Mathematics. — *Une propriété des variétés de* VERONESE. Par LUCIEN GODEAUX. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of September 27, 1941.)

Appelons variété de VERONESE à n dimensions la variété obtenue en rapportant projectivement les hyperquadriques d'un espace linéaire à n dimensions aux hyperplans d'un espace linéaire à $\frac{1}{2}n(n+3)$ dimensions. Pour $n=2$, on obtient la surface de VERONESE. On peut obtenir les propriétés d'une variété de VERONESE en généralisant la méthode suivie dans le cas d'une surface [1]). Dans cette note, nous nous proposons d'obtenir quelques propriétés de cette variété par une autre voie. Nous utilisons la variété de SEGRE représentant les couples de points de deux espaces linéaires à n dimensions [2]); cette variété contient une involution du second ordre représentée par la variété des cordes de la variété de VERONESE à n dimensions. C'est sur cette remarque qu'est basée la méthode suivie.

1. Soient S_n un espace linéaire à n dimensions, y, z deux de ses points, $y_0, y_1, \ldots, y_n$ et $z_0, z_1, \ldots, z_n$ leurs coordonnées projectives homogènes. Désignons par V_{2n} la variété de SEGRE représentant les couples ordonnés y, z et par Ω_{2n} la variété représentant les couples non ordonnés y, z.

Nous prendrons comme modèle projectif de la variété V_{2n} la variété d'ordre $(2n)!:(n!)^2=\binom{2n}{n}$ appartenant à l'espace linéaire S_r à $r=n(n+2)$ dimensions, obtenue en posant

$$\varrho X_{ik}=y_i z_k, \quad (i,k=0,1,2,\ldots,n)$$

et en interprétant les X_{ik} comme les coordonnées projectives d'un point X de cet espace.

Pour modèle projectif de la variété Ω_{2n}, nous prendrons la variété appartenant à l'espace S_ϱ à $\varrho=\frac{1}{2}n(n+3)$ dimensions, obtenue en posant

$$\varrho Y_{ik}=y_i z_k+y_k z_i$$

et en prenant les Y_{ik} comme coordonnées projectives d'un point Y de cet espace.

Les équations de la variété V_{2n} s'obtiennent en écrivant que le déterminant

$$|X_{ik}|$$

est de caractéristique un; celles de la variété Ω_{2n} en écrivant que le déterminant *symétrique*

$$|Y_{ik}|$$

est de caractéristique deux.

Considérons, dans l'espace S_r, l'homographie H d'équations

$$\varrho X'_{ik}=X_{ki}.$$

Cette homographie est harmonique et ses axes ponctuels sont

a) Un espace linéaire σ à ϱ dimensions, représenté par les équations

$$X_{ik}=X_{ki}.$$

---

[1]) Voir par exemple: E. BERTINI, *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi* (Pisa, Spoerri, 1907).

[2]) C. SEGRE, *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1891, pp. 192—204).

Cet espace coupe V_{2n} suivant une variété U dont les équations s'obtiennent en écrivant que le déterminant *symétrique* $|X_{ik}|$ est de caractéristique un. Cette variété est obtenue en rapportant projectivement aux hyperplans de σ les hyperquadriques d'un espace linéaire à n dimensions. Pour cette raison, nous l'appellerons la variété de VERONESE à n dimensions. L'ordre de la variété U est égal à 2^n.

b) Un espace linéaire σ' à $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$ dimensions, d'équations

$$X_{ik}+X_{ki}=0.$$

Cet axe ne rencontre pas la variété V_{2n}.

La variété V_{2n} est transformée en elle-même par l'homographie H et celle-ci engendre donc, sur cette variété, une involution I_2, d'ordre deux, dont les points unis forment la variété de VERONESE U.

2. Les hyperplans ξ passant par l'axe σ' de H sont unis pour cette homographie et découpent, sur V_{2n}, un système linéaire $|F|$, de variétés à $2n-1$ dimensions, de dimension ϱ, appartenant à l'involution I_2. Pour obtenir une variété image de cette involution, rapportons projectivement les variétés F aux hyperplans de l'espace S_ϱ, à ϱ dimensions. L'équation des hyperplans ξ étant

$$\Sigma \lambda_{ik}(X_{ik}+X_{ki})=0,$$

il suffit de poser

$$\varrho\, Y_{ik}=X_{ik}+X_{ki}=y_i z_k+y_k z_i.$$

On obtient donc ainsi les équations de la variété Ω_{2n}. On voit en effet immédiatement que si, dans un déterminant tiré de $|Y_{ik}|$ en effaçant $n-2$ lignes et $n-2$ colonnes, on remplace Y_{ik} par $X_{ik}+X_{ki}$, ce déterminant se ramène à une somme de déterminants identiquement nuls en raison des équations de V_{2n}.

D'ailleurs, on passe des équations de V_{2n} à celles de Ω_{2n} en considérant l'identité $\varrho\, y_i=z_i$, qui fait correspondre au couple ordonné $y\,z$, le couple ordonné $z\,y$. L'identité donne d'ailleurs les équations de l'homographie H et inversement, on déduit des équations de cette homographie $\varrho\, y_i=z_i$.

Les variétés Φ, qui correspondent sur Ω_{2n} aux variétés F, sont les sections hyperplanes de Ω_{2n}; elles forment un système de degré $\frac{1}{2}\binom{2n}{n}=\binom{2n-1}{n-1}$.

A la variété U de V_{2n}, caractérisée par $X_{ik}=X_{ki}$, correspond sur Ω_{2n} la variété de diramation D, dont les équations s'obtiennent en écrivant que le déterminant $|Y_{ik}|$ est de caractéristique un. La variété D est donc une variété de VERONESE à n dimensions; elle est double pour la variété Ω_{2n}.

3. Envisageons maintenant les hyperplans ξ' de S_r passant par l'axe σ de l'homographie H; ils ont pour équation

$$\Sigma \lambda_{ik}(X_{ik}-X_{ki})=0, \quad (i<k)$$

et découpent sur V_{2n} des variétés F' à $2n-1$ dimensions, formant un système linéaire de dimension $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$, appartenant à l'involution I_2. Désignons par Φ' les variétés qui correspondent sur Ω_{2n} aux variétés F'.

Pour obtenir l'équation des variétés Φ', élevons les deux membres de l'équation précédente au carré; nous obtenons

$$\Sigma \lambda_{ik}\lambda_{jh}(X_{ik}X_{jh}+X_{ki}X_{hj}-X_{ik}X_{hj}-X_{ki}X_{jh})=0,$$

ce qui s'écrit

$$\Sigma \lambda_{ik}\lambda_{jh}\begin{vmatrix} Y_{jk} & Y_{ji} \\ Y_{hk} & Y_{hi} \end{vmatrix}=0.$$

Cette équation représente une hyperquadrique de S_ϱ, passant par la variété de VERONESE D. Lorsque les coefficients λ varient, cette hyperquadrique engendre un système continu Σ, de dimension $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$ et d'indice $2^{\frac{1}{2}(n-1)(n+2)}$. Ces hyperquadriques découpent sur Ω_{2n} les variétés Φ'.

Soit $\overline{F}$ une section hyperplane quelconque de V_{2n}. A cette variété correspond sur Ω_{2n} une variété $\overline{\Phi}$ qui correspond également à la section hyperplane que H fait correspondre à $\overline{F}$. Lorsque $\overline{F}$ varie sur V_{2n}, $\overline{\Phi}$ engendre un système continu rationnel, dont les éléments sont par conséquent contenus totalement dans un système linéaire $|\overline{\Phi}|$. Aux variétés de ce système correspondent sur V_{2n} des variétés appartenant au système $|2\overline{F}|$.

Faisons varier $\overline{F}$ d'une manière continue dans le système $|\overline{F}|$ des sections hyperplanes de V_{2n} en la faisant tendre vers une variété F découpée par un hyperplan passant par l'axe σ' de H. La variété $\overline{\Phi}$ varie d'une manière continue dans $|\overline{\Phi}|$ et tend vers une section hyperplane Φ de Ω_{2n}, comptée deux fois. On a donc

$$|\overline{\Phi}| = |2\,\Phi|.$$

Faisons maintenant varier $\overline{F}$ d'une manière continue en la faisant tendre vers une variété F' découpée par un hyperplan passant par l'axe σ de H. La variété correspondante $\overline{\Phi}$ tend vers une variété Φ' augmentée de la variété à $2n-1$ dimensions formée par les points infiniment voisins de D, situés sur Ω_{2n}. On a donc

$$|\overline{\Phi}| = |2\,\Phi' + D| = |2\,\Phi|.$$

Il en résulte que les variétés $\overline{\Phi}$ sont découpées sur Ω_{2n} par les hyperquadriques de S_ϱ et que le long de chaque variété Φ', il y a une hyperquadrique de Σ touchant Ω_{2n} en chaque point d'intersection. Les variétés Φ' sont par suite d'ordre $\frac{1}{2}\binom{2n}{n}$.

La variété Ω_{2n} est l'enveloppe du système Σ, ayant pour base la variété de VERONESE *D.*

4. A chaque point Y de S_ϱ, faisons correspondre dans S_n l'hyperquadrique enveloppe d'équation

$$\Sigma \lambda_{ik}\, \xi_i\, \xi_k = 0.$$

Cette correspondance est projective.

Aux points de Ω_{2n} correspondent les hyperquadriques $n-1$ fois spécialisées, c'est-à-dire dégénérées en deux gerbes d'hyperplans. Aux points de D correspondent les hyperquadriques n fois spécialisées, c'est-à-dire dégénérées en deux gerbes d'hyperplans superposées.

Considérons deux points Y', Y'' de la variété D et soient y', y'' les centres des gerbes d'hyperplans correspondantes dans S_n. Aux points de la droite $Y'\,Y''$ correspondent dans S_n les hyperquadriques

$$(\Sigma\, y'_i\, \xi_i)^2 + \lambda\, (\Sigma\, y''_i\, \xi_i)^2 = 0.$$

Toutes les hyperquadriques de ce système sont $n-1$ fois spécialisées; chacune d'elles dégénère en deux gerbes d'hyperplans dont les sommets forment un couple d'une involution appartenant à la droite $y'\,y''$. Les points doubles de cette involution correspondent aux deux points d'appui Y', Y'' de la droite $Y'\,Y''$ sur la variété D.

En particulier, lorsque le point Y'' tend vers Y' sur D, c'est-à-dire lorsqu'il s'agit d'une droite tangente en Y' à la variété D, aux points de cette droite correspondent dans S_n les couples de points d'une involution parabolique sur une droite, c'est-à-dire les couples de points d'une droite dont l'un, y', est fixe.

Les cordes de la variété D sont, d'après ceci, situées dans la variété Ω_{2n}.

5. La variété V_{2n} contient deux séries ∞^n d'espaces à n dimensions. Un espace η de la première série est le lieu des points de la variété qui représentent les couples de points de S_n dont le premier, y, est fixe. Un espace ζ de la seconde série représente les couples de points dont le second, z, est fixe. Deux espaces de la même série ne se rencontrent pas; un espace η et un espace ζ ont en commun un point.

A un espace η, l'homographie H fait correspondre un espace ζ et réciproquement. Le point commun à ces deux espaces se trouve sur la variété unie U.

Les équations de l'espace η associé au point y sont

$$\frac{X_{0i}}{y_0} = \frac{X_{1i}}{y_1} = \ldots = \frac{X_{ki}}{y_k} = \ldots = \frac{X_{ni}}{y_n}$$

et celles de l'espace ζ associé au point z,

$$\frac{X_{i0}}{z_0} = \frac{X_{i1}}{z_1} = \ldots = \frac{X_{ik}}{z_k} = \ldots = \frac{X_{in}}{z_n}.$$

Si ces deux espaces sont conjugués par rapport à H, on a $y = z$ et à ces deux espaces, correspond, sur la variété Ω_{2n}, l'espace à n dimensions d'équations

$$y_i^2 \, Y_{kk} - 2 y_i \, y_k \, Y_{ki} + y_k^2 \, Y_{ii} = 0.$$

On reconnaît immédiatement que les droites passant par le point Y et appartenant à cet espace, sont tangentes à D au point Y. Il en résulte que

Aux espaces à n dimensions η, ζ de V_{2n} conjugés dans l'homographie H, correspondent dans Ω_{2n} les espaces à n dimensions tangents à la variété de VERONESE *D.*

6. Considérons la variété de SEGRE V' à $2(n-1)$ dimensions, représentant sur V_{2n} les couples de point y, z de deux hyperplans

$$\mu_0 \, y_0 + \mu_1 \, y_1 + \ldots + \mu_n \, y_n = 0,$$
$$\nu_0 \, z_0 + \nu_1 \, z_1 + \ldots + \nu_n \, z_n = 0$$

de S_n. Cette variété V' est découpée sur V_{2n} par l'espace linéaire à $(n-1)(n+1)$ dimensions

$$\mu_0 \, X_{0i} + \mu_1 \, X_{1i} + \ldots + \mu_n \, X_{ni} = 0,$$
$$\nu_0 \, X_{i0} + \nu_1 \, X_{i1} + \ldots + \nu_n \, X_{in} = 0.$$

Pour que la variété V' soit transformée en elle-même par l'homographie H, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\mu_0}{\nu_0} = \frac{\mu_1}{\nu_1} = \ldots = \frac{\mu_n}{\nu_n}.$$

A cette variété correspond alors sur Ω_{2n} une variété Ω', située dans l'espace à $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$ dimensions

$$\mu_0 \, Y_{0i} + \mu_1 \, Y_{1i} + \ldots + \mu_n \, Y_{ni} = 0.$$

Considérons la section de la variété de VERONESE D par cet espace. Il lui correspond dans S_n l'hyperplan

$$\mu_0 \, x_0 + \mu_1 \, x_1 + \ldots + \mu_n \, x_n = 0.$$

Par conséquent, la section considérée est une variété de VERONESE D' à $n-1$ dimensions. Cette variété détermine complètement l'espace linéaire à $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$ dimensions. Les cordes de D' étant des cordes de D, appartiennent à Ω_{2n}. L'espace linéaire déterminé par D' coupe donc Ω_{2n} suivant une variété de même construction, à $2(n-1)$ dimensions.

Liège, le 28 juin 1941.