which implies

$$\frac{d^n \psi(x)}{dx^n} - \frac{d^n \varphi(x)}{dx^n} = M \text{ or } -M \text{ for } x = \xi;$$

hence $M = 0$, since

$$\frac{d^n \varphi(x)}{dx^n} \text{ and } \frac{d^n \psi(x)}{dx^n}$$

assume at ξ the same value η_{n+1}.

Now it is sufficient to show that the remaining case is excluded. Let x be an arbitrary number $> \xi$ and $\leqq \xi + \delta$. In the remaining case there would exist a number $\lambda > \xi$ and $< x$ satisfying the inequality

$$\left| \frac{d^{n-1} \psi(\lambda)}{d\lambda^{n-1}} - \frac{d^{n-1} \varphi(\lambda)}{d\lambda^{n-1}} \right| < M(\lambda - \xi)$$

and from (4) it would follow that

$$\left| \frac{d^{n-1} \psi(x)}{dx^{n-1}} - \frac{d^{n-1} \varphi(x)}{dx^{n-1}} - \frac{d^{n-1} \psi(\lambda)}{d\lambda^{n-1}} + \frac{d^{n-1} \varphi(\lambda)}{d\lambda^{n-1}} \right| \leqq M(x - \lambda).$$

Hence (5) would follow with $<$ for $\leqq$ and by repeated integration we should find

$$\left| \frac{d^{\nu-1} \psi(x)}{dx^{\nu-1}} - \frac{d^{\nu-1} \varphi(x)}{dx^{\nu-1}} \right| < M \frac{(x-\xi)^{n-\nu+1}}{(n-\nu+1)!} \qquad (\nu = 1, \ldots, n;\ \xi < x \leqq \xi + \delta),$$

which is impossible, since according to the definition of M the two sides are equal one to another for conveniently chosen ν and x ($\xi < x \leqq \xi + \delta$). This establishes the theorem.

Theorem 2. Consider $n+2$ *real numbers* $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n+1}$, *further a positive number* ω *and the polynomial*

$$p(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \eta_{\nu+1} \frac{(x-\xi)^\nu}{\nu!}.$$

Let the real function $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ *be defined in the* $(n+1)$ — *dimensional strip*

$$\xi < x < \xi + \omega, \ -\infty < y_1 < \infty, \ldots, -\infty < y_n < \infty.$$

Suppose that in the region

$$\xi < x < \xi + \omega, \qquad \left| y_\nu - \frac{d^\nu p(x)}{dx^\nu} \right| < \omega \frac{(x-\xi)^{n-\nu}}{(n-\nu)!} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

the derivatives $f_\nu = \dfrac{\partial f}{\partial y_\nu}$ *of the first order of* f *exist, are continuous and satisfy the inequality*

$$\sum_{\nu=1}^{n} |f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)| \frac{(x-\xi)^{n-\nu+1}}{(n-\nu+1)!} \leqq 1.$$

Then the assertion of theorem 1 is valid.

In fact, we have

$$|f(x, Y_1, \ldots, Y_n) - f(x, y_1, \ldots, y_n)| = \left| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)}{\partial \lambda_\nu} \cdot (Y_\nu - y_\nu) \right|.$$

where $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ is a point conveniently chosen between $(y_1, \ldots, y_n)$ and $(Y_1, \ldots, Y_n)$ and the found expression is

$$\leqq \left\{ \max_{1 \leqq \nu \leqq n} \frac{(n-\nu+1)!}{(x-\xi)^{n-\nu+1}} |Y_\nu - y_\nu| \right\} \sum_{\nu=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)}{\partial \lambda_\nu} \right| \cdot \frac{(x-\xi)^{n-\nu+1}}{(n-\nu+1)!}$$

$$\leqq \max_{1 \leqq \nu \leqq n} \frac{(n-\nu+1)!}{(x-\xi)^{n-\nu+1}} \cdot |Y_\nu - y_\nu|,$$

so that theorem 2 is a corollary of the first proposition.

Mathematics. — *Die Kovarianten von vier Ebenen im* R_5. Von R. WEITZENBÖCK.

(Communicated at the meeting of January 31, 1942.)

Ich habe in einer früheren Arbeit [1]) die projektiven Invarianten von vier Ebenen im R_5 ermittelt; hier sollen die Kovarianten mit einer Reihe Punktkoordinaten x berechnet werden. Man findet deren acht, alle vom dritten Grade in den x, die durch drei quadratische Syzygien verknüpft sind. Zugleich ergibt sich, dass drei Ebenen des R_5 keine Kovarianten mit nur einer Reihe und daher auch keine Kontravarianten mit nur einer Reihe R_4-Koordinaten u' besitzen.

§ 1.

Wir deuten die vier Ebenen durch a, α, p, π oder 1, 2, 3, 4 an. Der Aufbau der Komitanten führt dann, genau so wie in obgenannter Arbeit, auf Klammerfaktoren der Typen

$$f_1 = (a^3\, \alpha^2\, p) \text{ und } f_2 = (a^3\, \alpha^2\, x).$$

Hier leitet f_1 zu Ketten der Gestalt

$$f_3 = (a^3\, \alpha^2\, p)\,(p^2\, \pi^3\, b)\,(b^2\, \beta^3\, q) \ldots = 12 \cap 34 \cap 12 \cap \ldots,$$

die auf Invarianten

$$A_{ik} = (i^3\, k^3) \text{ und } J_{ijkl} = (i^3\, j^2\, k)\,(jk^2\, l^3)$$

reduzierbar sind.

Bei f_3 setzen wir

$$P_{ik} = (i^2\, k^3\, x)\, i, \qquad \ldots \ldots \qquad (1)$$

was also neben der Reihe x die sechs Reihen

$$P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{34}, P_{42}, P_{23}$$

gibt. Es gilt dann

$$P_{ik} = P_{ki} - \tfrac{1}{3} A_{ik}\, x. \qquad \ldots \ldots \qquad (2)$$

Geometrisch ist P_{ik} der in der Ebene E_i gelegene Punkt des R_3, der x mit E_k verbindet. Es gilt also z.B.

$$(1^3\, P_{1i}\, \xi\eta) = 0, \quad (1^3\, P_{i1}\, \xi\eta) = -\tfrac{1}{3} A_{i1}\, (1^3\, x\xi\eta)$$

und

$$(1^3\, P_{1i}\, x\xi) = (1^3\, P_{i1}\, x\xi) = 0.$$

Nimmt man in (1) statt x ein P_{rs} selbst, so ergeben sich die Reihen

$$(i^3\, k^2\, P_{rs})\, k$$

---

[1]) Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 35, 1026—1029 (1932).

und dies ist nur dann nicht unmittelbar zu reduzieren, wenn i, k, r und s alle vier Ziffern 1, 2, 3, 4 bedeuten. Man erhält so sechs weitere Reihen

$$Q_{ik} = (i^2\, k^3\, P_{rs})\, i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (3)$$

oder ausführlicher:

$$Q_{12} = (1^2\, 2^3\, P_{34})\, 1 \ , \quad Q_{13} = (1^2\, 3^3\, P_{42})\, 1 \ , \quad Q_{14} = (1^2\, 4^3\, P_{23})\, 1 \ \text{ u. s. f.}$$

Es gilt analog zu (2):

$$Q_{12} = Q_{21} - \tfrac{1}{3}\, A_{12} \, . \, P_{34} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (4)$$

Verfährt man mit Q_{ik} ebenso wie in (3) mit den P_{ik}, so ergeben sich Reihen der Gestalt

$$\left.\begin{aligned} R_{12} &= (1^2\, 2^3\, Q_{34})\, 1 = (1^2\, 2^3\, 3)\, (3^2\, 4^3\, P_{12})\, 1 = \\ &= (1^2\, 2^3\, 3)\, (3^2\, 4^3\, a)\, (a^2\, \alpha^3\, x)\, 1 = 1 - 12 \cap 34 \cap 12 - x, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \qquad (5)$$

also reduzible Ketten.

Es ist dann weiter leicht zu zeigen, dass jeder Ansatz

$$J = (a^3\, \alpha\, \xi\, \eta) \ \text{ mit } \ \xi, \eta = x, P_{ik}, Q_{rs}$$

entweder zur Einführung einer weiteren Reihe P_{ik} oder zur Reduktion führt. Somit bleiben nur die Typen

$$J = (a^3\, \xi\, \eta\, \zeta) \ \text{ mit } \ \xi, \eta, \zeta = x, P_{ik}, Q_{rs} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (6)$$

und die sechsreihigen Determinanten übrig, die man aus sechs der Reihen x, P_{ik} und Q_{rs} bilden kann.

§ 2.

Was zunächst diese sechsreihigen Determinanten betrifft, so sieht man leicht, dass sie auf die Invarianten (6) zurückführbar sind. Wir haben z.B.

$$(P_{12} \ldots) = (1 \ldots)\, (1^2\, 2^3\, x)$$

und bringt man hier alle drei Reihen 1 in den ersten Klammerfaktor, so entstehen Produkte von Invarianten des Typus (6). Analog für Determinanten, die eine Reihe Q enthalten.

Wir führen dies bei der Determinante

$$D = (P_{12}\, P_{13}\, P_{14}\, P_{34}\, P_{42}\, P_{23}) = (1\, P_{13}\, P_{14}\, P_{34}\, P_{42}\, P_{23})\, (1^2\, 2^3\, x) \qquad (7)$$

näher aus und erhalten

$$D = \tfrac{1}{3}\, (1^3\, P_{23}\, P_{34}\, P_{42}) \, . \, (2^3\, x\, P_{13}\, P_{14}) = \tfrac{1}{3}\, F_1 \, . \, G_1 . \quad . \quad . \quad . \qquad (8)$$

Für die Invarianten (6), bei denen keine Reihe Q_{ik} auftritt, führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= (2^3\, x\, P_{13}\, P_{14}) & G_1 &= (1^3\, P_{23}\, P_{34}\, P_{42}) \\ F_2 &= (3^3\, x\, P_{24}\, P_{21}) & G_2 &= (2^3\, P_{34}\, P_{41}\, P_{13}) \\ F_3 &= (4^3\, x\, P_{31}\, P_{32}) & G_3 &= (3^3\, P_{41}\, P_{12}\, P_{24}) \\ F_4 &= (1^3\, x\, P_{42}\, P_{43}) & G_4 &= (4^3\, P_{12}\, P_{23}\, P_{31}) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \qquad (9)$$

Die Bezeichnung ist dabei so gewählt, dass F_i aus F_{i-1} durch zyklische Vertauschung

der Ziffern 1, 2, 3, 4 entsteht; ebenso bei G_i. Jede dieser Kovarianten ist vom dritten Grade in den x_i. So lauten z.B. F_1 und G_1 ausgeschrieben

$$\begin{aligned} F_1 &= (2^3\, xab)\, (a^2\, p^3\, x)\, (b^2\, \pi^3\, x) \\ G_1 &= (1^3\, 234)\, (2^2\, p^3\, x)\, (3^2\, \pi^4\, x)\, (4^2\, \alpha^3\, x), \end{aligned}$$

woraus die geometrische Bedeutung von $F_1 = 0$ und $G_1 = 0$ leicht abzulesen ist.

Man zeigt weiter leicht, dass alle weiteren Komitanten (6), wie z.B. $(a^3\, xPQ)$ oder $(a^3\, QQQ)$ u.s.w. auf die Kovarianten (9) reduzierbar sind. Da ferner

$$F_1 = (2^3\, x\, P_{13}\, P_{14}) = -\,(3^3\, x\, P_{12}\, P_{14}) = -\,(2^3\, x\, P_{14}\, P_{13}), \quad . \qquad (10)$$

also in den Indizes 2, 3, 4 alternierend ist, folgt, dass jede Kovariante auf die acht F_i und G_i von (9) reduzierbar wird.

§ 3.

Dass von den acht Kovarianten (9) keine ganz und rational durch die übrigen ausdrückbar ist, folgt aus den Graden dieser Kovarianten in den Koordinaten der vier gegebenen Ebenen. Dagegen sind diese Kovarianten (9) durch quadratische Syzygien verknüpft, die man am einfachsten wie folgt erhält.

Wir gehen von (7) aus und schreiben

$$D = (P_{42}\, P_{12}\, P_{13}\, P_{14}\, P_{34}\, P_{23}) = (\pi\, P_{12}\, P_{13}\, P_{14}\, P_{34}\, P_{23})\, (\pi^2\, \alpha^3\, x).$$

Hier bringen wir alle drei Reihen π in den ersten Klammerfaktor, wodurch sich nach einiger Rechnung

$$D = \tfrac{1}{3}\, F_4\, G_4 + \tfrac{1}{9}\, F_2\, (A_{34}\, F_1 + A_{14}\, F_3 + A_{31}\, F_4) \quad . \quad . \quad . \qquad (11)$$

ergibt. Gleichsetzung mit (8) und nachherige zyklische Vertauschung liefert die gesuchten Syzygien:

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= F_1\, G_1 - F_4\, G_4 - \tfrac{1}{3}\, (A_{34}\, F_1\, F_2 + A_{14}\, F_2\, F_3 + A_{31}\, F_2\, F_4) = 0 \\ S_2 &= F_2\, G_2 - F_1\, G_1 - \tfrac{1}{3}\, (A_{41}\, F_2\, F_3 + A_{21}\, F_3\, F_4 + A_{42}\, F_3\, F_1) = 0 \\ S_3 &= F_3\, G_3 - F_2\, G_2 - \tfrac{1}{3}\, (A_{12}\, F_3\, F_4 + A_{32}\, F_4\, F_1 + A_{13}\, F_4\, F_2) = 0 \\ S_4 &= F_4\, G_4 - F_3\, G_3 - \tfrac{1}{3}\, (A_{23}\, F_4\, F_1 + A_{43}\, F_1\, F_2 + A_{24}\, F_1\, F_3) = 0 \end{aligned}\right\} . \qquad (12)$$

Hier ist $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ identisch in F_i und G_i Null, d.h. es sind in (12) höchstens nur drei unabhängige Gleichungen vorhanden.

Die Frage nach den Kontravarianten mit einer Reihe R_4-Koordinaten u' ist hiermit ebenfalls erledigt. Man erhält dual zu (12) wieder acht Komitanten dritten Grades, z.B.

$$F_1' = (2'^3\, u'\, P_{13}'\, P_{14}') \ \text{ mit } \ P_{13}' = (1'^2\, 3'^3\, u')\, 1' \ \text{ und } \ P_{14}' = (1'^2\, 4'^3\, u')\, 1' \ \text{ u. s. f.}$$

Für die Invarianten gilt:

$$\begin{aligned} A_{12}' &= (1'^3\, 2'^3) = A_{12} = (1^3\, 2^3) \\ J_{1234}' &= J_{1234} = (1^3\, 2^2\, 3)\, (23^2\, 4^3) = (1'^3\, 2'^2\, 3')\, (2'\, 3'^2\, 4'^3). \end{aligned}$$