Mathematics. — *Stark konvergente Entwicklungen für die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art.* IV. Von S. C. VAN VEEN. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of December 27, 1941.)

§ 4. *Erweiterung der vorhergehenden Ergebnisse für komplexe Werte von k.*

Bisher haben wir vorausgesetzt, dass k nur reelle Werte mit $0 \leqq k < 1$ durchläuft. *Von jetzt an wird k beliebig komplex vorausgesetzt.*

Die beiden Integrale

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi}}$$

und

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi$$

sind analytische Funktionen von k im Innern der von $k = +1$ nach $+\infty$ und von $k = -1$ nach $-\infty$ aufgeschlitzten komplexen k-Ebene.

Sie sind in diesem Gebiet eindeutig bestimmt durch die Verabredung

$$|\arg(1-k \sin\varphi)| < \pi$$

und

$$|\arg(1+k \sin\varphi)| < \pi,$$

also

$$\left|\arg\sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi}\right| = \tfrac{1}{2}\left|\arg(1-k\sin\varphi) + \arg(1+k\sin\varphi)\right| < \pi.$$

Für $k \to 0$ wird dann

$$K(k) \to +\frac{\pi}{2}; \quad E(k) \to +\frac{\pi}{2},$$

und für $|k| < 1$ gelten die hypergeometrischen Entwicklungen

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \cdot F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; 1; k^2);$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \cdot F(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; 1; k^2).$$

Setzt man in (11), oder

$$k_{n-1} = \frac{2\sqrt{k_n}}{1+k_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

$$k_n = e^{i\varphi}, \text{ mit } |\varphi| < \pi,$$

und wird $\sqrt{k_n}$ durch $+e^{\frac{i\varphi}{2}}$ bestimmt, so wird

$$k_{n-1} = \frac{2}{e^{-\frac{i\varphi}{2}} + e^{+\frac{i\varphi}{2}}} = \frac{1}{\cos\frac{\varphi}{2}}, \text{ mit } \left|\frac{\varphi}{2}\right| < \frac{\pi}{2}.$$

Während also k_n den Einheitskreis $|k_n| = 1$ durchläuft, durchläuft k_{n-1} die reelle Gerade von $+1$ nach $+\infty$.

Weiter folgt aus (48), dass

$$\text{einerseits } k_n = 0 \;\to\; k_{n-1} = 0,$$

$$\text{andrerseits } k_n = \infty \;\to\; k_{n-1} = 0,$$

d.h.:

Das Innere der ganzen von $k_{n-1} = +1$ nach $+\infty$ aufgeschlitzten k_{n-1}-Ebene wird durch die Transformation (48)

einerseits auf das *Innere* des Einheitskreises $|k_n| = 1$,
andrerseits auf das *Aeussere* des Einheitskreises $|k_n| = 1$

abgebildet.

Weil wir nur die erste Alternative wünschen, sind die Wurzelzeichen in (9) oder besser in

$$k_n = \frac{1-\sqrt{1-k_{n-1}^2}}{1+\sqrt{1-k_{n-1}^2}}$$

so zu bestimmen, dass umgekehrt mit $k_{n-1} = 0$ *nur* noch $k_n = 0$ korrespondiert, d.h. es soll

$$\lim_{k_{n-1}\to 0} \arg\sqrt{1-k_{n-1}^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

sein.

Man erreicht dieses Ergebnis durch die Feststellung

$$\left.\begin{array}{l} |\arg(1-k_{n-1})| < \pi \\ |\arg(1+k_{n-1})| < \pi \end{array} \quad (n \geqq 2)\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

Weil die Argumente von $1+k_{n-1}$ und $1-k_{n-1}$ für komplexe Werte von k_{n-1} ein entgegengesetztes Zeichen erhalten, so ist

$$\left.\begin{array}{l} \left|\arg\sqrt{1-k_{n-1}^2}\right| = \tfrac{1}{2}\left|\arg(1-k_{n-1}) + \arg(1+k_{n-1})\right| \leqq \\ \qquad \leqq \tfrac{1}{2}\, Max.\{|\arg(1-k_{n-1})|, |\arg.(1+k_{n-1})|\} < \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \quad (50')$$

Durch die Verabredung (50) bzw. (50') sind alle vorkommenden Grössen k_n und $\sqrt{1-k_n^2}$ eindeutig bestimmt. Jeder beliebige Punkt k_1 aus dem Innern der von $+1$ nach $+\infty$ aufgeschlitzten k_1-Ebene wird dann durch (48) (oder durch ihre Umkehrung) in einen Punkt k_2 *innerhalb* des Einheitskreises G_1 $(= |k_2| < 1)$ transformiert.

Durch iterierte Transformation wird k_2 in einen Punkt k_3 *innerhalb* des Gebietes G_2 transformiert, wo G_2 ein Teilbereich von G_1 ist, u.s.w.

Wegen (48) ist

$$|\sqrt{k_n}| \leqq \frac{1+|k_n|}{2}\, |k_{n-1}| < |k_{n-1}| \qquad (n \geqq 2)$$

also, wegen $|k_2| < 1$

$$|k_n| < |k_{n-1}| \qquad (n \geqq 2)$$

und

$$1 > |k_2| > |k_3| \ldots\ldots > |k_n| \ldots\ldots \qquad (51)$$

In derselben Weise wird durch die Transformation

$$l_{n-1} = \frac{2\sqrt{l_n}}{1+l_n} \qquad (\text{vgl. } (33))$$

unter der Feststellung

$$\left.\begin{array}{l} |arg\,(1-l_{n-1})| < \pi \\ |arg\,(1+l_{n-1})| < \pi \end{array}\right. \quad (n \geqq 2)$$

$$\left.\begin{array}{l} |arg \sqrt{1-l_{n-1}^2}| = \tfrac{1}{2}\,|arg\,.\,(1-l_{n-1}) + arg\,.\,(1+l_{n-1})| \leqq \\ \leqq \tfrac{1}{2}\,Max\,\{|arg\,(1-l_{n-1})|,\ |arg\,.\,(1+l_{n-1})|\} < \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \qquad (52)$$

jeder beliebige Punkt l_{n-1} aus dem Innern der von $+1$ nach $+\infty$ aufgeschlitzten l_{n-1}-Ebene in einen Punkt l_n innerhalb des Einheitskreises $|l_n| < 1$ transformiert.

Hieraus ergibt sich

$$1 > |l_2| > |l_3| \ldots\ldots > |l_n| \ldots\ldots \qquad (53)$$

Insbesondere ergibt sich aus (50') und (52) für $n = 2$

$$|arg\,.\sqrt{1-k_1^2}| = |arg\,.\,l_1| < \frac{\pi}{2};$$

$$|arg\,.\sqrt{1-l_1^2}| = |arg\,.\,k_1| < \frac{\pi}{2}.$$

Die letztere Ungleichung bedeutet keinerlei Beschränkung in der Wahl der Grösse k_1, denn für die Integrale $K(k)$ und $E(k)$ ist nicht die Wahl der Grösse k, sondern nur die der Grösse k^2 wesentlich.

Definiert man also

$$|arg\,k^2| < \pi$$

so ist, wie oben

$$|arg\,.\,k| < \frac{\pi}{2}.$$

Die Integrale $K(k)$ und $E(k)$ sind dann analytische Funktionen von k^2 im Innern der von $k^2 = +1$ nach $+\infty$ aufgeschlitzten k^2-Ebene.

Weil die Entwicklungen K, K^*, E und E^* für reelles k mit $0 \leqq k < 1$ gelten, so findet man durch analytische Fortsetzung, wenn man weiter in (35) für $log \dfrac{4}{l_q}$ den Hauptwert wählt, zusammenfassend:

Wenn

$$\left.\begin{array}{l} |arg\,(1 \pm k_{n-1})| < \pi\,;\ |arg\,(1 \pm (l_{n-1})| < \pi\,; \\ \\ |arg\,.\sqrt{1-k_{n-1}^2}| < \dfrac{\pi}{2};\ |arg\,.\sqrt{1-l_{n-1}^2}| < \dfrac{\pi}{2}, \end{array}\right\} \quad (n \geqq 2)$$

also

so gelten alle Entwicklungen K, K^*, E, sowie die aus (47) *hervorgehenden Entwicklungen E^* von II an für* **alle** *komplexen Werte von k in der von $k = +1$ nach $+\infty$ aufgeschlitzten rechten Halbebene* $\Re\,(k) \geqq 0$ (oder für alle komplexen Werte $z = k^2$ in der von $z = +1$ nach $+\infty$ aufgeschlitzten z-Ebene).

Die $n$ten Entwicklungen stellen dann innerhalb des Einheitskreises $|k_n| = 1$, bzw. $|l_n| = 1$ konvergente Potenzreihen dar (ausgenommen die Reihen KK (vgl. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., XLIV, N⁰. 8, 1941, S. 973)).

Schliesslich ist zu bemerken, dass man durch geeignete Wahl der Reihen K oder K^*, (bzw. E oder E^*) nach einigen Transformationen immer für *alle* komplexen Werte von k mit $\Re\,(k) \geqq 0$ eine starke Konvergenz erzeugen kann.

Wegen (51) ist

$$|k_n| < 1 \quad \text{für} \quad n > 1,$$

und wegen (53)

$$|l_n| < 1 \quad \text{für} \quad n > 1.$$

Wenn

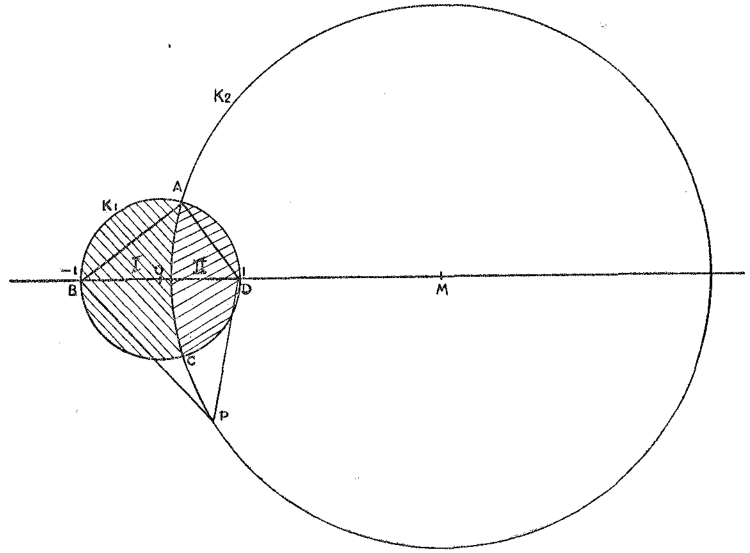
$$|k_3| \leqq \varrho < 1 \qquad (54)$$

ist, so ist, wegen (48)

$$|k_n| \leqq \left(\frac{1+|k_n|}{2}\right)^2 |k_{n-1}|^2 < |k_{n-1}|^2 \quad \text{für} \quad n \geqq 3,$$

also allgemein

$$|k_n| \leqq |k_3|^{2^{n-3}} \leqq \varrho^{2^{n-3}} \quad \text{für} \quad n \geqq 3.$$



K_1 ist der Einheitskreis um O, K_2 ist der Apollonische Kreis bei dem Verhältnis $\dfrac{PB}{PD} = \tfrac{4}{3}$, also $AB = 1{,}6$; $AD = 1{,}2$.

k_3 liegt innerhalb des Kreises K_1.

1. Wenn k_3 im Gebiet $\mathrm{I} \equiv ABC$ (zwischen K_1 und K_2, K_2 eingeschlossen) liegt, so ist

$$|1 + k_3| < AB = 1{,}6$$

also, wegen (48)

$$|k_3| = \left|\frac{1+k_3}{2}\right|^2 |k_2|^2 < 0{,}8^2$$

Man kann also in (54) $\varrho = 0{,}8^2$ wählen, und

$$|k_n| \leqslant (0{,}8)^{2^{n-2}}, \quad n \geqslant 3.$$

Die Reihen (12) und (42) liefern dann für $n \geqslant 3$ stark konvergente Entwicklungen.

2. Wenn k_3 im Gebiet II $\equiv ACD$ (zwischen K_1 und K_2, K_2 eingeschlossen) liegt, so ist

$$\left|\frac{1-k_3}{1+k_3}\right| \leqslant \tfrac{3}{4}$$

also, wegen (10)

$$\left|\sqrt{1-k_2^2}\right| \leqslant \tfrac{3}{4}.$$

Setzt man in (32)

$$l_1 = \sqrt{1-k_2^2}, \quad \text{also} \quad |l_1| \leqslant \tfrac{3}{4},$$

so folgt aus

$$l_{n-1} = \frac{2\sqrt{l_n}}{1+l_n}$$

wie oben,

$$|l_n| \leqslant |l_1|^{2^{n-1}} \leqslant (\tfrac{3}{4})^{2^{n-1}},$$

und die Reihen (35) und (47) konvergieren schon stark für $n \geqslant 1$, *wenn man wenigstens* $k_2 = \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}$ *statt* k_1 *verwendet.*

Wenn $|k|$ gross ist, kann man auch mit Vorteil die Transformationen

$$k \,.\, K(k) = K\left(\frac{1}{k}\right) + i\,\{\text{sgn.}\, I(k^2)\}\, K\left(\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}\right)$$

und

$$k \,.\, E(k) = (1-k^2)\, K\left(\frac{1}{k}\right) + k^2\, E\left(\frac{1}{k}\right) + i\,\{\text{sgn.}\, I(k^2)\}\left\{K\left(\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}\right) - k^2\, E\left(\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}\right)\right\}$$

anwenden, wo $K\left(\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}\right)$ durch die Entwicklungen K^*, und $E\left(\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}\right)$ durch die Entwicklungen E^* berechnet wird $\left(l_q = \frac{1}{k}\right)$[1].

Dordrecht, 16. Dezember 1941.

[1] Der Beweis wird in der nächsten Nr. der Proceedings erscheinen.

Mathematics. — *Ueber die Entwicklung der unvollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art in stark konvergente Reihen.* IV. Von S. C. VAN VEEN. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of December 27, 1941.)

§ 3. *α und β in der Nähe von* $\frac{\pi}{2}$.

Im folgenden wird zur Abkürzung gesetzt

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= \sqrt{1-\sin^2\alpha \,.\, \sin^2\beta} = \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta\,\sin^2\alpha}\,; \\ x &= \frac{1-\sin\alpha}{\sqrt{\sin\alpha}}; \qquad y = \frac{\Delta + \cos\beta\sqrt{\sin\alpha}}{\Delta - \cos\beta\sqrt{\sin\alpha}}; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (36)$$

$$\left.\begin{aligned} F(\sin\alpha, \beta) &= \int_0^\beta \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha \,.\, \sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha \,.\, \sin^2\varphi}} - \\ &- \int_\beta^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\varphi - \cos^2\alpha\cos^2\varphi}} = K(\alpha) - \int_0^{\frac{\pi}{2}-\beta} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\varphi - \cos^2\alpha\sin^2\varphi}}. \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Setzt man in das letzte Integral

$$\sin\varphi = \operatorname{cotg}\alpha \,.\, \operatorname{sh} u,$$

so findet man

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\beta} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\varphi - \cos^2\alpha\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sin\alpha} \int_0^{\log\left(\frac{\cos\beta\sin\alpha + \Delta}{\cos\alpha}\right)} \frac{du}{\sqrt{1-\operatorname{cotg}^2\alpha \,.\, \operatorname{sh}^2 u}}. \quad (38)$$

Ebenso ist

$$\left.\begin{aligned} E(\sin\alpha, \beta) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}\, d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}-\beta} \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\varphi - \cos^2\alpha \,.\, \sin^2\varphi}\, d\varphi = \\ &= E(\alpha) - \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} \int_0^{\log\left(\frac{\cos\beta\sin\alpha + \Delta}{\cos\alpha}\right)} \frac{\operatorname{ch}^2 u\, du}{\sqrt{1-\operatorname{cotg}^2\alpha \,.\, \operatorname{sh}^2 u}}. \end{aligned}\right\} \quad (39)$$