Mathematics. — *Ueber die Entwicklung der unvollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art in stark konvergenten Reihen.* III. Von S. C. VAN VEEN. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of November 29, 1941.)

§ 2. *α in der Nähe von $\frac{\pi}{2}$; β klein.*

A. Das unvollständige elliptische Integral erster Art.

$$\left.\begin{aligned}
F(\sin\alpha,\beta) &= \int_0^\beta \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\,.\sin^2\varphi}} = \int_0^\beta \frac{\cos\varphi\,.d\varphi}{\sqrt{(1-\sin^2\varphi)(1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi)}} = \\
&= \int_0^\beta \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(1-\sin\alpha\,.\sin^2\varphi)^2-(1-\sin\alpha)^2\sin^2\varphi}} \\
&= \int_0^\beta \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{(1-\sin\alpha\,.\sin^2\varphi)} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}\right)\frac{(1-\sin\alpha)^{2n}\sin^{2n}\varphi}{(1-\sin\alpha\sin^2\varphi)^{2n}} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}\right)(1-\sin\alpha)^{2n}\int_0^{\sin\beta}\frac{x^{2n}\,dx}{(1-\sin\alpha\,.x^2)^{2n+1}} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}\right)\frac{(1-\sin\alpha)^{2n}}{(\sin\alpha)^{n+\frac{1}{2}}}\int_0^{\sin\beta\sqrt{\sin\alpha}}\frac{y^{2n}\,dy}{(1-y^2)^{2n+1}}
\end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Setzt man

$$y=\frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}, \quad \text{oder} \quad z=\tfrac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y},$$

also

$$\frac{dz}{dy}=\frac{1}{1-y^2}; \quad \frac{y}{1-y^2}=\frac{e^{4z}-1}{4e^{2z}}=\frac{e^{2z}-e^{-2z}}{4}$$

und

$$\frac{1-\sin\alpha}{\sqrt{\sin\alpha}}=x; \quad \frac{1+\sin\beta\sqrt{\sin\alpha}}{1-\sin\beta\sqrt{\sin\alpha}}=w,$$

so wird

$$\left.\begin{aligned}
&\int\limits_0^{\sin\beta\sqrt{\sin\alpha}} \frac{y^{2n}\,dy}{(1-y^2)^{2n+1}} = \int\limits_0^{\frac{1}{2}\log w} \left(\frac{e^{2z}-e^{-2z}}{4}\right)^{2n} dz = \frac{1}{4^{2n}} \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \binom{2n}{p} \int\limits_0^{\frac{1}{2}\log w} e^{4(n-p)z}\,dz = \\
&= \frac{1}{4^{2n+1}} \sum_{\substack{p=0\\ p\neq n}}^{2n} (-1)^p \binom{2n}{p} \frac{w^{2(n-p)}}{n-p} + \frac{(-1)^n}{4^{2n}} \binom{2n}{n} \tfrac{1}{2} \log w = \\
&= \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} \left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right) \log w + \frac{w^{2n}}{4^{2n+1}} \sum_{\substack{p=0\\ p\neq n}}^{2n} (-1)^p \binom{2n}{p} \frac{w^{-2p}}{n-p}
\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Aus (25) und (26) ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}
F(\sin\alpha,\beta) &= \frac{1}{2\sqrt{\sin\alpha}} \log w \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2 \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \\
&+ \frac{1}{4\sqrt{\sin\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right) \left(\frac{xw}{4}\right)^{2n} \sum_{\substack{p=0\\ p\neq n}}^{2n} (-1)^p \binom{2n}{p} \frac{w^{-2p}}{n-p}, \\
\text{mit} \qquad & x = \frac{1-\sin\alpha}{\sqrt{\sin\alpha}}; \quad w = \frac{1+\sin\beta\sqrt{\sin\alpha}}{1-\sin\beta\sqrt{\sin\alpha}}
\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Die erste Reihe in (27) konvergiert für

$$\frac{x}{2} = \frac{1-\sin\alpha}{2\sqrt{\sin\alpha}} \leqslant 1, \quad \text{oder} \quad \sin\alpha \geqslant 3-2\sqrt{2}; \quad \alpha \geqslant 9^\circ.53'.$$

Die Konvergenz ist sehr stark, wenn α in der Nähe von $\frac{\pi}{2}$ liegt. Auch die zweite Reihe in (27) konvergiert dann stark, *wenn wenigstens* $\sin\beta$ *nicht in der Nähe von* 1 *liegt.*

Wegen

$$\left|\sum_{\substack{p=0\\ p\neq n}}^{2n} (-1)^p \binom{2n}{p} \frac{w^{-2p}}{n-p}\right| < \sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p} w^{-2p} = (1+w^{-2})^{2n} = \left\{\frac{2(1+\sin^2\beta\sin\alpha)}{(1+\sin\beta\sqrt{\sin\alpha})^2}\right\}^{2n}$$

bildet

$$\frac{xw}{4} \cdot \frac{2(1+\sin^2\beta\sin\alpha)}{(1+\sin\beta\sqrt{\sin\alpha})^2} = \frac{x}{2}\,\frac{1+\sin^2\beta\sin\alpha}{1-\sin^2\beta\sin\alpha} < 1$$

oder

$$0 \leqslant \sin^2\beta < \frac{2-x}{(2+x)\sin\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

eine *hinreichende* Bedingung für die Konvergenz der zweiten Reihe in (27). (Die erste Reihe konvergiert dann auch, wegen $x \leqslant 2$) (vgl. Fig. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **44** 911 (1941)).

Das Hauptglied der Reihe (27) ist

$$F(\sin\alpha,\beta) \approx \frac{1}{2\sqrt{\sin\alpha}} \log w = \frac{1}{2\sqrt{\sin\alpha}} \log \frac{1+\sin\beta\sqrt{\sin\alpha}}{1-\sin\beta\sqrt{\sin\alpha}}, \quad (29)$$

B. Das unvollständige elliptische Integral zweiter Art.

$$
\left.\begin{aligned}
E(\sin\alpha,\beta) &= \int_0^\beta \sqrt{1-\sin^2\alpha\,\sin^2\varphi}\,d\varphi = \int_0^\beta \frac{\cos\varphi\,(1-\sin^2\alpha\,\sin^2\varphi)}{\sqrt{(1-\sin^2\varphi)\,(1-\sin^2\alpha\,\sin^2\varphi)}}\,d\varphi = \\
&= \int_0^\beta \frac{\cos\varphi\,(1-\sin^2\alpha\,.\,\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{(1-\sin\alpha\,.\,\sin^2\varphi)^2-(1-\sin\alpha)^2\sin^2\varphi}} = \\
&= \int_0^\beta \frac{\cos\varphi\,(1-\sin^2\alpha\,.\,\sin^2\varphi)\,d\varphi}{1-\sin\alpha\,.\,\sin^2\varphi} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right)\frac{(1-\sin\alpha)^{2n}\sin^{2n}\varphi}{(1-\sin\alpha\,.\,\sin^2\varphi)^{2n}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\sin\alpha}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right)x^{2n}\int_0^{\sin\beta\sqrt{\sin\alpha}}\frac{y^{2n}\,(1-\sin\alpha\,y^2)}{(1-y^2)^{2n+1}}\,dy = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\sin\alpha}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right)x^{2n}\int_0^{\frac{\log w}{2}}\left(\frac{e^{2z}-e^{-2z}}{4}\right)^{2n}\left\{1-\sin\alpha\,.\left(\frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}\right)^2\right\}dz.
\end{aligned}\right\}\quad (30)
$$

Für $n \geqq 1$ ist

$$
\left.\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\log w}{2}}\left(\frac{e^{2z}-e^{-2z}}{4}\right)^{2n}\left\{1-\sin\alpha\left(\frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}\right)^2\right\}dz = \\
&= \frac{1}{4^{2n}}\int_0^{\frac{\log w}{2}}(e^{2z}-e^{-2z})^{2n}\,dz - \frac{\sin\alpha}{4^{2n}}\int_0^{\frac{\log w}{2}}\frac{(e^{2z}-e^{-2z})^{2n}\,(e^z-e^{-z})^4}{(e^{2z}-e^{-2z})^2}\,dz = \\
&= \frac{1}{4^{2n}}\int_0^{\frac{\log w}{2}}(e^{2z}-e^{-2z})^{2n}\,dz - \frac{\sin\alpha}{4^{2n}}\int_0^{\frac{\log w}{2}}(e^{2z}-e^{-2z})^{2n}\,dz - \frac{8\sin\alpha}{4^{2n}}\int_0^{\frac{\log w}{2}}(e^{2z}-e^{-2z})^{2n-2}\,dz \\
&+ \frac{\sin\alpha}{4^{2n-1}}\int_0^{\frac{\log w}{2}}(e^{2z}-e^{-2z})^{2n-z}\,(e^{2z}+e^{-2z})\,dz = \\
&= \frac{1-\sin\alpha}{4^{2n+1}}\sum_{\substack{p=0\\ p\neq n}}^{2n}(-1)^p\binom{2n}{p}\frac{w^{2(n-p)}}{n-p} + \frac{(-1)^n}{4^{2n}}\binom{2n}{n}\frac{(1-\sin\alpha)}{2}\log w \\
&- \frac{8\sin\alpha}{4^{2n+1}}\sum_{\substack{p=0\\ p\neq n-1}}^{2n-2}(-1)^p\binom{2n-2}{p}\frac{w^{2(n-1-p)}}{n-1-p} - \\
&\qquad \frac{(-1)^{n-1}.8}{4^{2n}}.\binom{2n-2}{n-1}\frac{\sin\alpha}{2}.\log w + \frac{\sin\alpha}{4^{2n-1}}\,\frac{(w-w^{-1})^{2n-1}}{2n-1}.
\end{aligned}\right\}\quad (31)
$$

Für $n = 0$ ist

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\log w}{2}}\left\{1-\sin\alpha\left(\frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}\right)^2\right\}dz=\int_0^{\frac{\log w}{2}}\left\{(1-\sin\alpha)+\frac{4\sin\alpha\,.\,e^{2z}}{(e^{2z}+1)^2}\right\}dz=\\&=\frac{1-\sin\alpha}{2}\log w-\frac{2\sin\alpha}{w+1}+\sin\alpha=\frac{1-\sin\alpha}{2}\log w+\sin\alpha\left(\frac{w-1}{w+1}\right).\end{aligned}\right\}\quad .\quad (32)$$

Aus (30), (31) und (32) ergibt sich nach einiger Reduktion die Entwicklung

$$\left.\begin{aligned}&E(\sin\alpha,\beta)=\frac{x}{2}\log w+\sin\beta\,.\,\sin\alpha+\frac{2w\sqrt{\sin\alpha}}{w^2-1}\left[1-\sqrt{1-\left\{\frac{x(w^2-1)}{4w}\right\}^2}\,\right]\\&+\frac{1}{2\sqrt{\sin\alpha}}\log w\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}\right)^2\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\left(1+\frac{2n+1}{2n-1}\sin\alpha\right)\\&+\frac{1}{4\sqrt{\sin\alpha}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}\right)\left(\frac{xw}{4}\right)^{2n}\\&\left\{(1-\sin\alpha)\sum_{\substack{p=0\\p\neq n}}^{2n}(-1)^p\binom{2n}{p}\frac{w^{-2p}}{n-p}-8\sin\alpha\sum_{\substack{p=0\\p\neq n-1}}^{2n-2}(-1)^p\binom{2n-2}{p}\cdot\frac{w^{-2p-2}}{n-p-1}\right\},\end{aligned}\right\}(33)$$

mit

$$x=\frac{1-\sin\alpha}{\sqrt{\sin\alpha}};\quad w=\frac{1+\sin\beta\sqrt{\sin\alpha}}{1-\sin\beta\sqrt{\sin\alpha}}$$

mit dem Hauptglied

$$\left.\begin{aligned}E(\sin\alpha,\beta)&\approx\frac{x}{2}\log w+\sin\beta\,.\,\sin\alpha=\\&=\frac{1-\sin\alpha}{2\sqrt{\sin\alpha}}\,.\,\log\frac{1+\sin\beta\,.\sqrt{\sin\alpha}}{1-\sin\beta\,.\sqrt{\sin\alpha}}+\sin\beta\,.\,\sin\alpha\end{aligned}\right\}(34)$$

Die Konvergenzbedingungen der Reihen (33) sind identisch mit den Bedingungen der Reihen (27), also:

Hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Reihe (33) ist

$$0\leqq\sin^2\beta<\frac{2-x}{(2+x)\sin\alpha}\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad (35)$$

(Fortsetzung folgt.)