

also, wegen (48)

$$|k_3| = \left| \frac{1+k_3}{2} \right|^2 |k_2|^2 < 0,8^2$$

Man kann also in (54) $\varrho = 0,8^2$ wählen, und

$$|k_n| \leq (0,8)^{2n-2}, \quad n \geq 3.$$

Die Reihen (12) und (42) liefern dann für $n \geq 3$ stark konvergente Entwicklungen.
2. Wenn k_3 im Gebiet II $\equiv ACD$ (zwischen K_1 und K_2 , K_2 eingeschlossen) liegt, so ist

$$\left| \frac{1-k_3}{1+k_3} \right| \leq \frac{3}{4}$$

also, wegen (10)

$$|\sqrt{1-k_2^2}| \leq \frac{3}{4}.$$

Setzt man in (32)

$$l_1 = \sqrt{1-k_2^2}, \quad \text{also } |l_1| \leq \frac{3}{4},$$

so folgt aus

$$l_{n-1} = \frac{2\sqrt{l_n}}{1+l_n}$$

wie oben,

$$|l_n| \leq |l_1|^{2^{n-1}} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{2^{n-1}},$$

und die Reihen (35) und (47) konvergieren schon stark für $n \geq 1$, wenn man wenigstens $k_2 = \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}$ statt k_1 verwendet.

Wenn $|k|$ gross ist, kann man auch mit Vorteil die Transformationen

$$k \cdot K(k) = K\left(\frac{1}{k}\right) + i \{ \text{sgn. } I(k^2) \} K\left(\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}\right)$$

und

$$k \cdot E(k) = (1-k^2)K\left(\frac{1}{k}\right) + k^2 E\left(\frac{1}{k}\right) + i \{ \text{sgn. } I(k^2) \} \left\{ K\left(\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}\right) - k^2 E\left(\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}\right) \right\}$$

anwenden, wo $K\left(\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}\right)$ durch die Entwicklungen K^* , und $E\left(\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}\right)$ durch

die Entwicklungen E^* berechnet wird ($l_q = \frac{1}{k}$)¹⁾.

Dordrecht, 16. Dezember 1941.

¹⁾ Der Beweis wird in der nächsten Nr. der Proceedings erscheinen.

Mathematics. — Ueber die Entwicklung der unvollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art in stark konvergente Reihen. IV. Von S. C. VAN VEEN. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of December 27, 1941.)

§ 3. α und β in der Nähe von $\frac{\pi}{2}$.

Im folgenden wird zur Abkürzung gesetzt

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \sqrt{1-\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta} = \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta \sin^2 \alpha}; \\ x &= \frac{1-\sin \alpha}{\sqrt{\sin \alpha}}; & y &= \frac{\Delta + \cos \beta \sqrt{\sin \alpha}}{\Delta - \cos \beta \sqrt{\sin \alpha}}; \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$$\left. \begin{aligned} F(\sin \alpha, \beta) &= \int_0^\beta \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \varphi}} - \\ &- \int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \varphi - \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi}} = K(\alpha) - \int_0^{\frac{\pi}{2}-\beta} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \varphi - \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi}}. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Setzt man in das letzte Integral

$$\sin \varphi = \cot \alpha \cdot \sin u,$$

so findet man

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\beta} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \varphi - \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{\sin \alpha} \int_0^{\log\left(\frac{\cos \beta \sin \alpha + \Delta}{\cos \alpha}\right)} \frac{du}{\sqrt{1-\cot^2 \alpha \cdot \sin^2 u}}. \quad (38)$$

Ebenso ist

$$\left. \begin{aligned} E(\sin \alpha, \beta) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 \alpha \sin^2 \varphi} d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}-\beta} \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \varphi - \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi} d\varphi = \\ &= E(\alpha) - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \int_0^{\log\left(\frac{\cos \beta \sin \alpha + \Delta}{\cos \alpha}\right)} \frac{\sin^2 u du}{\sqrt{1-\cot^2 \alpha \cdot \sin^2 u}}. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

In (38) ist

$$\int_0^{\log\left(\frac{\cos\beta\sin\alpha+\Delta}{\cos\alpha}\right)} \frac{du}{\sqrt{1-\cot^2\alpha \cdot sh^2 u}} = \int_0^{\log\left(\frac{\cos\beta\sin\alpha+\Delta}{\cos\alpha}\right)} \frac{du}{\sqrt{\left(ch^2 u - \frac{sh^2 u}{\sin\alpha}\right)^2 - \frac{sh^2 u \cdot ch^2 u (1-\sin\alpha)^2}{\sin^2\alpha}}} = \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (40)$$

$$= \sin\alpha \int_0^{\log\left(\frac{\cos\beta\sin\alpha+\Delta}{\cos\alpha}\right)} \frac{du}{ch^2 u (\sin\alpha - th^2 u) \sqrt{1 - \frac{th^2 u (1-\sin\alpha)^2}{(\sin\alpha - th^2 u)^2}}}.$$

Setzt man hier

$$th u = \sqrt{\sin\alpha} \cdot th v; \quad y = \frac{\Delta + \cos\beta\sqrt{\sin\alpha}}{\Delta - \cos\beta\sqrt{\sin\alpha}}; \quad \dots \quad (41)$$

so ist

$$\int_0^{\log\left(\frac{\cos\beta\sin\alpha+\Delta}{\cos\alpha}\right)} \frac{du}{\sqrt{1-\cot^2\alpha \cdot sh^2 u}} = \sqrt{\sin\alpha} \int_0^{\frac{\log y}{2}} \frac{dv}{ch^2 v \cdot (1-th^2 v) \sqrt{1 - \frac{(1-\sin\alpha)^2 th^2 v}{\sin\alpha \cdot (1-th^2 v)^2}}} = \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (42)$$

$$= \sqrt{\sin\alpha} \int_0^{\frac{\log y}{2}} \frac{dv}{\sqrt{1-x^2 sh^2 v \cdot ch^2 v}} = \sqrt{\sin\alpha} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \right) x^{2n} \int_0^{\frac{\log y}{2}} sh^{2n} v \cdot ch^{2n} v \cdot dv =$$

$$= \sqrt{\sin\alpha} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \right) x^{2n} \int_0^{\frac{\log y}{2}} \left(\frac{e^{2v} - e^{-2v}}{4} \right)^{2n} dv.$$

Nach (26) III ist

$$\int_0^{\frac{\log y}{2}} \left(\frac{e^{2v} - e^{-2v}}{4} \right)^{2n} dv = \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} \left(\frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \right) \log y + \frac{y^{2n}}{4^{2n+1}} \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \binom{2n}{p} \frac{y^{-2p}}{n-p}, \quad (43)$$

Schliesslich ergibt sich aus (37)–(43):

$$F(\sin\alpha, \beta) = K(\alpha) - \frac{1}{2\sqrt{\sin\alpha}} \log y \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \right)^2 \left(\frac{x}{2} \right)^{2n} - \frac{1}{4\sqrt{\sin\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \right) \left(\frac{xy}{4} \right)^{2n} \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \binom{2n}{p} \frac{y^{-2p}}{n-p}. \quad (44)$$

Bemerkt man noch, dass

$$\left. \begin{array}{l} \frac{xy}{4} = \frac{1-\sin\alpha}{4\sqrt{\sin\alpha}} \cdot \frac{\Delta + \cos\beta\sqrt{\sin\alpha}}{\Delta - \cos\beta\sqrt{\sin\alpha}} = \\ = \frac{1-\sin\alpha}{4\sqrt{\sin\alpha}} \cdot \frac{(\Delta + \cos\beta\sqrt{\sin\alpha})^2}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha \cdot \sin^2\beta)} = \frac{(\Delta + \cos\beta\sqrt{\sin\alpha})^2}{4\sqrt{\sin\alpha} \cdot (1+\sin\alpha \cdot \sin^2\beta)}, \end{array} \right\} (45)$$

so gewinnt man die für α und β in der Nähe von $\frac{\pi}{2}$ stark konvergente Entwicklung

$$\left. \begin{array}{l} F(\sin\alpha, \beta) = K(\alpha) - \frac{1}{2\sqrt{\sin\alpha}} \cdot \log y \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \right)^2 \left(\frac{x}{2} \right)^{2n} \\ - \frac{1}{4\sqrt{\sin\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \right) \left\{ \frac{(\Delta + \cos\beta\sqrt{\sin\alpha})^2}{4\sqrt{\sin\alpha} \cdot (1+\sin\alpha \cdot \sin^2\beta)} \right\} \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \binom{2n}{p} \frac{y^{-2p}}{n-p}. \end{array} \right\} (46)$$

Das Hauptglied ist

$$F(\sin\alpha, \beta) \approx K(\alpha) - \frac{1}{2\sqrt{\sin\alpha}} \cdot \log \frac{\Delta + \cos\beta\sqrt{\sin\alpha}}{\Delta - \cos\beta\sqrt{\sin\alpha}}, \quad (47)$$

wo $K(\alpha)$ durch die Formeln aus V.E. I. (II) bestimmt ist.

Wegen

$$\left| \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \binom{2n}{p} \frac{y^{-2p}}{n-p} \right| < \sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p} y^{-2p} = (1+y^{-2})^{2n} = \frac{1}{(\Delta + \cos\beta\sqrt{\sin\alpha})^2}$$

ist die letzte Reihe in (46), wegen (45), stärker konvergent als die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \right) \left(\frac{\Delta^2 + \cos^2\beta \sin\alpha}{2\sqrt{\sin\alpha} (1+\sin\alpha \cdot \sin^2\beta)} \right)^{2n}. \quad (48)$$

Diese Reihe konvergiert für

$$\frac{\Delta^2 + \cos^2\beta \sin\alpha}{2\sqrt{\sin\alpha} (1+\sin\alpha \cdot \sin^2\beta)} = \frac{1+\sin\alpha}{2\sqrt{\sin\alpha}} \cdot \left(\frac{1-\sin\alpha \cdot \sin^2\beta}{1+\sin\alpha \cdot \sin^2\beta} \right) = \frac{x}{2} \left(\frac{1-\sin\alpha \cdot \sin^2\beta}{1+\sin\alpha \cdot \sin^2\beta} \right) < 1$$

mit

$$x = \frac{1+\sin\alpha}{\sqrt{\sin\alpha}}, \quad (\geq 2).$$

Hieraus ergibt sich als hinreichende Bedingung für die Konvergenz der zweiten Reihe aus (46)

$$1 \geq \sin^2\beta > \frac{1}{\sin\alpha} \left(\frac{x-2}{x+2} \right) \quad \dots \quad (49)$$

(vgl. (28)). Die erste Reihe konvergiert dann auch, weil

$$\sin\alpha > \frac{x-2}{x+2} = \left(\frac{1-\sqrt{\sin\alpha}}{1+\sqrt{\sin\alpha}} \right)^2$$

oder

$$\frac{x}{2} = \frac{1 - \sqrt{\sin \alpha}}{2\sqrt{\sin \alpha}} < \frac{1 + \sqrt{\sin \alpha}}{2} < 1$$

ist, und (49) bildet somit eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Reihen (46).

Zur Entwicklung des elliptischen Integrales zweiter Art setzen wir

$$\log \left(\frac{\cos \beta \cdot \sin \alpha + \Delta}{\cos \alpha} \right) = \gamma,$$

und betrachten wir zuerst

$$\begin{aligned} \int_0^\gamma \frac{sh^2 u \, du}{(1 - \cotg^2 \alpha \cdot sh^2 u)^{\frac{3}{2}}} &= \int_0^\gamma \frac{ch^2 u \cdot sh^2 u \cdot du}{(1 - \cotg^2 \alpha \cdot sh^2 u)^{\frac{3}{2}}} - \int_0^\gamma \frac{sh^4 u \cdot du}{(1 - \cotg^2 \alpha \cdot sh^2 u)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{1}{\cotg^2 \alpha} \left[\frac{ch u \cdot sh u}{\sqrt{1 - \cotg^2 \alpha \cdot sh^2 u}} \right]_0^\gamma - \frac{1}{\cotg^2 \alpha} \int_0^\gamma \frac{ch^2 u + sh^2 u}{\sqrt{1 - \cotg^2 \alpha \cdot sh^2 u}} \, du - \\ &\quad - \tg^2 \alpha \int_0^\gamma \frac{sh^2 u \, du}{(1 - \cotg^2 \alpha \cdot sh^2 u)^{\frac{3}{2}}} + \tg^2 \alpha \int_0^\gamma \frac{sh^2 u \, du}{\sqrt{1 - \cotg^2 \alpha \cdot sh^2 u}}, \end{aligned}$$

oder

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} \int_0^\gamma \frac{sh^2 u \, du}{(1 - \cotg^2 \alpha \cdot sh^2 u)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sin^3 \alpha \cdot \cos \beta \cdot \Delta}{\cos^4 \alpha \cdot \sin \beta} - \tg^2 \alpha \int_0^\gamma \frac{ch^2 u \cdot du}{\sqrt{1 - \cotg^2 \alpha \cdot sh^2 u}}. \quad (50)$$

Aus (50) und (39) ergibt sich

$$E(\sin \alpha, \beta) = E(\alpha) - \cotg \beta \cdot \Delta + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^3 \alpha} \int_0^\gamma \frac{sh^2 u \, du}{(1 - \cotg^2 \alpha \cdot sh^2 u)^{\frac{3}{2}}}. \quad (51)$$

Wie oben findet man (vgl. (40) und (42))

$$\begin{aligned} \int_0^\gamma \frac{sh^2 u \, du}{(1 - \cotg^2 \alpha \cdot sh^2 u)^{\frac{3}{2}}} &= \sin^3 \alpha \int_0^\gamma \frac{sh^2 u \cdot du}{ch^6 u \cdot (\sin \alpha - th^2 u)^3 \left(1 - \frac{th^2 u (1 - \sin \alpha)^2}{(\sin \alpha - th^2 u)^2} \right)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= (\sin \alpha)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\log y} \frac{th^2 v (1 - \sin \alpha \cdot th^2 v) \, dv}{ch^2 v \cdot (1 - th^2 v)^3 \left(1 - \frac{(1 - \sin \alpha)^2 th^2 v}{\sin \alpha (1 - th^2 v)^2} \right)^{\frac{3}{2}}} = (\sin \alpha)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\log y} \frac{sh^2 v (ch^2 v - \sin \alpha \cdot sh^2 v) \, dv}{(1 - x^2 sh^2 v \cdot ch^2 v)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= (\sin \alpha)^{\frac{3}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \right) x^{2n} \int_0^{\log y} sh^{2n+2} v \cdot ch^{2n} v (ch^2 v - \sin \alpha \cdot sh^2 v) \, dv. \end{aligned} \quad (52)$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \int_0^{\log y} sh^{2n+2} v \cdot ch^{2n} v \cdot (ch^2 v - \sin \alpha \cdot sh^2 v) \, dv &= \int_0^{\log y} sh^{2n+2} v \cdot ch^{2n} v \cdot \{(1 - \sin \alpha) ch^2 v + \sin \alpha\} \, dv = \\ &= (1 - \sin \alpha) \int_0^{\log y} \left(\frac{e^{2v} - e^{-2v}}{4} \right)^{2n+2} \, dv + \sin \alpha \int_0^{\log y} \left(\frac{e^{2v} - e^{-2v}}{2} \right)^2 \left(\frac{e^{2v} - e^{-2v}}{4} \right)^{2n} \, dv = \\ &= (1 - \sin \alpha) \int_0^{\log y} \left(\frac{e^{2v} - e^{-2v}}{4} \right)^{2n+2} \, dv - \frac{\sin \alpha}{2} \int_0^{\log y} \left(\frac{e^{2v} - e^{-2v}}{4} \right)^{2n} \, dv + \\ &\quad + \sin \alpha \int_0^{\log y} \left(\frac{e^{2v} + e^{-2v}}{4} \right) \left(\frac{e^{2v} - e^{-2v}}{4} \right)^{2n} \, dv, \end{aligned} \quad (53)$$

also, wegen (43)

$$\begin{aligned} \int_0^{\log y} sh^{2n+2} v \cdot ch^{2n} v \cdot (ch^2 v - \sin \alpha \cdot sh^2 v) \, dv &= \\ &= (1 - \sin \alpha) \left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+3}} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n+2)} \right) \log y + \frac{y^{2n+2}}{4^{2n+2}} \sum_{p=0}^{2n+2} (-1)^p \binom{2n+2}{p} \frac{y^{-2p}}{n+1-p} \right\} \\ &\quad - \frac{\sin \alpha}{2} \left\{ \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right) \log y + \frac{y^{2n}}{4^{2n+1}} \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \binom{2n}{p} \frac{y^{-2p}}{n-p} \right\} + \frac{\sin \alpha}{2^{4n+3}} \cdot \frac{(y-y^{-1})^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned} \quad (54)$$

Aus (51), (52) und (54) ergibt sich endlich

$$\begin{aligned} E(\sin \alpha, \beta) &= E(\alpha) - \cotg \beta \cdot \Delta + \frac{\cos^2 \alpha}{(\sin \alpha)^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - \sin \alpha}{8} (-1)^{n+1} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n+2)} \right)^2 (2n+2) \cdot \left(\frac{x}{2} \right)^{2n} \log y \\ &\quad - \frac{\cos^2 \alpha}{4 \sqrt{\sin \alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right)^2 (2n+1) \cdot \left(\frac{x}{2} \right)^{2n} \log y \\ &\quad + \frac{\cos^2 \alpha}{(\sin \alpha)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1 - \sin \alpha}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \right) x^{2n} \frac{y^{2n+2}}{4^{2n+2}} \sum_{p=0}^{2n+2} (-1)^p \binom{2n+2}{p} \frac{y^{-2p}}{n+1-p} \\ &\quad - \frac{\cos^2 \alpha}{8 \sqrt{\sin \alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \right) x^{2n} \frac{y^{2n}}{4^{2n}} \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \binom{2n}{p} \frac{y^{-2p}}{n-p} \\ &\quad + \frac{\cos^2 \alpha}{2 \sqrt{\sin \alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \right) \frac{x^{2n}}{2^{4n+2}} \frac{(y-y^{-1})^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned}$$

Die letztere Reihe dieser Entwicklung geht über in

$$\begin{aligned} & \frac{\cos^2 \alpha}{8\sqrt{\sin \alpha}} (y - y^{-1}) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right) \left(\frac{x(y-y^{-1})}{4} \right)^2 = \\ & = \frac{\cos^2 \alpha}{2\sqrt{\sin \alpha}} \cdot \frac{\Delta \cdot \cos \beta \cdot \sqrt{\sin \alpha}}{(1-\sin \alpha)(1+\sin \alpha \sin^2 \beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right) \left(\frac{1-\sin \alpha}{\sqrt{\sin \alpha}} \cdot \frac{\Delta \cdot \cos \beta \cdot \sqrt{\sin \alpha}}{(1-\sin \alpha)(1+\sin \alpha \sin^2 \beta)} \right)^2 \\ & = \frac{(1+\sin \alpha) \cdot \cos \beta \cdot \Delta}{2(1+\sin \alpha \cdot \sin^2 \beta)} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\Delta \cdot \cos \beta}{1+\sin \alpha \cdot \sin^2 \beta}\right)^2}} = \frac{(1+\sin \alpha) \cdot \cos \beta \cdot \Delta}{2} \cdot \frac{1}{\sin \beta \cdot (1+\sin \alpha)} = \frac{\cot \beta \cdot \Delta}{2} \end{aligned}$$

Man findet (mit Hervorhebung der Hauptglieder)

$$\begin{aligned} E(\sin \alpha, \beta) &= E(\alpha) - \frac{\cot \beta \cdot \Delta}{2} - \frac{\cos^2 \alpha}{4\sqrt{\sin \alpha}} \log y \\ &+ \frac{1+\sin \alpha}{4\sqrt{\sin \alpha}} \log y \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right)^2 \left(\frac{x}{2} \right)^{2n+2} \cdot \{(2n+1)+(2n+3)\sin \alpha\} \\ &+ \frac{1+\sin \alpha}{4\sqrt{\sin \alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \right) \left(\frac{x \cdot y}{4} \right)^{2n+2} \sum_{p=0}^{2n+2} (-1)^p \binom{2n+2}{p} \frac{y^{-2p}}{n+1-p} \\ &- \frac{\cos^2 \alpha}{8\sqrt{\sin \alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \right) \left(\frac{x \cdot y}{4} \right)^{2n} \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \binom{2n}{p} \frac{y^{-2p}}{n-p} \end{aligned} \quad \left. \right\} (55)$$

mit

$$x = \frac{1-\sin \alpha}{\sqrt{\sin \alpha}}; \quad y = \frac{\Delta + \cos \beta \sqrt{\sin \alpha}}{\Delta - \cos \beta \sqrt{\sin \alpha}}; \quad xy = \frac{(\Delta + \cos \beta \sqrt{\sin \alpha})^2}{4\sqrt{\sin \alpha}(1+\sin \alpha \cdot \sin^2 \beta)}.$$

Das Hauptglied ist (mit Vernachlässigung von $x^2 \log y, x^2 y^2$, u.s.w.)¹⁾

$$E(\sin \alpha, \beta) \approx E(\alpha) - \frac{\cot \beta \cdot \Delta}{2} - \frac{\cos^2 \alpha}{4\sqrt{\sin \alpha}} \log \frac{\Delta + \cos \beta \sqrt{\sin \alpha}}{\Delta - \cos \beta \sqrt{\sin \alpha}}, \quad (56)$$

wo $E(\alpha)$ durch die Formeln aus V.E. I (III) bestimmt ist.

Die Konvergenzbedingungen sind ganz dieselben wie in (46); die hinreichende Konvergenzbedingung wird somit durch (49) gegeben.

¹⁾ Dieses Hauptglied ist in der Einleitung (Proc. XLIV, N°. 8, S. 976) fehlerhaft angegeben worden.

Mathematics, — Sur quelques inégalités de la théorie des fonctions et leurs généralisations spatiales. I. Par A. F. MONNA. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of December 27, 1941.)

§ 1. Introduction.

Soit

$$w = f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad (1)$$

régulier et „schlicht” pour $|z| < 1$; le cercle unité est représenté sur un domaine „schlicht” et simplement connexe Ω . On a alors

$$\frac{z}{(1+|z|)^2} |a_1| \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2} |a_1|. \quad (2)$$

Pour autant que je sais, on n'a jamais étudié les conséquences de ces inégalités pour la fonction inverse $z = F(w)$ qui représente Ω sur le cercle unité $|z| < 1$; peut-être la raison en est que $F(w)$ ne peut pas être développé dans tout Ω en une série de puissances de z . Cependant on obtient une propriété très simple.

Supposons que $z = 0$ est transformé en P_0 de Ω . Soit $G(P, P_0)$ la fonction de GREEN de Ω avec pôle P_0 . On a

$$G(P, P_0) = \log \frac{1}{r_{PP_0}} - g(P, P_0). \quad (3)$$

où $g(P, P_0)$ désigne la fonction harmonique dans Ω , correspondant à des valeurs-frontière $\log \frac{1}{r_{P_0 Q}}$ (Q désigne un point de la frontière Σ de Ω). On sait alors qu'on a

$$|z| = |F(w)| = e^{-G(P, P_0)},$$

et

$$F(w) = w e^{g+i\bar{g}}$$

\bar{g} étant la fonction conjuguée de g . On en tire

$$|a_1| = e^{-g(P_0)}$$

où l'on a posé $g(P_0, P_0) = g(P_0)$. Il s'en suit alors de (2) que les points $P(w)$ de Ω pour lesquels $|z| = e^{-g} = r$ (constante) se trouvent tous dans l'anneau formé par les cercles de rayon $\frac{r}{(1+r)^2} e^{-g(P_0)}$ et $\frac{r}{(1-r)^2} e^{-g(P_0)}$ et de centre P_0 . Autrement dit, la ligne de niveau $G = C$ se trouve entre les deux cercles de centre P_0 et de rayon respectivement

$$\frac{e^{-C}}{(1+e^{-C})^2} e^{-g(P_0)} \text{ et } \frac{e^{-C}}{(1-e^{-C})^2} e^{-g(P_0)}.$$

En particulier, en prenant $C = 0$, on voit que le cercle de rayon $\frac{1}{4} e^{-g(P_0)}$ se trouve tout entier dans Ω . Donc, si d désigne la plus petite distance de P_0 à Σ

$$\frac{1}{4} e^{-g(P_0)} \leq d$$

ou

$$g(P_0) \geq \log \frac{1}{4d}. \quad (4)$$