

Physics. — *Les déformations plastiques près des entailles.* Par F. K. TH. VAN ITERSON.

(Communicated at the meeting of January 31, 1942.)

§ 1. *Introduction.*

L'acier doux à environ un dixième pourcent de carbone constitue le métal usuel employé pour la construction des navires, des charpentes métalliques, des chaudières, etc. Ce métal doit son aptitude à l'exécution de ces ouvrages d'art à sa ductilité comme à sa grande résistance à la rupture.

Le calcul des tensions dans nos constructions, sollicitées par des charges extérieures, des différences de températures, des retraits de soudure, etc. révèle de fortes concentrations de forces internes près des angles rentrants.

On s'est rendu vaguement compte que pour les charges statiques la ductilité atténuée la concentration des tensions à ces endroits, par exemple à la périphérie de la section du raccord entre la tige et la tête d'un boulon. Mais pour faire entrer la ductilité dans nos calculs de résistance, il faut commencer par mettre en formules la distribution des tensions ainsi que les glissements et déformations autour des entailles.

Les lois physiques qui commandent ces calculs sont traitées dans les manuels d'élasticité. Nous nous référons à ce sujet au Handbuch der Physik, Band VI. Mechanik der elastischen Körper, Kapitel 6, Plastizität und Erddruck de A. NADAI, 23. Das ebene Problem des Gleichgewichts vollkommen plastischer Massen, p. 472.

Ainsi nous basons nos calculs sur les lois de la plasticité formulées par DE SAINT VÉNANT, mais avant d'entrer dans le sujet nous commençons par la description d'un cas de plasticité que nous avons résolu il y a trente ans¹⁾, d'abord rejeté par les professionnels²⁾ et maintenant généralement accepté³⁾.

§ 2. *Les glissements plastiques dans les parois épaisses de cylindres.*

Pour la matière parfaitement plastique on accepte que les glissements, les déformations, se produisent aux endroits où la tension de glissement atteint la limite k , ainsi $\tau = k$.

Quand on augmente la pression intérieure dans un cylindre de matière plastique cette tension dans la paroi est d'abord atteinte à l'intérieur et puis se propage; des surfaces de glissement se développent dans la masse plastique et se propagent vers l'extérieur. Quand le glissement atteint l'extérieur du cylindre, celui-ci commence à se gonfler et quand on ne diminue pas la pression, il se creve.

¹⁾ Engineering, Jan. 5, 1912, p. 22, F. VAN ITERSON, The Strength of Thick Hollow Cylinders.

²⁾ Engineering, Jan. 12, 1912, p. 58, COOK et ROBERTSON répondirent: „The agreement of the experimental values with those calculated from the above formula is remarkable but must nevertheless be accidental”.

³⁾ VON KÁRMÁN, Ueber elastische Grenzstände. Verhandlungen des internationalen Kongresses für technische Mechanik, Zürich, 1926.

Handbuch der Physik, Band VI, 1928. Mechanik der elastischen Körper. Das ebene Problem des Gleichgewichtes vollkommen plastischer Massen, p. 474.

TIMOSHENKO, Strength of Materials, Part II, p. 528.

NADAI, Plasticity, 1931, p. 186 et 227. The thick-walled tube under internal pressure.

HÜTTE, 26. Auflage, I, 1936, IV, Mechanik der bildsamen Körper, p. 347, Dickwandiges Rohr.

La pression extrême, intérieure ou extérieure, que peut supporter un cylindre ductile est $p = 2k \ln \frac{r_e}{r_i}$ où r_e = rayon extérieur, r_i = rayon intérieur.

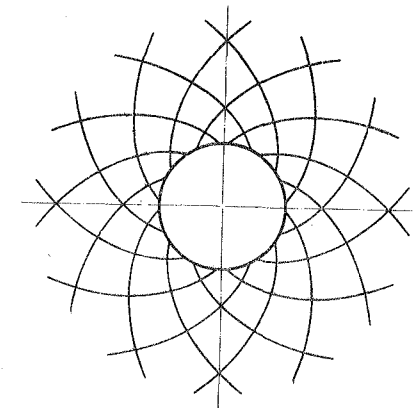


Fig. 1.

Lignes de glissement dans la zone de déformation plastique autour d'un trou cylindrique à charge intérieure ou extérieure de la masse.

Dans la figure 1 nous représentons les lignes de glissement autour d'un trou cylindrique dans la masse plastique soumise à une pression intérieure ou extérieure. Ces lignes forment deux faisceaux de spirales logarithmiques qui s'entrecroisent orthogonalement.

Quand on progresse le long d'une ligne les deux tensions principales ϱ_r et ϱ_t s'accroissent ou diminuent toutes deux de $2k\varphi$, où φ représente l'angle dont la tangente a tourné. La différence entre les deux tensions principales reste constante $\varrho_t - \varrho_r = 2k$ (thèses de HENCKY).

§ 3. *Les glissements et les tensions auprès des angles d'un trou carré.*

Imaginons un cylindre muni d'un trou central chargé par pression interne.

Le calcul selon les lois de l'élasticité¹⁾ nous révèle des tensions outre mesure auprès des angles vifs rentrants, mais nous savons qu'en réalité la ductilité du métal empêche un accroissement excessif des tensions. Pour se rendre compte de ce qui se passe autour d'un trou carré quand on charge l'élément de construction, il faut donc recourir à la théorie de la plasticité. La question se pose de résoudre deux équations différentielles partielles simultanées. Mais le problème se simplifie beaucoup par le fait que quand on prend le sommet de l'angle comme origine toutes les quantités restent constantes pour un rayon et sont uniquement fonction d'une seule variable à savoir, l'angle que fait ce rayon avec la ligne de symétrie. Et cependant quand on prend à tâche de trouver une solution continue, satisfaisant aux conditions des deux limites données et de la symétrie, on sent que la solution doit être très simple, mais la difficulté de la trouver fait renoncer à tout espoir. Mais du moment que dans sa recherche on abandonne la condition de continuité et qu'on accepte que le champ de déformation plastique se subdivise en zones contiguës, l'analyse du problème se présente toute simple, non seulement pour le trou carré, mais aussi pour les autres cas d'entailles rectilignes.

Dans la suite nous donnons peu de texte et nous décrivons les champs de lignes de glissement desquels on déduit la répartition des tensions d'après la thèse de HENCKY.

¹⁾ C. E. INGLIS, Transactions of the Institution of Naval Architects, 1911, Part I. C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL, Technische Dynamik, 1939. H. NEUBER, Kerbspannungslehre, 1937.

Lignes de glissement auprès des angles d'un trou carré (Figure 2). On y distingue trois zones. Dans 1 et 3 l'état des tensions ne varie pas, mais dans le secteur 2 les tensions augmentent proportionnellement à l'angle du rayon. Dans la ligne de symétrie on a $\sigma_1 = 2k \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) - p$ comme tension principale maximum.

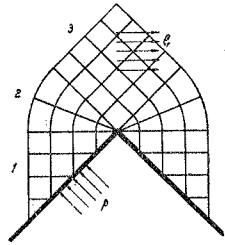


Fig. 2.

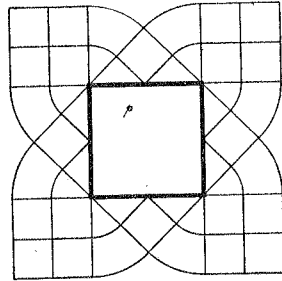


Fig. 3.

Les déformations plastiques commencent près des angles quand on charge un élément de construction comportant un trou de section carrée par des tensions intérieures ou extérieures (Figure 4).

Pour le coin gauche en bas nous avons indiqué la zone et les lignes de glissement pour un angle arrondi. Ces lignes sont des spirales logarithmiques s'entrecoupant sous des angles de 90°.

Au moment où l'écoulement de la masse plastique s'est propagé sur toute la longueur des côtés du trou on obtient la figure 3 pour les lignes de glissement. Aux limites de la

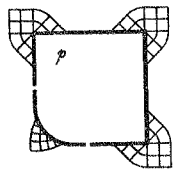


Fig. 4.

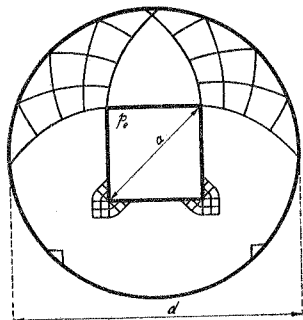


Fig. 5.

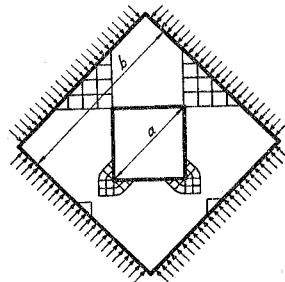


Fig. 6.

figure la déformation plastique est nulle. Ici et en dehors il n'y a que des déformations élastiques.

La pression intérieure ou extérieure extrême que peut supporter un cylindre de diamètre d percé d'un trou carré de diagonales a (figure 5) est

$$p_e = 2k \ln \frac{d}{a}$$

où k est la tension maximum de cisaillement qui fait glisser la matière parfaitement plastique.

Le commencement de déformation plastique est indiqué en bas dans la figure. Quand une certaine pression dépendant de la proportion entre la résistance au cisaillement k et le

coefficient d'élasticité E est dépassée le glissement selon les spirales logarithmiques sortant de la périphérie prend le dessus et se propage vers les coins jusqu'à ce que les zones de glissement indiquées en haut dans la figure se sont développées.

La pression extrême que peut supporter un tube de section carré de matière ductile avec trou carré placé de biais (figure 6) est

$$p_e = \frac{b-a}{a} \times 2k.$$

Les zones et lignes de glissement pour le commencement de la déformation plastique sont indiquées en bas de la figure. Les zones et lignes de glissement, qui prennent le dessus quand on pousse plus loin la déformation, sont indiquées en haut.

Barre ou plaque percée d'un trou conforme, chargée par pression extérieure ou intérieure. Les lignes de glissement sont indiquées pour le commencement de la déformation plastique (figure 7).

Tube carré avec paroi épaisse soumis à pression extérieure ou intérieure jusqu'à glissement de la matière plastique à travers toute la paroi (figure 8).

Pression extrême

$$p_e = \frac{t-s}{s} 2k.$$

La déformation commence près des angles rentrants, puis cette déformation cesse et une autre déformation se développe partant du milieu des côtés, indiquée dans cette figure et qui mène à la rupture.

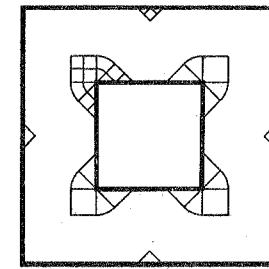


Fig. 7.

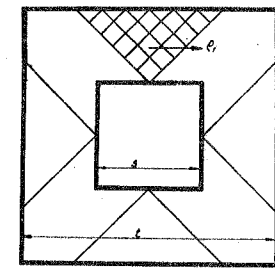


Fig. 8.

§ 4. Les lignes de glissement et les tensions autour de trous de différentes formes et de fentes dans la masse plastique.

La tension principale dans le champ de déformation plastique au dessus de l'angle d'un trou triangulaire équilatéral (figure 9) dans une masse soumise à une pression extérieure uniforme est

$$\sigma_1 = 2k \left(1 + \frac{7}{12} \pi\right).$$

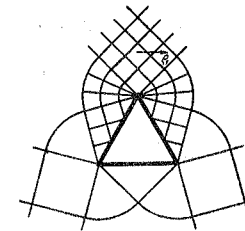


Fig. 9.

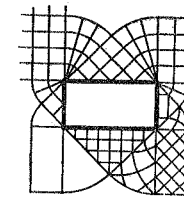


Fig. 10.

Quand on tâche d'augmenter la pression le trou se ferme et les lignes de glissement des carrés s'allongent.

Trou rectangulaire (figure 10).

Trou rectangulaire.

Il est instructif de construire les lignes de glissement autour d'un trou rectangulaire. Quand on continue à étendre ou à comprimer la matière plastique les rectangles remplis de lignes de glissement s'agrandissent comme indiqué à gauche en haut.

En bas à droite nous avons dessiné les trajectoires des tensions qui entrecroisent les lignes de glissement sous des angles de 45°.

Fente (figure 11).

Dès qu'une pièce de matière ductile munie d'une fente est étirée perpendiculairement à celle-ci dans tous les sens, il se développe un champ de déformation plastique près des bords de la fente. Chaque champ consiste en 5 zones, deux triangles rectangles, deux secteurs de 90° et un carré.

Fente (figure 12).

Quand on tire davantage, d'abord le champ de déformation plastique se développe comme indiqué en lignes tracées, puis les carrés s'agrandissent, de la manière indiquée à gauche en lignes pointillées, mais on ne saurait déterminer exactement jusqu'où s'étend la



Fig. 11.

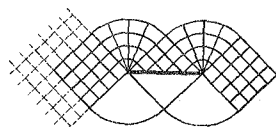


Fig. 12.

déformation plastique, ceci dépend des déformations élastiques qui pour le présent ne peuvent pas être calculées. Il faut comparer ce cas de déformation plastique avec l'étude classique sur la plasticité par le maître L. PRANDTL, Proc. of the 1. intern. congr. of applied mechanics, p. 43, Delft 1925.

§ 5. *Le champ de déformation plastique pour les barres entaillées étirées.*

La masse plastique commence à couler près des pointes d'entaille au plus léger étirage par des forces P (figure 13).

Quand $P = 2k(1 + \nu)b$ on est arrivé au maximum que peut supporter la section rétrécie, du moins quand on ne considère que le problème à deux dimensions, p.e. une barre très épaisse dans le sens perpendiculaire à la feuille de dessin (figure 14). Pour un couple fléchissant on obtient les mêmes lignes de glissement.

Développé à plein le champ de déformation plastique s'étend sur la surface indiquée à côté et quand on étire davantage la taille se rétrécit et la figure de déformation diminue. On reconnaît l'analogie de ce cas de déformation plastique avec le problème traité par PRANDTL de l'angle obtus pressé au bout. Quel moment de flexion peut transmettre la section dangereuse?

Barre avec deux entailles opposées (figure 15). Quand on commence à étirer cette

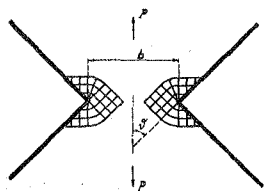


Fig. 13.

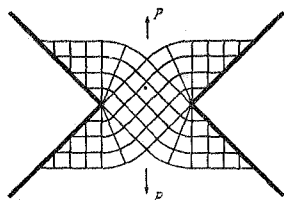


Fig. 14.

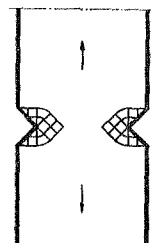


Fig. 15.

barre des zones de déformation plastique se développent près des entailles. L'étendue de ces zones dépend de l'élasticité de la matière.

Quand on continue l'étirage de la barre constituée de matière parfaitement plastique, brusquement la tension principale diminue et il se produit la zone de lignes de glissement indiquée dans figure 16.

Pour se donner une idée de la contraction ou extension latérale près des entailles de la figure précédente on commence par étudier le cas des entailles élongées (figure 17). Cette figure résulte de la loi de HENCKY et la figure 16 en est déduite.

$$e_1 = 2k.$$

Au début de l'étirage d'une barre à deux incisions (figure 18), des zones de déformation plastique se développent près des fonds des incisions. Quand on continue à étirer la barre

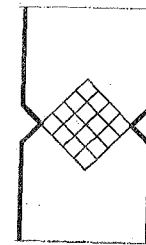


Fig. 16.

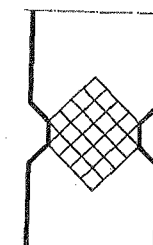


Fig. 17.

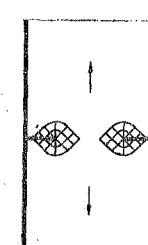


Fig. 18.

il se produit brusquement la zone de déformation identique à celle de la figure 16.

Il est à noter que toutes ces figures, la figure 13 et suivantes, peuvent aussi servir pour des barres soumises à la flexion par un couple.

Champ des lignes de glissement dans une barre à traction avec trou carré relativement grand, placé de biais (figure 19); à gauche début de la déformation plastique, à droite terminaison.

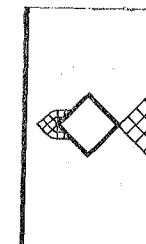


Fig. 19.

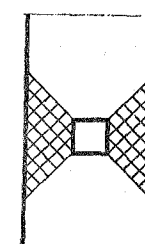


Fig. 20.

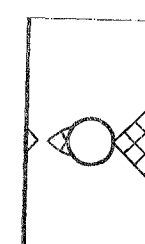


Fig. 21.

Champ des lignes de glissement dans une barre à traction avec trou carré placé d'aplomb (figure 20).

Champ des lignes de glissement dans une barre à traction avec trou cylindrique (figure 21). A gauche commencement de la déformation, à droite glissement sur toute l'épaisseur à côté du trou.

§ 6. *Conclusions.*

Nous avons tâché de contrôler par des essais, par pression intérieure de cylindres à parois épaisses percées d'un trou carré central et par des essais à la traction de barres d'acier doux entaillées ou munies d'un trou carré transversal, la résistance à la déformation plastique et les lignes de glissement déduites de la théorie. M. FOKKINGA, ingénieur des

Mines de l'Etat néerlandaises, spécialisé en métallographie, a exécuté ces essais avec beaucoup de soins. Quelques uns sont faits dans le laboratoire VAN DER WAALS de l'université d'Amsterdam sous la direction du Prof. MICHELS.

Les lignes de glissement rendues visibles au moyen de la liqueur „Fry” semblent confirmer la théorie mais les essais menant à la rupture ont révélé une certaine divergence.

Pour les cylindres à trou carré (figure 5) la formule $p_i = 2k \ln \frac{d}{a}$ où $2k$ représente la résistance à la traction a été bien confirmée pour l'acier doux recuit d'une résistance à la traction de 40 kg/mm², jusqu'à la proportion $d : a = 2$. Pour les plus grands diamètres la résistance du cylindre augmente au-dessus de celle indiquée par la formule théorique, jusqu'à atteindre 1,44 la valeur calculée pour une proportion $d : a = 4$ ($d = 55$ mm $a = 14$ mm).

En poussant davantage la proportion $d : a$ la différence devient moins prononcée. Pour $d : a = 5$ ($d = 70$ mm $a = 14$ mm) la résistance est encore 1,25 fois celle calculée. L'explication de la divergence est celle-ci:

Il n'y a concordance que quand la paroi peut se contracter en épaisseur d'une manière similaire à celle des barres de comparaison soumises à des essais de traction.

Pour les épaisseurs en dessus de $d : a = 2$ on observe que la contraction ne peut pas se développer librement. Et quand $d : a$ se rapproche de 5 ou dépasse cette proportion les cylindres commencent à se déchirer dans les coins du trou, sans contraction appréciable des parois et la pression intérieure p s'exerce sur un diamètre plus grand que a .

Pour les essais de traction sur barres entaillées la différence observée dans la résistance avec les barres lisses s'explique de même par empêchement de la contraction.

Aussi très souvent les constructions métalliques se sont rompues aux endroits où la plasticité devait atténuer les tensions.

Pour la pratique il est d'une importance particulière de connaître la cause de la divergence entre la théorie et la réalité. Pour pouvoir la comprendre il faut introduire une nouvelle conception dans la théorie de la plasticité, celle de la déformation spécifique. Un élément carré dans le champ de déformation plastique orienté selon les tensions principales de côté a devient un rectangle de côtés $a + \Delta a$ et $a - \Delta a$ après déformation. Nous

appelons $\frac{2\Delta a}{a} = s$ la déformation spécifique.

Quelques matières plastiques, le fer chauffé à mille degrés dans son état austénitique, certaines résines et masses plastiques modernes, le verre amolli par chauffage, approchent plus ou moins de la matière idéale, mais l'acier doux recuit ne supporte qu'une déformation spécifique très restreinte. En effet lorsqu'on fait un essai de traction et quand l'effort auquel est soumis le métal atteint la charge de rupture, on voit un étranglement se dessiner en un point de la barre, étranglement qui augmente jusqu'à ce que le métal se brise dans sa section la plus contractée. La striction est pour l'acier de construction de l'ordre de 50 %. Pour une matière parfaitement plastique elle devait être 100 % et la charge de rupture devait donc se réduire à zéro.

Quand on exprime en chiffres la déformation spécifique s on trouve qu'elle devient très grande, même infiniment grande près de l'extrémité d'une fente.

La partie de la section voisine de la fente atteindra la déformation de rupture bien avant que le reste de la section ait pris la déformation maximum qu'elle aurait pu supporter.

Dans le fer la rupture commencera donc près de la fente et se propagera dans toute la section de proche en proche et pour les mêmes raisons.

Il est évident que ce qui retardera la rupture, ce sera la faculté qu'aura le métal, de prendre sans se rompre, un allongement considérable, mais on ne peut pas compter sur la ductilité du fer à un degré tel que le suppose la théorie de la déformation des matières de plasticité absolue. Un défaut local, une fente, si petite qu'elle soit, peut devenir pour l'acier le point de départ d'une rupture transversale.

Une autre propriété du fer est cause que les résultats des essais diffèrent de ceux prédits par la théorie. Celle-ci suppose que la tension de cisaillement, la résistance au glissement, reste constante pendant les déformations plastiques, $\tau = k$, mais pour le fer k augmente avec la déformation spécifique s dans une mesure considérable; au moment de la rupture elle est à peu près doublée. C'est une circonstance favorable.

Mais le fer a une autre propriété qui le rend inférieur aux matières plastiques vraies. La répétition des efforts, surtout les renversements de sens des efforts, est pour les métaux une cause spéciale d'altération¹⁾.

Nous avons vu que tout près de la pointe de l'angle vif le métal infailliblement se déforme par la charge, mais cette déformation plastique est généralement localisée dans une zone très restreinte et la déformation est élastique sur la plus grande partie de la section. Quand la pièce de construction est déchargée, la zone déformée ne s'ajuste plus et est écrasée par le retrait de la pièce. Un commencement de fissure se produit entre les cristaux du métal qui bientôt devient fatal si les chargements et déchargements de la construction se répètent.

On serait tenté d'appliquer la théorie de la plasticité pour le calcul des constructions métalliques. A la fin de cette étude, l'auteur ne peut s'abstenir de donner l'avertissement de pratiquer beaucoup de modération à ce sujet.

M. A. HELLEMANS ingénieur physicien et électricien a bien voulu discuter avec nous le sujet de cet article.

¹⁾ „Een geval van kerfwerking” par F. K. TH. VAN ITERSOM. De Ingenieur, 1938, No. 40, Werktuig- en Scheepsbouw 7.