Traçons dans D deux demi-droites OA et OB différentes, du reste arbitraires, issues de O $(z=0)$. Soit ϱ un nombre positif. Le demi-cercle dans D de centre O et de rayon ϱ coupe OA et OB, soit en z_1 et z_2 respectivement, et, pourvu que ϱ soit suffisamment petit, il coupe la courbe C, soit en z^*. Il est évident que

$$|\zeta(z_1)-\zeta(z^*)| \leqq L(\varrho) \text{ et } |\zeta(z_2)-\zeta(z^*)| \leqq L(\varrho). \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Or, ϱ tendant vers zéro, $\zeta(z^*)$ tend vers α et $L(\varrho)$ tend approximativement vers zéro. Donc, en vertu de (4), sur OA et OB la fonction $\zeta(z)$ tend approximativement vers α pour $z \to 0$. Et, parceque $\zeta(z)$ est bornée dans D, cela entraîne que sur les demi-droites issues de O intérieures à un angle $A'OB'$ quelconque plus petit que l'angle $AOB < \pi$, et ayant même bissectrice que celui-ci, la fonction $\zeta(z)$ tend *uniformément* vers α pour $z \to 0$. On le voit en représentant l'angle $AOB < \pi$ conformément sur un cercle K et en appliquant l'intégrale de POISSON à la transformée de la fonction $\zeta(z)$: si $w(z)$ est la fonction représentatrice, la limite approximative $\zeta \to \alpha$ pour $z \to 0$ sur OA et OB devient la limite approximative $\zeta \to \alpha$ sur la circonférence de K pour $w \to w(0)$, des deux côtés de $w(0)$. La fonction ζ étant bornée dans K, l'intégrale de POISSON montre que α est la limite angulaire de ζ pour $w \to w(0)$ dans K. Par suite ζ tend vers α pour $z \to 0$ dans l'angle $A'OB'$.

Les demi-droites OA et OB étant arbitraires, le théorème est démontré.

Mathematics. — *Die Berechnung der vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art für grosse Werte von* $|k|$. Von S. C. VAN VEEN. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of January 31, 1942.)

Die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art

$$K(k) = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{v(1-v)(1-k^2v)}} \quad . \quad . \quad (1)$$

und

$$E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2u^2}{1-u^2}}\,du = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2v}{v(1-v)}}\,dv \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

sind analytische Funktionen von k im Innern der von $k=+1$ nach $+\infty$ und von $k=-1$ nach $-\infty$ aufgeschlitzten komplexen k-Ebene, die eindeutig bestimmt sind durch die Verabredung

$$|arg\sqrt{1-k^2v}| < \pi \text{ für } 0 \leqq v \leqq 1$$

(vgl. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **45**, 32 (1942) V.E. I, (IV)). Für $k \to 0$ wird dann

$$K(k) \to \frac{\pi}{2}; \ E(k) \to \frac{\pi}{2};$$

und für $|k| \leqq 1$ gelten die hypergeometrischen Entwicklungen

$$K(k) = \frac{\pi}{2} F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; 1; k^2),$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2} F(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; 1; k^2).$$

(Die Entwicklung für $K(k)$ gilt nicht für $k^2=1$). Zur Berechnung für grosse Werte von k können neben den Methoden der V.E. I (vgl. V.E. I (IV)) die folgenden beiden Sätze benutzt werden, wo die hypergeometrischen Entwicklungen nach k^2 in solche nach $\frac{1}{k^2}$, bzw. $1-\frac{1}{k^2}$ transformiert werden, nämlich

Satz I: *Für* $|arg.\,k^2| < \pi$, $|arg.\sqrt{1-k^2v}| < \pi$, *und* $0 \leqq v \leqq 1$ *ist*

$$k\,K(k) = K\left(\frac{1}{k}\right) + i\,sgn\,.\,I(k^2)\,.\,K\left(\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}\right).$$

Satz II: *Für* $|arg.\,k^2| < \pi$, $|arg.\sqrt{1-k^2v}| < \pi$, *und* $0 \leqq v \leqq 1$ *ist*

$$k\,E(k) = k^2 E\left(\frac{1}{k}\right) + (1-k^2)K\left(\frac{1}{k}\right) + i\,sgn\,I(k^2).\left\{K\left(\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}\right) - k^2 E\left(\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}\right)\right\}.$$

Die Funktionen $K\left(\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}\right)$ und $E\left(\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}\right)$ können für grosses $|k|$ nach den Vorschriften von V.E. I (II), (35) [1]), bzw. V.E. I (III), (47) [2]) mit $l_q=\frac{1}{k}$ in stark konvergente Reihen entwickelt werden.

Obgleich Satz I schon von FUCHS und GOURSAT [3]) abgeleitet worden ist, dürfte der folgende direkte und einfache Beweis vielleicht nicht ohne Interesse sein.

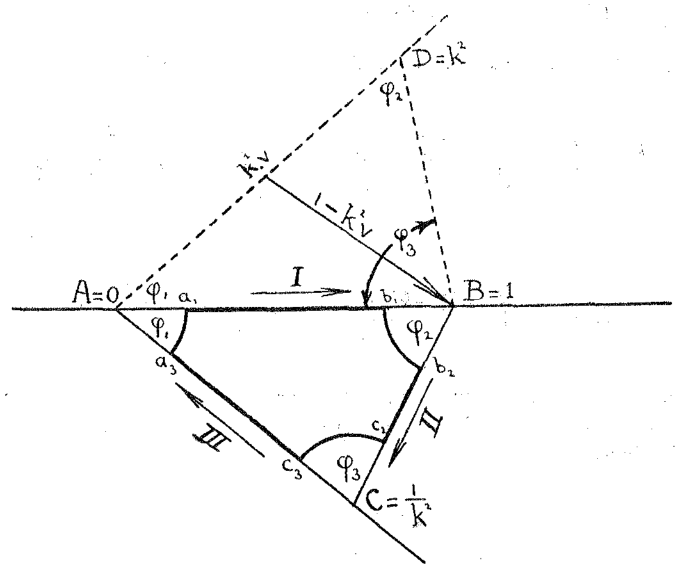

Fig. 1.

Beweis des Satzes I:

a) $I(k^2)>0$ (Fig. 1).

Wir integrieren

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v(1-v)(1-k^2v)}}$$

in negativer Richtung über die Kontur $a_1\,b_1\,b_2\,c_2\,c_3\,a_3\,a_1$.

$$Aa_1=Aa_3=Bb_1=Bb_2=Cc_2=Cc_3=\delta;\ A=0,\ B=1,\ C=\frac{1}{k^2}.$$

Für I: $arg\,v=0$; $arg\ (1-v)=0$ und $arg\ (1-k^2v)$ variiert von 0 bis $-\varphi_3$.

„ II: $arg\ v$ variiert von 0 bis $-\varphi_1$; $arg\ (1-v)=+\varphi_2$ und $arg\ (1-k^2v)=-\varphi_3$.

„ III: $arg\ v=-\varphi_1$; $arg\ (1-v)$ variiert von $+\varphi_2$ nach 0 und $arg\ (1-k^2v)=0$.

Die Integrale über die Kreisbogen $b_1\,b_2$, $c_2\,c_3$ und $a_3\,a_1$ sind $O(\delta^{\frac12})$.

Sie verschwinden somit für $\delta\to 0$.

Der Integrand ist analytisch auf der Kontur $a_1\ldots\ldots a_1$ und innerhalb derselben.

Für I ist das Integral

$$\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{v(1-v)(1-k^2v)}}=2\,K(k)\quad\ldots\ldots\quad(3)$$

[1]) Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **44**, 1082 (1941).

[2]) Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **44**, 1203 (1941).

[3]) Cours de M. Hermite 1881—1882. Paris 1883. S. 191—196.

Für II

$$\int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{dv}{\sqrt{v(1-v)(1-k^2v)}}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(4)$$

Setzt man hier

$$v=1-z\left(1-\frac{1}{k^2}\right),\qquad(0\leqq z\leqq 1),$$

also

$$1-v=z\left(1-\frac{1}{k^2}\right),$$

und

$$1-k^2v=(1-k^2)(1-z),$$

so findet man für II

$$arg\,.\,z=arg\,.\,(1-z)=0;\ arg\,(1-k^2)=-\varphi_3;\ arg\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\varphi_2$$

und (4) geht über in

$$\left.\begin{aligned}&-\int_0^1 \frac{\left(1-\frac{1}{k^2}\right)dz}{\sqrt{z\left(1-\frac{1}{k^2}\right)(1-z)(1-k^2)\left\{1-\left(1-\frac{1}{k^2}\right)z\right\}}}\\ &=\frac{-\left|1-\frac{1}{k^2}\right|e^{i\varphi_2}}{\left|1-\frac{1}{k^2}\right|^{\frac12}|1-k^2|^{\frac12}\,e^{\frac{i(\varphi_2-\varphi_3)}{2}}}\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{z(1-z)\left\{1-\left(1-\frac{1}{k^2}\right)z\right\}}}\\ &=-\frac{2e^{\frac{i(\varphi_2+\varphi_3)}{2}}}{|k|}K\left(\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}\right)=-\frac{2i}{k}K\left(\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}\right).\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Für III ist das Integral

$$\int_{\frac{1}{k^2}}^{0} \frac{dv}{\sqrt{v(1-v)(1-k^2v)}}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(6)$$

Setzt man hier $v=\frac{w}{k^2}$, $(0\leqq w\leqq 1)$, so geht (6) über in

$$-\frac{1}{k^2}\int_0^1\frac{dw}{\sqrt{\frac{w}{k^2}\left(1-\frac{w}{k^2}\right)(1-w)}}=-\frac{2}{k}K\left(\frac{1}{k}\right).\quad\ldots\quad(7)$$

Aus (3), (5) und (7) ergibt sich

$$k\,K(k) = K\left(\frac{1}{k}\right) + i\,K\left(\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}\right) \quad \text{für } I(k^2) > 0. \quad \ldots \quad (8)$$

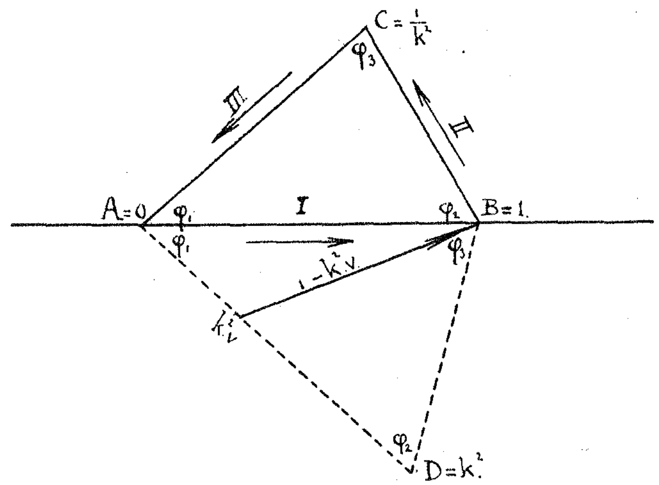

Fig. 2.

b) $I(k^2) < 0$ (Fig. 2).

In analoger Weise findet man bei Integration in positiver Richtung über die Kontur ABC:

für I: $arg\, v = 0$; $arg\,(1-v) = 0$ und $arg\,(1-k^2 v)$ variiert von 0 bis $+\varphi_3$;
„ II: $arg\, v$ variiert von 0 bis $+\varphi_1$; $arg\,(1-v) = -\varphi_2$ und $arg\,(1-k^2 v) = +\varphi_3$;
„ III: $arg\, v = +\varphi_1$; $arg\,(1-v)$ variiert von $-\varphi_2$ nach 0 und $arg\,(1-k^2 v) = 0$.

Wie oben ist das Integral für I

$$\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{v(1-v)(1-k^2 v)}} = 2\,K(k). \quad \ldots \quad (9)$$

Für II ist $arg\,(1-k^2) = +\varphi_3$; $arg\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = -\varphi_2$ und das Integral hat den Wert

$$\frac{-\left|1-\frac{1}{k^2}\right| e^{-i\varphi_2}}{\left|1-\frac{1}{k^2}\right|^{\frac{1}{2}} |1-k^2|^{\frac{1}{2}}\, e^{\frac{-i(\varphi_2-\varphi_3)}{2}}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)\left\{1-\left(1-\frac{1}{k^2}\right)z\right\}}} = \frac{+2i}{k} K\left(\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}\right). \quad (10)$$

Schliesslich für III bekommen wir

$$\int_{\frac{1}{k^2}}^{0} \frac{dv}{\sqrt{v(1-v)(1-k^2 v)}} = -\frac{2}{k} K\left(\frac{1}{k}\right). \quad \ldots \quad (11)$$

Aus (9), (10) und (11) ergibt sich

$$k\,K(k) = K\left(\frac{1}{k}\right) - i\,K\left(\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}\right) \quad \text{für } I(k^2) < 0. \quad \ldots \quad (12)$$

Aus (8) und (12) folgt Satz I.

Beweis des Satzes II. Bekanntlich ist

$$E(k) = (1-k^2)\,K(k) + k\,(1-k^2)\,\frac{dK(k)}{dk} = (1-k^2)\,\frac{dk\,.\,K(k)}{dk}. \quad \ldots \quad (13)$$

Setzt man

$$k^2 = c$$

$$K(k) = \bar{K}(c); \qquad E(k) = \bar{E}(c);$$

$$K\left(\frac{1}{k}\right) = \bar{K}\left(\frac{1}{c}\right); \qquad E\left(\frac{1}{k}\right) = \bar{E}\left(\frac{1}{c}\right);$$

$$K\left(\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}\right) = \bar{K}\left(\frac{c-1}{c}\right); \quad E\left(\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}\right) = \bar{E}\left(\frac{c-1}{c}\right),$$

so geht Satz I über in

$$k\,.\,\bar{K}(c) = \bar{K}\left(\frac{1}{c}\right) + i\,sgn\,.\,I(c)\,.\,\bar{K}\left(\frac{c-1}{c}\right), \quad \ldots \quad (14)$$

und (13) in

$$\bar{E}(c) = 2\,k\,(1-c)\,\frac{d\,.\,k\,.\,\bar{K}(c)}{dc} = 2\,c\,(1-c)\,\frac{d\bar{K}(c)}{dc} + (1-c)\,\bar{K}(c) \quad . \quad (15)$$

Aus (14) und (15) ergibt sich

$$\bar{E}(c) = 2\,k\,(1-c)\,\frac{d}{dc}\left\{\bar{K}\left(\frac{1}{c}\right) + i\,sgn\,.\,I(c)\,.\,\bar{K}\left(\frac{c-1}{c}\right)\right\} =$$

$$= 2\,k\,(1-c)\left\{-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\bar{K}(u)}{du}\right)_{u=\frac{1}{c}} + \frac{i\,sgn\,I(c)}{c^2}\left(\frac{d\bar{K}(u)}{du}\right)_{u=\frac{c-1}{c}}\right\} =$$

$$= -2k(1-c)\left\{\frac{\bar{E}\left(\frac{1}{c}\right)-\left(1-\frac{1}{c}\right)\bar{K}\left(\frac{1}{c}\right)}{2(c-1)} - i\,sgn\,.\,I(c)\,.\,\frac{\bar{E}\left(\frac{c-1}{c}\right)-\frac{1}{c}\,.\,\bar{K}\left(\frac{c-1}{c}\right)}{2(c-1)}\right\} =$$

$$= k\left\{\bar{E}\left(\frac{1}{c}\right)-\left(1-\frac{1}{c}\right)\bar{K}\left(\frac{1}{c}\right)\right\} - ik\,sgn\,.\,I(c)\left\{\bar{E}\left(\frac{c-1}{c}\right)-\frac{1}{c}\,\bar{K}\left(\frac{1-c}{c}\right)\right\},$$

also

$$k\,E(k) = k^2\,E\left(\frac{1}{k}\right) + (1-k^2)\,K\left(\frac{1}{k}\right) + i\,sgn\,.\,I(k^2)\left\{K\left(\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}\right) - k^2\,E\left(\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}\right)\right\}$$

w. z. b. w.