\&\qquad=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{x}}\int_0^x I_0(a)\sin 2a\cos a\,\frac{da}{\sqrt{x-a}},\end{aligned}\right\} \quad . \quad (322)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{n+\frac{1}{4}}(x)\left\{\cos 2x\, I_{n-\frac{1}{4}}(x)+\sin 2x\, I_{n+\frac{3}{4}}(x)\right\}=\\&\qquad=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{x}}\int_0^x I_0(a)\cos 2a\cos a\,\frac{da}{\sqrt{x-a}},\end{aligned}\right\} \quad . \quad (323)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{n+\frac{1}{2}}(x)\{\sin 2x\, I_{n+\frac{1}{2}}(x)-\cos 2x\, I_{n+\frac{3}{2}}(x)\}=\\&\qquad=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{x}}\int_0^x I_0(a)\sin 2a \sin a\,\frac{da}{\sqrt{x-a}},\end{aligned}\right\}. \quad (324)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{n+\frac{1}{2}}(x)\{\cos 2x\, I_{n+\frac{1}{2}}(x)+\sin 2x\, I_{n+\frac{3}{2}}(x)\}=\\&\qquad=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{x}}\int_0^x I_0(a)\cos 2a \sin a\,\frac{da}{\sqrt{x-a}},\end{aligned}\right\}. \quad (325)$$

tandis que l'addition resp. la soustraction des membres correspondants de (322) et (325), ainsi de (323) et (324) donne:

$$\int_0^x I_0(a)\sin 3a\,\frac{da}{\sqrt{x-a}}=\pi\sqrt{\frac{x}{2}}\sin 2x\, I_{-\frac{1}{2}}(x)\, I_{\frac{1}{2}}(x), \quad . \quad . \quad (326)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sin 2x\, I_{-\frac{1}{2}}(x) I_{\frac{1}{2}}(x)-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{n+\frac{1}{2}}(x)\{\cos 2x\, I_{n+\frac{1}{2}}(x)+\sin 2x\, I_{n+\frac{3}{2}}(x)\}=\\&\qquad=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{x}}\int_0^x I_0(a)\sin a\,\frac{da}{\sqrt{x-a}},\end{aligned}\right\} \quad (327)$$

$$\left.\begin{aligned}&\cos 2x\, I_{-\frac{1}{2}}(x) I_{\frac{1}{2}}(x)+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{n+\frac{1}{2}}(x)\{\sin 2x\, I_{n+\frac{1}{2}}(x)-\cos 2x\, I_{n+\frac{3}{2}}(x)\}=\\&\qquad=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{x}}\int_0^x I_0(a)\cos a\,\frac{da}{\sqrt{x-a}},\end{aligned}\right\} \quad (328)$$

$$\int_0^x I_0(a)\cos 3a\,\frac{da}{\sqrt{x-a}}=\pi\sqrt{\frac{x}{2}}\cos 2x\, I_{-\frac{1}{2}}(x)\, I_{\frac{1}{2}}(x). \quad . \quad (329)$$

§ 13. En remplaçant dans (263) ϱ par $m+\frac{1}{2}$ resp. m (m entier positif ou nulle) et en multipliant les deux membres par $2(-1)^m$ resp. $\varepsilon_{2m}(-1)^m$ ou ε_{2m}, alors nous trouvons après la sommation sur m de 0 à ∞, à cause des séries connues $2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m I_{2m+1}(x)=\sin x$, $\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_{2m}(-1)^m I_{2m}(x)=$ $=\cos x$ et $\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_{2m} I_{2m}(x)=1$, en appliquant le théorème de CAUCHY

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\varphi(m,n)=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{s}\varphi(p,s-p), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

où $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(m, n) = \psi(m)$ et $\sum_{m=0}^{\infty} \psi(m)$ sont des séries absolument convergentes:

$$\left.\begin{aligned}&2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (s+1) I_{\nu+s+1}(x) I_{\nu+s+\frac{1}{2}}(x) = \\ &\qquad = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x I_\nu(a) I_{\nu-\frac{1}{2}}(a) \sin 2(x-a) . \sqrt{a}\, da, \quad R(\nu) > -\tfrac{1}{2}\end{aligned}\right\} \tag{330}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (2s+1) I_{\nu+s+\frac{1}{2}}(x) I_{\nu+s}(x) = \\ &\qquad = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x I_\nu(a) I_{\nu-\frac{1}{2}}(a) \cos 2(x-a) . \sqrt{a}\, da, \quad R(\nu) > -\tfrac{1}{2}\end{aligned}\right\} \tag{331}$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} I_{\nu+s+\frac{1}{2}}(x) I_{\nu+s}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x I_\nu(a) I_{\nu-\frac{1}{2}}(a) . \sqrt{a}\, da, \quad R(\nu) > -\tfrac{1}{2}. \tag{332}$$

Si nous multiplions les deux membres de (331) par $\sin 2x$ resp. $\cos 2x$ et ceux de (330) par $\cos 2x$ resp. $\sin 2x$, alors nous obtenons après la soustraction resp. l'addition des membres correspondants:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s I_{\nu+s+\frac{1}{2}}(x) \{(2s+1) \sin 2x\, I_{\nu+s}(x) - (2s+2) \cos 2x\, I_{\nu+s+1}(x)\} = \\ &\qquad = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x I_\nu(a) I_{\nu-\frac{1}{2}}(a) \sin 2a . \sqrt{a}\, da, \quad R(\nu) > -\tfrac{1}{2}\end{aligned}\right\} \tag{333}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s I_{\nu+s+\frac{1}{2}}(x) \{(2s+1) \cos 2x\, I_{\nu+s}(x) + (2s+2) \sin 2x\, I_{\nu+s+1}(x)\} = \\ &\qquad = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x I_\nu(a) I_{\nu-\frac{1}{2}}(a) \cos 2a . \sqrt{a}\, da, \quad R(\nu) > -\tfrac{1}{2}.\end{aligned}\right\} \tag{334}$$

Par addition et soustraction des membres correspondants de (331) et (332) on trouve:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{s=0}^{\infty} (2s+1) \{I_{\nu+2s+\frac{1}{2}}(x) I_{\nu+2s}(x) - I_{\nu+2s+\frac{3}{2}}(x) I_{\nu+2s+1}(x)\} = \\ &\qquad = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x I_\nu(a) I_{\nu-\frac{1}{2}}(a) \cos^2(x-a) . \sqrt{a}\, da, \quad R(\nu) > -\tfrac{1}{2}\end{aligned}\right\} \tag{335}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{s=0}^{\infty}(2s+2)\{I_{\nu+2s+\frac{3}{2}}(x)\,I_{\nu+2s+1}(x)-I_{\nu+2s+\frac{5}{2}}(x)\,I_{\nu+2s+2}(x)\}=\\&\qquad=\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x I_\nu(a)\,I_{\nu-\frac{1}{2}}(a)\,\sin^2(x-a)\,.\,\sqrt{a}\,da,\quad R(\nu)>-\tfrac{1}{2}.\end{aligned}\right\}\quad(336)$$

La substitution $\nu=0$, $\nu=\frac{1}{2}$ et $\nu=1$ dans (330) jusqu'à (336) nous donne les formules particulières:

$$2\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s(s+1)\,I_{s+1}(x)\,I_{s+\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_0(a)\cos a\sin 2(x-a)\,da,\quad(337)$$

$$2\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s(s+1)\,I_{s+\frac{3}{2}}(x)\,I_{s+1}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_0(a)\sin a\sin 2(x-a)\,da,\quad(338)$$

$$2\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s(s+1)\,I_{s+2}(x)\,I_{s+\frac{3}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_1(a)\sin a\sin 2(x-a)\,da,\quad(339)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s(2s+1)\,I_{s+\frac{1}{2}}(x)\,I_s(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_0(a)\cos a\cos 2(x-a)\,da,\quad .\quad(340)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s(2s+1)\,I_{s+1}(x)\,I_{s+\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_0(a)\sin a\cos 2(x-a)\,da,\quad(341)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s(2s+1)\,I_{s+\frac{3}{2}}(x)\,I_{s+1}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_1(a)\sin a\cos 2(x-a)\,da,\quad(342)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{s=0}^{\infty}I_{s+\frac{1}{2}}(x)\,I_s(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x I_0(a)\cos a\,da=\\&\qquad=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\sin x\,I_0(x)+\int_0^x I_1(a)\sin a\,da\right\},\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ .\quad(343)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty}I_{s+1}(x)\,I_{s+\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_0(a)\sin a\,da,\quad .\ .\ .\quad(344)$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s I_{s+\frac{1}{2}}(x)\{(2s+1)\sin 2x\, I_s(x) - (2s+2)\cos 2x\, I_{s+1}(x)\} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_0(\alpha)\cos\alpha\sin 2\alpha\, d\alpha,\end{aligned}\right\} \tag{345}$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s I_{s+1}(x)\{(2s+1)\sin 2x\, I_{s+\frac{1}{2}}(x) - (2s+2)\cos 2x\, I_{s+\frac{3}{2}}(x)\} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_0(\alpha)\sin\alpha\sin 2\alpha\, d\alpha,\end{aligned}\right\} \tag{346}$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s I_{s+\frac{3}{2}}(x)\{(2s+1)\sin 2x\, I_{s+1}(x) - (2s+2)\cos 2x\, I_{s+2}(x)\} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_1(\alpha)\sin\alpha\sin 2\alpha\, d\alpha,\end{aligned}\right\} \tag{347}$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s I_{s+\frac{1}{2}}(x)\{(2s+1)\cos 2x\, I_s(x) + (2s+2)\sin 2x\, I_{s+1}(x)\} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_0(\alpha)\cos\alpha\cos 2\alpha\, d\alpha,\end{aligned}\right\} \tag{348}$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s I_{s+1}(x)\{(2s+1)\cos 2x\, I_{s+\frac{1}{2}}(x) + (2s+2)\sin 2x\, I_{s+\frac{3}{2}}(x)\} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_0(\alpha)\sin\alpha\cos 2\alpha\, d\alpha,\end{aligned}\right\} \tag{349}$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s I_{s+\frac{3}{2}}(x)\{(2s+1)\cos 2x\, I_{s+1}(x) + (2s+2)\sin 2x\, I_{s+2}(x)\} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_1(\alpha)\sin\alpha\cos 2\alpha\, d\alpha,\end{aligned}\right\} \tag{350}$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{s=0}^{\infty}(2s+1)\{I_{2s+\frac{1}{2}}(x)\, I_{2s}(x) - I_{2s+\frac{3}{2}}(x)\, I_{2s+1}(x)\} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_0(\alpha)\cos\alpha\cos^2(x-\alpha)\, d\alpha,\end{aligned}\right\} \quad .\ . \tag{351}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{s=0}^{\infty}(2s+1)\left\{I_{2s+1}(x)\,I_{2s+\frac{1}{2}}(x)-I_{2s+2}(x)\,I_{2s+\frac{3}{2}}(x)\right\}=\\&\qquad=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_0(a)\,\sin a\,\cos^2(x-a)\,da,\end{aligned}\right\}\;.\quad(352)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{s=0}^{\infty}(2s+1)\left\{I_{2s+\frac{3}{2}}(x)\,I_{2s+1}(x)-I_{2s+\frac{5}{2}}(x)\,I_{2s+2}(x)\right\}=\\&\qquad=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_1(a)\,\sin a\,\cos^2(x-a)\,da,\end{aligned}\right\}\;.\;.\quad(353)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{s=0}^{\infty}(2s+2)\left\{I_{2s+\frac{3}{2}}(x)\,I_{2s+1}(x)-I_{2s+\frac{5}{2}}(x)\,I_{2s+2}(x)\right\}=\\&\qquad=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_0(a)\,\cos a\,\sin^2(x-a)\,da.\end{aligned}\right\}\;.\;.\quad(354)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{s=0}^{\infty}(2s+2)\left\{I_{2s+2}(x)\,I_{2s+\frac{3}{2}}(x)-I_{2s+3}(x)\,I_{2s+\frac{5}{2}}(x)\right\}=\\&\qquad=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_0(a)\,\sin a\,\sin^2(x-a)\,da,\end{aligned}\right\}\;.\;.\quad(355)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{s=0}^{\infty}(2s+2)\left\{I_{2s+\frac{5}{2}}(x)\,I_{2s+2}(x)-I_{2s+\frac{7}{2}}(x)\,I_{2s+3}(x)\right\}=\\&\qquad=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x I_1(a)\,\sin a\,\sin^2(x-a)\,da.\end{aligned}\right\}\;.\;.\quad(356)$$

Par addition resp. soustraction des membres correspondants de chacune des paires (337) et (341), (338) et (340), (351) et (354), (352) et (355), (353) et (356) on trouve:

$$\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s(4s+3)\,I_{s+1}(x)\,I_{s+\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_0(a)\,\sin(2x-a)\,da,\quad.\quad(357)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\,I_{s+1}(x)\,I_{s+\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_0(a)\,\sin(2x-3a)\,da,\;.\quad(358)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\,I_{s+\frac{1}{2}}\,I_s(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_0(a)\,\cos(2x-3a)\,da,\;.\;.\;.\quad(359)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (4s+1) I_{s+\frac{1}{2}}(x) I_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(a) \cos(2x-a)\, da, \quad (360)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \{ I_{2s+\frac{1}{2}}(x) I_{2s}(x) + I_{2s+\frac{3}{2}}(x) I_{2s+1}(x) \} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(a) \cos a\, da, \quad (361)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{s=0}^{\infty} \{ (4s+1) I_{2s+\frac{1}{2}}(x) I_{2s}(x) - (4s+3) I_{2s+\frac{3}{2}}(x) I_{2s+1}(x) \} = \\ \qquad = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(a) \cos a \cos 2(x-a)\, da, \end{array}\right\} \quad (362)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \{ I_{2s+1}(x) I_{2s+\frac{1}{2}}(x) + I_{2s+2}(x) I_{2s+\frac{3}{2}}(x) \} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(a) \sin a\, da, \; . \; . \quad (363)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{s=0}^{\infty} \{ (4s+1) I_{2s+1}(x) I_{2s+\frac{1}{2}}(x) - (4s+3) I_{2s+2}(x) I_{2s+\frac{3}{2}}(x) \} = \\ \qquad = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(a) \sin a \cos 2(x-a)\, da, \end{array}\right\} \quad (364)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \{ I_{2s+\frac{3}{2}}(x) I_{2s+1}(x) + I_{2s+\frac{5}{2}}(x) I_{2s+2}(x) \} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_1(a) \sin a\, da, \; . \quad (365)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{s=0}^{\infty} \{ (4s+1) I_{2s+\frac{3}{2}}(x) I_{2s+1}(x) - (4s+3) I_{2s+\frac{5}{2}}(x) I_{2s+2}(x) \} = \\ \qquad = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_1(a) \sin a \cos 2(x-a)\, da. \end{array}\right\} \quad (366)$$

Si nous multiplions les deux membres de (337) par $\sin x$ resp. $\cos x$ et ceux de (338) par $\cos x$ resp. $\sin x$, alors nous trouvons après la soustraction resp. l'addition des membres correspondants, et en faisant de même à l'égard de (340) et (341), ainsi de (343) et (344):

$$\left.\begin{array}{l} 2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (s+1) I_{s+1}(x) \{ \sin x\, I_{s+\frac{1}{2}}(x) - \cos x\, I_{s+\frac{3}{2}}(x) \} = \\ \qquad = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(x-a) \sin a \sin 2a\, da, \end{array}\right\} \quad (367)$$

$$\left.\begin{aligned}&2\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s(s+1)\,I_{s+1}(x)\left\{\cos x\, I_{s+\frac{1}{2}}(x)+\sin x\, I_{s+\frac{3}{2}}(x)\right\}=\\&\qquad=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_0(x-a)\cos a\sin 2a\,da,\end{aligned}\right\}\tag{368}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s(2s+1)\,I_{s+\frac{1}{2}}(x)\left\{\sin x\, I_s(x)-\cos x\, I_{s+1}(x)\right\}=\\&\qquad=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_0(x-a)\sin a\cos 2a\,da,\end{aligned}\right\}\tag{369}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s(2s+1)\,I_{s+\frac{1}{2}}(x)\left\{\cos x\, I_s(x)+\sin x\, I_{s+1}(x)\right\}=\\&\qquad=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_0(x-a)\cos a\cos 2a\,da,\end{aligned}\right\}\tag{370}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{s=0}^{\infty}I_{s+\frac{1}{2}}(x)\left\{\sin x\, I_s(x)-\cos x\, I_{s+1}(x)\right\}=\\&\qquad=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_0(a)\sin(x-a)\,da=\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\,I_1(x)\ \text{selon (189)},\end{aligned}\right\}\tag{371}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{s=0}^{\infty}I_{s+\frac{1}{2}}(x)\left\{\cos x\, I_s(x)+\sin x\, I_{s+1}(x)\right\}=\\&\qquad=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_0(a)\cos(x-a)\,da=\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\,I_0(x)\ \text{selon (187)}.\end{aligned}\right\}\tag{372}$$

Si nous multiplions les deux membres de (359) par *sin* x resp. *cos* x et ceux de (358) par *cos* x resp. *sin* x, alors nous trouvons après l'addition resp. la soustraction des membres correspondants:

$$\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s I_{s+\frac{1}{2}}(x)\left\{\sin x\, I_s(x)+\cos x\, I_{s+1}(x)\right\}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_0(x-a)\sin 3a\,da,\tag{373}$$

$$\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s I_{s+\frac{1}{2}}(x)\left\{\cos x\, I_s(x)-\sin x\, I_{s+1}(x)\right\}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_0(x-a)\cos 3a\,da.\tag{374}$$

Par la multiplication des deux membres de (359) par *sin* $2x$ resp.

cos $2x$ et ceux de (358) par *cos* $2x$ resp. *sin* $2x$, on trouve après la soustraction resp. l'addition des membres correspondants:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s I_{s+\frac{1}{2}}(x)\left\{\sin 2x\, I_s(x)-\cos 2x\, I_{s+1}(x)\right\}=\\ &\qquad\qquad=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_0(a)\sin 3a\,da,\end{aligned}\right\}\quad . \quad . \quad (375)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s I_{s+\frac{1}{2}}(x)\left\{\cos 2x\, I_s(x)+\sin 2x\, I_{s+1}(x)\right\}=\\ &\qquad\qquad=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\int_0^x I_0(a)\cos 3a\,da.\end{aligned}\right\}\quad . \quad . \quad (376)$$