déterminer on peut appliquer la théorie des images électriques. Soit donc P'_0 l'image réflétée de P_0 par rapport au plan V. En désignant par r la distance de P à P_0 et par r' la distance $P P'_0$, on a

$$G(P, P_0) = \frac{1}{r} - \frac{1}{r'},$$

$$g(P, P_0) = \frac{1}{r'}.$$

Remarquons qu'on retrouve immédiatement la valeur $\frac{1}{2d}$ de l'inégalité (25). Pour déterminer le rayon de la plus grande sphère de centre P_0 qui est intérieure à la surface $G = C$, il faut déterminer le minimum de r sous la condition $\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = C$. C'est donc un calcul élémentaire. On trouve que le minimum est atteint sur la droite OP_0 et a la valeur

$$d\frac{1 + Cd - \sqrt{1 + C^2 d^2}}{Cd}$$

Puisque $g(P_0) = \frac{1}{2d}$ dans notre cas, on voit que cette valeur est bien de la forme (24).

Au lieu de $\frac{1}{C+2}$, on trouve, en posant $d = \frac{1}{2}$, la borne

$$\frac{C + 2 - \sqrt{C^2 + 4}}{2C}$$

qui est en effet plus grande que $\frac{1}{C+2}$.

Par la même voie on trouve pour $\Psi(C)$ la valeur

$$\frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{4}{C}} - 1\right]$$

Bien entendu, il faudrait montrer encore que les bornes exactes sont atteintes pour le demi-espace.

Remarque.

On peut déterminer la valeur $\log\frac{1}{2d}$ de $g(P_0)$ pour le demi-plan par une voie analogue à celle par laquelle nous avons trouvé la valeur $\frac{1}{2d}$ de l'inégalité (25). Cela donne la valeur d'une intégrale intéressante. On trouve

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \log\frac{1}{\varrho}\, d_R \operatorname{arc\,tg}\frac{R}{d} = -\frac{d}{\pi}\int_0^\infty \frac{\log(R^2 + d^2)}{R^2 + d^2}\, dR.$$

Puisque nous savons que la valeur est $\log\frac{1}{2d}$, on trouve

$$\int_0^\infty \frac{\log(R^2 + d^2)}{R^2 + d^2}\, dR = \frac{\pi}{d}\log 2d.$$

Dordrecht, novembre 1941.

Mathematics. — *La représentation conforme au voisinage d'un point frontière.* Par Prof. J. WOLFF. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of January 31, 1942.)

Mlle JACQUELINE FERRAND a démontré le théorème suivant:

Si un domaine Δ simplement connexe du plan de la variable complexe ζ contient un secteur angulaire dont le sommet a est sur sa frontière, alors dans toute représentation conforme de Δ sur le demi-plan $D\,(x > 0)$ du plan de la variable complexe $z = x + iy$, telle qu'au point $z = \infty$ correspond le bout premier (Primende, *au sens de* M. C. Carathéodory) *contenant a,*

$$a = \textit{limite angulaire de } \zeta \textit{ pour } z \to \infty.\text{[1]}$$

Nous montrerons que la présence du secteur angulaire de sommet a est superflue. En remplaçant pour plus de commodité $z = \infty$ par $z = 0$ nous démontrerons donc le

THÉORÈME. Soit a un point frontière accessible d'un domaine Δ du plan de la variable complexe ζ, qu'on représente conformément sur le demi-plan D $(x > 0)$ du plan de la variable complexe $z = x + iy$ au moyen d'une fonction $\zeta = \zeta(z)$ tel que $z = 0$ correspond au bout premier qui contient a. Alors a est la limite angulaire de $\zeta(z)$ pour $z \to 0$.

Démonstration. Sans nuire à la généralité supposons Δ borné. Le point a étant accessible, Δ contient une courbe continue Γ aboutissant en a, image d'une courbe continue C dans D aboutissant en O $(z = 0)$. Parceque Δ est borné nous savons que, en posant $|z| = \varrho$, $\arg z = \varphi$,

$$\int_0^\infty d\varrho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2 \cdot \varrho\, d\varphi < \infty. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Indiquons par $L(\varrho)$, $0 < \varrho < \infty$ la longueur de l'image dans Δ du demi-cercle $|z| = \varrho$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ de D. Alors

$$\{L(\varrho)\}^2 = \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{d\zeta}{dz}\right| \varrho\, d\varphi\right)^2 \leqq \pi\varrho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2 \varrho\, d\varphi. \quad . \quad . \quad (2)$$

De (1) et (2) on tire:

$$\int_0^\infty \{L(\varrho)\}^2 \frac{d\varrho}{\varrho} < \infty. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

L'inégalité (3) permet de conclure que, ϱ tendant vers zéro, $L(\varrho)$ tend *approximativement* vers zéro, c'est à dire: quelque soit le nombre positif ε, la mesure $\mu(r)$, $r > 0$, de l'ensemble des valeurs de ϱ entre 0 et r pour lesquelles $L(\varrho) > \varepsilon$ satisfait à

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mu(r)}{r} = 0.$$

[1]) Comptes rendus de l'Ac. des Sc. de Paris, 9 Juin 1941.

Traçons dans D deux demi-droites OA et OB différentes, du reste arbitraires, issues de O ($z = 0$). Soit ϱ un nombre positif. Le demi-cercle dans D de centre O et de rayon ϱ coupe OA et OB, soit en z_1 et z_2 respectivement, et, pourvu que ϱ soit suffisamment petit, il coupe la courbe C, soit en z^*. Il est évident que

$$|\zeta(z_1) - \zeta(z^*)| \leqq L(\varrho) \text{ et } |\zeta(z_2) - \zeta(z^*)| \leqq L(\varrho). \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Or, ϱ tendant vers zéro, $\zeta(z^*)$ tend vers α et $L(\varrho)$ tend approximativement vers zéro. Donc, en vertu de (4), sur OA et OB la fonction $\zeta(z)$ tend approximativement vers α pour $z \to 0$. Et, parceque $\zeta(z)$ est bornée dans D, cela entraîne que sur les demi-droites issues de O intérieures à un angle $A'OB'$ quelconque plus petit que l'angle $AOB < \pi$, et ayant même bissectrice que celui-ci, la fonction $\zeta(z)$ tend *uniformément* vers α pour $z \to 0$. On le voit en représentant l'angle $AOB < \pi$ conformément sur un cercle K et en appliquant l'intégrale de POISSON à la transformée de la fonction $\zeta(z)$: si $w(z)$ est la fonction représentatrice, la limite approximative $\zeta \to \alpha$ pour $z \to 0$ sur OA et OB devient la limite approximative $\zeta \to \alpha$ sur la circonférence de K pour $w \to w(o)$, des deux côtés de $w(o)$. La fonction ζ étant bornée dans K, l'intégrale de POISSON montre que α est la limite angulaire de ζ pour $w \to w(o)$ dans K. Par suite ζ tend vers α pour $z \to 0$ dans l'angle $A'OB'$.

Les demi-droites OA et OB étant arbitraires, le théorème est démontré.

Mathematics. — *Die Berechnung der vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art für grosse Werte von* $|k|$. Von S. C. VAN VEEN. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of January 31, 1942.)

Die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art

$$K(k) = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{v(1-v)(1-k^2v)}} \quad . \quad . \quad (1)$$

und

$$E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2u^2}{1-u^2}}\,du = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2v}{v(1-v)}}\,dv \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

sind analytische Funktionen von k im Innern der von $k = +1$ nach $+\infty$ und von $k = -1$ nach $-\infty$ aufgeschlitzten komplexen k-Ebene, die eindeutig bestimmt sind durch die Verabredung

$$|\arg\sqrt{1-k^2v}| < \pi \text{ für } 0 \leqq v \leqq 1$$

(vgl. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **45**, 32 (1942) V.E. I, (IV)). Für $k \to 0$ wird dann

$$K(k) \to \frac{\pi}{2};\ E(k) \to \frac{\pi}{2};$$

und für $|k| \leqq 1$ gelten die hypergeometrischen Entwicklungen

$$K(k) = \frac{\pi}{2} F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; 1; k^2),$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2} F(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; 1; k^2).$$

(Die Entwicklung für $K(k)$ gilt nicht für $k^2 = 1$). Zur Berechnung für grosse Werte von k können neben den Methoden der V.E. I (vgl. V.E. I (IV)) die folgenden beiden Sätze benutzt werden, wo die hypergeometrischen Entwicklungen nach k^2 in solche nach $\frac{1}{k^2}$, bzw. $1 - \frac{1}{k^2}$ transformiert werden, nämlich

Satz I: *Für* $|\arg. k^2| < \pi$, $|\arg.\sqrt{1-k^2v}| < \pi$, *und* $0 \leqq v \leqq 1$ *ist*

$$k\,K(k) = K\left(\frac{1}{k}\right) + i\,\mathrm{sgn}\,.\,I(k^2)\,.\,K\left(\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}\right).$$

Satz II: *Für* $|\arg. k^2| < \pi$, $|\arg.\sqrt{1-k^2v}| < \pi$, *und* $0 \leqq v \leqq 1$ *ist*

$$k\,E(k) = k^2 E\left(\frac{1}{k}\right) + (1-k^2)K\left(\frac{1}{k}\right) + i\,\mathrm{sgn}\,I(k^2)\,.\left\{K\left(\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}\right) - k^2 E\left(\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}\right)\right\}.$$