Mathematics. — *Contribution à la théorie métrique des approximations diophantiques non-linéaires* (Première communication). Par J. F. KOKSMA. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of January 31, 1942.)

§ 1. *Introduction.*

I. On doit à M. A. KHINTCHINE le théorème important suivant [1]:

Théorème 1. *Soit n un nombre naturel et $\omega(x)$ une fonction positive du nombre naturel x, telle que la fonction $x(\omega(x))^n$ tend vers zéro monotonement, si $x \to \infty$. Considérons les inégalités simultanées*

$$|\theta_\nu x - y_\nu| < \omega(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

où $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ désigne un point quelconque de l'espace R_n. Considérons en outre la série

$$\sum_{x=1}^{\infty} (\omega(x))^n . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Assertion A. *Pour presque tous les points $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ de l'espace R_n le système (1) admet une infinité de solutions entières $x \geqq 1, y_1, y_2, \ldots, y_n$, si la série (2) diverge.*

Assertion B. *Pour presque tous les points $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ de l'espace R_n le système (1) n'a qu'un nombre fini de solutions entières $x \geqq 1, y_1, y_2, \ldots, y_n$, si la série (2) converge.*

Remarques. 1. L'expression „presque tous les points" etc. veut dire que les autres points forment un ensemble de mesure nulle au sens de LEBESGUE.

2. M. KHINTCHINE considère aussi l'intégral $\int^{\infty} (\omega(t))^n \, dt$ au lieu de la somme (2) sous la condition supplémentaire que la fonction $\omega(t)$ soit continue. Il est clair que cela ne fait aucune différence essentielle.

II. Soit $f_\nu(1), f_\nu(2), \ldots$ pour $\nu = 1, 2, \ldots, n$ une suite croissante arbitraire de nombres naturels. Alors le théorème 1A ne donne aucun résultat sur l'approximation simultanée des n expressions

$$\theta_\nu f_\nu(x) - y_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

à zéro, excepté si $f_\nu(x) = x$ $(x = 1, 2, \ldots)$, tandis que le résultat fourni par le théorème 1B est peu intéressant.

Toutefois dans le cas général indiqué on peut présumer un théorème analogue. Comme je l'ai démontré à une autre occasion, la généralisation de l'assertion B ne rencontre aucune difficulté. Par exemple on a la proposition suivante, contenue dans une proposition encore plus générale [2]:

Théorème 2. *Soit n un nombre naturel, $f_\nu(1), f_\nu(2), \ldots$ pour $\nu = 1, 2, \ldots, n$ une suite croissante de nombres naturels et $\omega_\nu(x)$ pour $\nu = 1, 2, \ldots, n$ une fonction positive du nombre naturel x, telle que les séries $\sum_{x=1}^{\infty} \underset{1 \leqq \nu \leqq n}{\mathrm{Max}} (\omega_\nu(x)/f_\nu(x))$ et*

$$\sum_{x=1}^{\infty} \prod_{\nu=1}^{n} \omega_\nu(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

[1] A. KHINTCHINE, Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen. Math. Z. **24**, p. 706—714 (1926).

[2] J. F. KOKSMA, Metrisches über die Approximation reeller Zahlen. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **41**, p. 45—47 (1938).

Ueber die asymptotische Verteilung eines beliebigen Systems (f_ν) von n reellen Funktionen f_ν der m ganzzahligen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ modulo Eins. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch. **43**, p. 211—214 (1940).

convergent. Alors pour presque tous les points $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ de l'espace R_n le système des inégalités

$$|\theta_\nu f_\nu(x) - y_\nu| < \omega_\nu(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \quad . \quad . \quad (4)$$

n'a qu'un nombre fini de solutions entières $x \geqq 1, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Jusqu' ici je n'ai pas réussi à généraliser d'une manière aussi générale la belle démonstration de M. KHINTCHINE du théorème 1A. Mais pourtant les résultats obtenus concernent quelques classes bien étendues de systèmes de suites $f_\nu(1), f_\nu(2), \ldots$, comme montrent déjà les théorèmes 3 et 4, dont la démonstration forme le but de cette première communication. Autrefois j'ai donné un exposé succinct des résultats de ces recherches [3].

III. Soit

$$f(1), f(2), \ldots$$

une suite arbitraire de nombres naturels croissants. Par $d(z, x)$ j'indique le plus grand diviseur commun $(f(z), f(x))$ des nombres $f(z)$ et $f(x)$ $(z, x = 1, 2, \ldots)$. Alors pour toute suite de cette espèce et toute paire de nombres α, β satisfaisant aux inégalités $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1$, je définis la fonction arithmétique $A(x, \alpha, \beta)$ $(x = 1, 2, \ldots)$ comme le nombre des nombres naturels de l'intervalle $\alpha f(x) < u < \beta f(x)$ qui pour aucune valeur de l'indice z $(1 \leqq z < x)$ ne sont divisibles par le nombre $\frac{f(x)}{d(z, x)}$.

Définition 1. *Nous dirons que la suite $f(1), f(2), \ldots$ de nombres naturels croissants possède la propriété $\mathfrak{P}$, si à toute paire de nombres α, β $(0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1)$ correspondent un nombre positif $C = C(\alpha, \beta)$ et un indice x_0 indépendant de x tels que*

$$A(x, \alpha, \beta) \geqq C(\beta - \alpha) f(x), \text{ si } x \geqq x_0.$$

Nous dirons que cette suite possède la propriété $\mathfrak{P}^*$, si en outre il est possible de choisir le nombre C indépendant des nombres α, β.

Soit S un système de $n \geqq 1$ suites croissantes de nombres naturels

$$f_\nu(1), f_\nu(2), \ldots \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

B un système de n paires de nombres α_ν, β_ν avec $0 \leqq \alpha_\nu < \beta_\nu \leqq 1$ et soit posé pour tout nombre naturel N

$$H(N, B) = H(N, B, S) = \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} \prod_{\nu=1}^{n} \frac{A_\nu(x, \alpha_\nu, \beta_\nu)}{f_\nu(x)}, \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

où $A_\nu(x, \alpha_\nu, \beta_\nu)$ indique la fonction $A(x, \alpha_\nu, \beta_\nu)$ correspondante à la suite $f_\nu(1), f_\nu(2), \ldots$.

Définition 2. *Nous dirons que le système S possède la propriété $\mathfrak{Q}$, si à tout système B correspondent un nombre positif $c = c(B)$ et un indice N_0 indépendant de N tels que*

$$\frac{H(N, B, S)}{\prod_{\nu=1}^{n} (\beta_\nu - \alpha_\nu)} \geqq c(B), \text{ si } N \geqq N_0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Nous dirons que S possède la propriété $\mathfrak{Q}^*$, si en outre il est possible de choisir le nombre c indépendant du système B.

Si un système S formé par une suite seule possède la propriété $\mathfrak{Q}$ (la propriété $\mathfrak{Q}^*$) nous dirons que cette suite elle-même possède la propriété $\mathfrak{Q}$ (la propriété $\mathfrak{Q}^*$).

Conclusions évidentes. 1. Si une suite possède la propriété $\mathfrak{P}$ (la propriété $\mathfrak{P}^*$) elle possède la propriété $\mathfrak{Q}$ (la propriété $\mathfrak{Q}^*$).

2. Si toute suite d'un système S possède la propriété $\mathfrak{P}$ (la propriété $\mathfrak{P}^*$) le système S possède la propriété $\mathfrak{Q}$ (la propriété $\mathfrak{Q}^*$).

3. Si à un système S possédant la propriété $\mathfrak{Q}$ (la propriété $\mathfrak{Q}^*$) on ajoute une suite possédant la propriété $\mathfrak{P}$ (la propriété $\mathfrak{P}^*$), le nouveau système S' possède la propriété $\mathfrak{Q}$ (la propriété $\mathfrak{Q}^*$).

[3] J. F. KOKSMA, Niet-lineaire simultane approximaties, Handelingen 28ste Ned. Nat. Gen. Congres, p. 95—96 (1941).

4. Si les n suites d'un système S sont identiques deux à deux, et possèdent la propriété Q (la propriété Q^*), la généralisation de HÖLDER de l'inégalité de CAUCHY-RIEMANN-SCHWARZ[4]) nous apprend que le système S possède la propriété Q (la propriété Q^*) sous la condition supplémentaire qu'on se restreigne aux systèmes B avec $\alpha_\nu = \alpha_1$, $\beta_\nu = \beta_1$.

Exemples. A. Il est clair que la suite $f(1), f(2), \ldots$ possède la propriété $\mathfrak{P}^*$, si

a. $f(x) = d^x$, où d désigne un nombre naturel $\geqq 2$, indépendant de x (on peut prendre pour C toute constante positive $< \frac{d-1}{d}$),

ou b. $f(x) = x\,!$, (dans les cas b, c et d on peut prendre pour C toute constante positive < 1),

ou c. $f(x) = p(x) =$ le x-ième nombre premier,

ou d. $f(x) = p(1)\,p(2)\ldots p(x)$.

B. Plus généralement, je vais démontrer que toute suite qui possède la propriété

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{x\to\infty} \sum_{z=1}^{x-1} \frac{f(z)}{f(x)} < 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

possède la propriété $\mathfrak{P}^*$. En effet, on a

$$A(x, \alpha, \beta) \geqq [(\beta-\alpha)\, f(x)] - \sum_{z=1}^{x-1} [(\beta-\alpha)\, d(z, x)] - (x-1)$$

$$\geqq (\beta-\alpha)\, f(x) \left\{ \left(1 - \sum_{z=1}^{x-1} \frac{f(z)}{f(x)} \right) - \frac{x}{(\beta-\alpha)\, f(x)} \right\},$$

d'où suit l'assertion parceque (7) entraîne $\frac{x}{f(x)} \to 0$ si $x \to \infty$.

Application. Toute suite qui possède la propriété

$$f(x) \geqq \mu f(x-1) \quad \text{pour} \quad x \geqq x_0,$$

μ désignant un nombre > 2 indépendant de x, et x_0 désignant un indice convenablement choisi, possède la propriété $\mathfrak{P}^*$. En effet, on voit immédiatement que l'inégalité (7) est remplie.

C. On peut démontrer que la suite $1, 2, 3, \ldots$ de tous les nombres naturels (donc $f(x) = x$) possède la propriété Q^* et aussi que pour tout système d'exposants naturels $m_1, m_2, \ldots, m_n$ le système des n suites définies par $f_\nu(x) = x^{m_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ possède la propriété Q^*. Comme dans la première communication je ne ferai pas usage de cette assertion, je n'en donne pas une démonstration ici.

Remarquons finalement que d'après la conclusion 3 chaque système S, formé par n suites nommées dans les exemples A, B, C possédera la propriété Q^*. D'ailleurs chacune de ces suites y peut configurer autant de fois qu'on le veut.

IV. Formulons maintenant les Théorèmes 3 et 4.

Théorème 3. *Soit n un nombre naturel et $\omega_\nu(x)$ pour $\nu = 1, 2, \ldots, n$ une fonction positive non-croissante du nombre naturel x, telle que la série (3) diverge et satisfaisant à*

$$\omega_\nu(x) \leqq \tfrac{1}{2} \; (\nu = 1, 2, \ldots, n) \; (x \geqq 1); \; x \prod_{\nu=1}^{n} \omega_\nu(x) \to 0, \; \text{si} \; x \to \infty . \qquad (8)$$

Soit S un système de n suites croissantes de nombres naturels $f_\nu(1), f_\nu(2), \ldots$ possédant la propriété Q. Alors l'ensemble des points $(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n)$ de l'espace R_n pour lesquels le système des inégalités (4) admet une infinité de solutions entières $x \geqq 1, y_1, y_2, \ldots, y_n$

[4]) Il suffit de prendre le cas special

$$\left\{ \sum_{x=1}^{N} c_x \right\}^n \leqq N^{n-1} \sum_{x=1}^{N} c_x^n \qquad (N \geqq 1, n \geqq 1.\, c_1, \ldots, c_N \geqq 0).$$

est épais partout, c'est à dire: possède par rapport à chaque parallélépipède $\alpha_\nu < u_\nu < \beta_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ une densité positive au sens de LEBESGUE[5]).

Théorème 4. *Soit n un nombre naturel et $\omega_\nu(x)$ pour $\nu = 1, 2, \ldots, n$ une fonction positive non-croissante du nombre naturel x, telle que la série (3) diverge et satisfaisant à (8). Soit finalement S un système de n suites croissantes de nombres naturels $f_\nu(1), f_\nu(2), \ldots$, possédant la propriété Q^* et tel que*

$$d_\nu(z, x) \to \infty, \; \text{si} \; z \to \infty, \; \textit{uniformément en} \; x > z, \; (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Alors pour presque tous les points $(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n)$ de l'espace R_n le système des inégalités (4) a une infinité de solutions entières $x \geqq 1, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Remarque. Il saute aux yeux qu'en général les relations (8) ne donnent aucune difficulté dans les applications, car les assertions des théorèmes 3 et 4 ayant été démontrés dans le cas (8), restent justes, si l'on y remplace les fonctions $\omega_\nu(x)$ par des fonctions ayant des valeurs supérieures.

§ 2. *Lemmes.*

Remarques préliminaires. 1. Si S désigne un système de n suites croissantes de nombres naturels $f_\nu(1), f_\nu(2), \ldots$, nous indiquerons par $f_{\nu k}^*(x+i)$ et $f_{\nu i}^*(x+k)$ les quotients

$$\frac{f_\nu(x+i)}{d_\nu(x+i, x+k)} \quad \text{et} \quad \frac{f_\nu(x+k)}{d_\nu(x+i, x+k)} \quad (0 \leqq i < k),$$

où $d_\nu(x+i, x+k)$ désigne le plus grand diviseur commun des nombres $f_\nu(x+i)$ et $f_\nu(x+k)$, comme il a été convenu dans § 1. III (les conventions du § 1. III restent valables pendant toute la durée de la démonstration et donc aussi dans les lemmes 1, 2, 3).

2. Sans nuire à la généralité on peut se restreindre aux points $(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n)$ du cube $0 < u_\nu < 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$.

Lemme 1. *Soit S un système de n suites croissantes de nombres naturels $f_\nu(1), f_\nu(2), \ldots, B$ un système de $2n$ nombres α_ν, β_ν tels que $0 \leqq \alpha_\nu < \beta_\nu \leqq 1$, $\omega_\nu(x)$ une fonction non-croissante et positive de $x = 1, 2, \ldots$ et $P^{(x)}_{r_1, r_2, \ldots, r_n}$*

$$(0 \leqq r_\nu < f_\nu(x) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n); \; x = 1, 2, \ldots)$$

le parallélépipède à n dimensions

$$\left| u_\nu - \frac{r_\nu}{f_\nu(x)} \right| < \frac{\omega_\nu(x)}{f_\nu(x)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Alors parmi les parallélépipèdes $P^{(x+k)}_{r_1, r_2, \ldots, r_n}$ ($x, k \geqq 1$ étant supposés fixes) il y a

$$\left[4^n \prod_{\nu=1}^{n} (\beta_\nu - \alpha_\nu) \prod_{\nu=1}^{n} f_\nu(x+k) \sum_{i=0}^{k-1} \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{(\beta_\nu - \alpha_\nu)\, d_\nu(x+i, x+k)} \right) \prod_{\nu=1}^{n} \omega_\nu(x+i) \right] \quad (9)$$

au plus qui pour au moins un des parallélépipèdes $P^{(x+i)}_{s_1, s_2, \ldots, s_n}$ $(0 \leqq i < k)$ possèdent les propriétés suivantes:

$P^{(x+k)}_{r_1, r_2, \ldots, r_n}$ et $P^{(x+i)}_{s_1, s_2, \ldots, s_n}$ ont des points communs;

$$s_\nu f_{\nu i}^*(x+k) - r_\nu f_{\nu k}^*(x+i) \neq 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n); \quad . \quad . \quad (10)$$

et

$$\alpha_\nu f_\nu(x+k) < r_\nu < \beta_\nu f_\nu(x+k) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \quad . \quad . \quad (11)$$

[5]) Dans ce mémoire $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ désignera le point variable de l'espace R_n.

Démonstration. Si les parallélépipèdes $P^{(x+i)}_{r_1, r_2, \ldots, r_n}$ et $P^{(x+k)}_{s_1, s_2, \ldots, s_n}$ ont des points communs, on a nécessairement

$$\left| \frac{s_\nu}{f_\nu(x+i)} - \frac{r_\nu}{f_\nu(x+k)} \right| < \frac{\omega_\nu(x+i)}{f_\nu(x+i)} + \frac{\omega_\nu(x+k)}{f_\nu(x+k)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

c'est à dire

$$| s_\nu f_\nu(x+k) - r_\nu f_\nu(x+i) | < 2\,\omega_\nu(x+i)\, f_\nu(x+k) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

et donc :

$$| s_\nu f^*_{\nu i}(x+k) - r_\nu f^*_{\nu k}(x+i) | < 2\,\omega_\nu(x+i)\, f^*_{\nu i}(x+k) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \quad (12)$$

Or, si en outre les n inégalités (10) sont valables, il y a un système de n nombres entiers K_ν, tel que

$$1 \leqq | K_\nu | \leqq 2\,\omega_\nu(x+i)\, f^*_{\nu i}(x+k) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \ldots \quad (13)$$

$$s_\nu f^*_{\nu i}(x+k) - r_\nu f^*_{\nu k}(x+i) = K_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \ldots \quad (14)$$

Les nombres x, k, i, ν, K_ν étant supposés fixes, toutes les solutions entières X, Y de l'équation diophantique

$$X f^*_{\nu i}(x+k) - Y f^*_{\nu k}(x+i) = K_\nu \quad \ldots \quad (15)$$

s'expriment par les formules

$$X = K_\nu X_0 + h f^*_{\nu k}(x+i), \quad Y = K_\nu Y_0 + h f^*_{\nu i}(x+k) \quad (h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

où X_0, Y_0 désigne une solution entière quelconque de l'équation

$$X f^*_{\nu i}(x+k) - Y f^*_{\nu k}(x+i) = 1.$$

Ainsi, à cause de la relation

$$d_\nu(x+i, x+k) = \frac{f_\nu(x+k)}{f^*_{\nu i}(x+k)},$$

le nombre des solutions entières X, Y de (15) satisfaisant à la fois à la relation

$$\alpha_\nu f_\nu(x+k) < Y < \beta_\nu f_\nu(x+k) \quad \ldots \quad (16)$$

sera au plus

$$[(\beta_\nu - \alpha_\nu)\, d_\nu(x+i, x+k)] + 1.$$

Alors, si K_ν parcourt les valeurs entières données par (13), le nombre total des solutions entières X, Y de (15) et (16) sera au plus

$$4\,\omega_\nu(x+i) f^*_{\nu i}(x+k) \{ (\beta_\nu - \alpha_\nu)\, d_\nu(x+i, x+k) + 1 \} =$$

$$= 4 \left(1 + \frac{1}{(\beta_\nu - \alpha_\nu)\, d_\nu(x+i, x+k)} \right) (\beta_\nu - \alpha_\nu)\, \omega_\nu(x+i)\, f_\nu(x+k).$$

De cela il découle que le nombre total des $P^{(x+k)}_{r_1, r_2, \ldots, r_n}$ satisfaisant pour au moins un des $P^{(x+i)}_{s_1, s_2, \ldots, s_n}$ $(0 \leqq i < k)$ aux inégalités (12), (10) et (11) est au plus égal à (9). C.q.f.d.

Lemme 2. *Soient les systèmes S et B, les fonctions $\omega_\nu(x)$ et les parallélépipèdes $P^{(x)}_{r_1, r_2, \ldots, r_n}$ définis comme dans le lemme 1 et soit en outre $\omega_\nu(x) \leqq \frac{1}{2}$. $E_x(B)$ désigne la somme de tous ces $P^{(x)}_{r_1, r_2, \ldots, r_n}$ (x étant supposé fixe) dont le centre est situé dans le parallélépipède*

$$\alpha_\nu < u_\nu < \beta_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Enfin $F_{x,k}(B)$ $(k \geqq 0)$ désigne l'ensemble de ceux des points de $E_{x+k}(B)$ qui n'appartiennent à aucun des ensembles $E_x(B), E_{x+1}(B), \ldots, E_{x+k-1}(B)$ $(F_{x,0}(B) = E_x(B))$.

Alors pour toute paire de nombres entiers $x \geqq 1$, $k \geqq 0$ la mesure au sens de LEBESGUE *de l'ensemble $F_{x,k}(B)$ satisfait à l'inégalité*

$$m\, F_{x,k}(B) \geqq 2^n \prod_{\nu=1}^{n} \omega_\nu(x+k) \left\{ \frac{\prod_{\nu=1}^{n} A_\nu(x+k, \alpha_\nu, \beta_\nu)}{\prod_{\nu=1}^{n} f_\nu(x+k)} - 4^n \prod_{\nu=1}^{n} (\beta_\nu - \alpha_\nu) \sum_{i=0}^{k-1} \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{(\beta_\nu - \alpha_\nu)\, d_\nu(x+i, x+k)} \right) \prod_{\nu=1}^{n} \omega_\nu(x+i) \right\}.$$

Démonstration. Toutes les solutions entières X, Y de l'équation

$$X f^*_{\nu, i}(x+k) - Y f^*_{\nu, k}(x+i) = 0$$

(x, k, i, ν étant supposés fixes) s'expriment par les formules

$$X = h f^*_{\nu, k}(x+i), \quad Y = h f^*_{\nu, i}(x+k) \qquad (h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

c'est à dire que l'inegalité

$$s_\nu f^*_{\nu, i}(x+k) - r_\nu f^*_{\nu, k}(x+i) \neq 0 \quad \ldots \quad (17)$$

est valable pour tout r_ν qui n'est pas divisible par $f^*_{\nu, i}(x+k)$. Ainsi, x, k, ν étant supposés fixes, le nombre des r_ν de l'intervalle $\alpha_\nu f_\nu(x+k) < r_\nu < \beta_\nu f_\nu(x+k)$ qui satisfont pour tout $P^{(x+i)}_{s_1, s_2, \ldots, s_n}$ $(0 \leqq i < k)$ à l'inégalité (17), est au moins égal à $A_\nu(x+k, \alpha_\nu, \beta_\nu)$. De là nous tirons la conclusion que le nombre des $P^{(x+k)}_{r_1, r_2, \ldots, r_n}$ satisfaisant pour tout $P^{(x+i)}_{s_1, s_2, \ldots, s_n}$ $(0 \leqq i < k)$ aux n inégalités (10) et dont en outre le centre est situé dans le parallélépipède $\alpha_\nu < u_\nu < \beta_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ est au moins égal à

$$\prod_{\nu=1}^{n} A_\nu(x+k, \alpha_\nu, \beta_\nu).$$

D'après le lemme 1, le nombre des $P^{(x+k)}_{r_1, r_2, \ldots, r_n}$, satisfaisant pour tout $P^{(x+i)}_{s_1, s_2, \ldots, s_n}$ aux n inégalités (10), n'ayant de points communs avec aucun des $P^{(x+i)}_{s_1, s_2, \ldots, s_n}$ et dont le centre est situé dans le parallélépipède $\alpha_\nu < u_\nu < \beta_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ est donc au moins égal à

$$\prod_{\nu=1}^{n} A_\nu(x+k, \alpha_\nu, \beta_\nu) - 4^n \prod_{\nu=1}^{n} (\beta_\nu - \alpha_\nu) \prod_{\nu=1}^{n} f_\nu(x+k) \sum_{i=0}^{k-1} \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{(\beta_\nu - \alpha_\nu)\, d_\nu(x+i, x+k)} \right) \prod_{\nu=1}^{n} \omega_\nu(x+i).$$

Or, ceci prouve le lemme à cause de la définition de l'ensemble $F_{x,k}(B)$, les $P^{(x+k)}_{r_1, r_2, \ldots, r_n}$ n'ayant de points communs deux à deux et possédant tous le volume

$$\frac{2^n \prod_{\nu=1}^{n} \omega_\nu(x+k)}{\prod_{\nu=1}^{n} f_\nu(x+k)}.$$

Lemme 3. *Si les conditions du lemme 2 et (8) sont remplies et si en outre les inégalités (6) et*

$$\prod_{\nu=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{(\beta_\nu - \alpha_\nu)\, d_\nu(x+i, x+k)} \right) \leqq \Omega(B) \quad (x \geqq x_0;\, i = 0, 1, \ldots, k-1;\, k \geqq 1) \quad (18)$$

sont vérifiées, où N_0, $c(B)$, x_0, $\Omega(B)$ désignent des nombres positifs ne dépendant que de la définition des systèmes S et B (et donc indépendant de N, x, k, i), alors à tout indice $x \geqq 1$ un nombre naturel $K = K(x)$ correspond tel que

$$m \sum_{i=0}^{K-1} E_{x+i}(B) \geqq \frac{(c(B))^2}{12 . 2^n\, \Omega(B)} \prod_{\nu=1}^{n} (\beta_\nu - \alpha_\nu). \quad \ldots \quad (19)$$

Remarque. Il est clair que sans nuire à la généralité il suffit de démontrer (19) sous la condition moins exigeante $x \geqq X_0$, où X_0 désigne un nombre positif dépendant de S, B, et du choix des $\omega_\nu(x)$. Car alors le lemme est évident.

Démonstration. Comme $F_{x,k}(B) \subseteq E_{x+k}(B)$, on a

$$m\left(\sum_{i=0}^{K-1} E_{x+i}(B)\right) \geqq m\left(\sum_{k=0}^{K-1} F_{x,k}(B)\right) = \sum_{k=0}^{K-1} m\, F_{x,k}(B),$$

les ensembles $F_{x,k}(B)$ n'ayant pas de points communs deux á deux. Je remarque que'il est possible de choisir le nombre $X_0' \geqq x_0$, tel que

$$\prod_{\nu=1}^{n} \omega_\nu(x) < \frac{c(B)}{2 \cdot 4^n \cdot \Omega(B)} \quad \text{pour } x \geqq X_0',$$

car d'après (8) le membre gauche tend vers zéro, si $x \to \infty$. De la divergence de la série (3) nous concluons qu'un nombre $K = K(x)$ existe tel que

$$\sum_{k=0}^{K-1} \prod_{\nu=1}^{n} \omega_\nu(x+k) \leqq \frac{c(B)}{2 \cdot 4^n \cdot \Omega(B)} < \sum_{k=0}^{K} \prod_{\nu=1}^{n} \omega_\nu(x+k) \quad \text{pour } x \geqq X_0'. \tag{20}$$

Alors du lemme 2 et de (18) nous tirons l'inégalité

$$m\, F_{x,k}(B) \geqq 2^n \prod_{\nu=1}^{n} \omega_\nu(x+k) \left\{ \frac{\prod_{\nu=1}^{n} A_\nu(x+k, \alpha_\nu, \beta_\nu)}{\prod_{\nu=1}^{n} f_\nu(x+k)} - \frac{c(B)}{2} \prod_{\nu=1}^{n} (\beta_\nu - \alpha_\nu) \right\} (0 \leqq k < K).$$

D'après (5) on a $\displaystyle\sum_{x=1}^{j} \prod_{\nu=1}^{n} \frac{A_\nu(x, \alpha_\nu, \beta_\nu)}{f_\nu(x)} = j\, H(j, B) \qquad (j \geqq 1)$

et donc en vertu de (20)

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{K-1} m\, F_{x,k}(B) \geqq 2^n \sum_{k=0}^{K-1} \prod_{\nu=1}^{n} \omega_\nu(x+k) \{(x+k) H(x+k, B) - (x+k-1) H(x+k-1, B)\} \\ &- \frac{(c(B))^2}{4 \cdot 2^n \Omega(B)} \prod_{\nu=1}^{n} (\beta_\nu - \alpha_\nu) = 2^n \sum_{k=0}^{K-1} (x+k) H(x+k, B) \left\{ \prod_{\nu=1}^{n} \omega_\nu(x+k) - \prod_{\nu=1}^{n} \omega_\nu(x+k+1) \right\} \\ &+ 2^n \{(x+K-1) H(x+K-1) \prod_{\nu=1}^{n} \omega_\nu(x+K) - (x-1) H(x-1, B) \prod_{\nu=1}^{n} \omega_\nu(x)\} \\ &\qquad - \frac{(c(B))^2}{4 \cdot 2^n \Omega(B)} \prod_{\nu=1}^{n} (\beta_\nu - \alpha_\nu). \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Remarquons maintenant que d'après (6) et (5)

$$H(x+k, B) \geqq c(B) \prod_{\nu=1}^{n} (\beta_\nu - \alpha_\nu), \text{ si } x \geqq N_0, \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{22}$$

$$0 \leqq H(x, B) \leqq 1 \qquad (x \geqq 1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{23}$$

D'après (8) nous tirons de (23)

$$(x+K-1) H(x+K-1) \prod_{\nu=1}^{n} \omega_\nu(x+K) - (x-1) H(x-1, B) \prod_{\nu=1}^{n} \omega_\nu(x) \to 0, \text{ si } x \to \infty.$$

Alors il découle de (21) et (22) pour $x \geqq X_0''$ $(X_0'' \geqq Max(X_0', N_0))$

$$\sum_{k=0}^{K-1} m\, F_{x,k}(B) \geqq 2^n c(B) \prod_{\nu=1}^{n} (\beta_\nu - \alpha_\nu) \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ \prod_{\nu=1}^{n} \omega_\nu(x+k) - \prod_{\nu=1}^{n} \omega_\nu(x+k+1) \right\} (x+k)$$
$$- \frac{(c(B))^2}{3 \cdot 2^n \cdot \Omega(B)} \prod_{\nu=1}^{n} (\beta_\nu - \alpha_\nu) = 2^n c(B) \prod_{\nu=1}^{n} (\beta_\nu - \alpha_\nu) \sum_{k=0}^{K-1} \prod_{\nu=1}^{n} \omega_\nu(x+k) - \frac{(c(B))^2}{3 \cdot 2^n \cdot \Omega(B)} \prod_{\nu=1}^{n} (\beta_\nu - \alpha_\nu) +$$
$$+ 2^n c(B) \prod_{\nu=1}^{n} (\beta_\nu - \alpha_\nu) \{(x-1) \prod_{\nu=1}^{n} \omega_\nu(x) - (x+K) \prod_{\nu=1}^{n} \omega_\nu(x+K)\}.$$

C'est à dire qu'on a pour $x \geqq X_0$ $(X_0 \geqq X_0'')$

$$\sum_{k=0}^{K-1} m\, F_{x,k}(B) \geqq \frac{2^n (c(B))^2 \prod_{\nu=1}^{n} (\beta_\nu - \alpha_\nu)}{2 \cdot 4^n \cdot \Omega(B)} - \frac{(c(B))^2}{3 \cdot 2^n \cdot \Omega(B)} \prod_{\nu=1}^{n} (\beta_\nu - \alpha_\nu)$$
$$- \frac{(c(B))^2}{12 \cdot 2^n \cdot \Omega(B)} \prod_{\nu=1}^{n} (\beta_\nu - \alpha_\nu) = \frac{(c(B))^2}{12 \cdot 2^n \cdot \Omega(B)} \prod_{\nu=1}^{n} (\beta_\nu - \alpha_\nu)$$

à cause de (20) et de (8). Ça prouve le lemme.

§ 3. *Démonstration des Théorèmes 3 et 4.*

Prenons un point quelconque $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ du cube

$$0 < u_\nu < 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{24}$$

et un parallélépipède arbitraire $\quad \alpha_\nu < u_\nu < \beta_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \quad . \quad . \quad . \quad (25)$

de centre A et appartenant totalement au cube (24).

Remarquons d'abord que sous les conditions des théorèmes 3 et 4 on peut poser dans (18) en tout cas

$$\Omega(B) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{\beta_\nu - \alpha_\nu}\right),$$

car $d_\nu(x+i, x+k)$ désigne un nombre naturel. Sous les conditions du théorème 4 on peut même poser

$$\Omega(B) = 2^n,$$

á cause de la condition $d_\nu(z, x) \to \infty$ pour $z \to \infty$.

Considérons pour $x = 1, 2, \ldots$ les ensembles $E_x(B)$ définis dans le lemme 2 et posons

$$E_x^*(B) = E_x(B) \dot{+} E_{x+1}(B) \dot{+} \ldots \qquad (x \geqq 1). \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{26}$$

Les conditions du lemme 3 étant toutes remplies, (19) entraîne que la mesure de $E_x^*(B)$ est au moins égale à

$$\frac{(c(B))^2}{12 \cdot 2^n \cdot \Omega(B)} \prod_{\nu=1}^{n} (\beta_\nu - \alpha_\nu); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{27}$$

comme $E_x^*(B) \supset E_{x+1}^*(B)$ la mesure du produit $E^*(B)$ des ensembles $E_x^*(B)$ est donc aussi au moins égal à (27). À cause de la définition de $E_x(B)$ nous concluons que la densité de $E^*(B)$ par rapport au parallélépipède (25) est supérieure à

$$\frac{(c(B))^2}{24 \cdot 2^n \cdot \Omega(B)}.$$

Remarquons maintenant que l'ensemble G des points $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ de (24) admettant une infinité de solutions entières $x \geqq 1, y_1, y_2, \ldots, y_n$ de (4) contient l'ensemble $E^*(B)$. Ainsi le théorème 3 est démontré.

Démontrons maintenant le théorème 4. D'abord je fais remarquer que sous les conditions du théorème 4 le nombre c ne dépend pas du système B. En outre nous posons $\Omega(B) = 2^n$. Alors la densité de l'ensemble G par rapport au parallélépipède (25) est supérieure à

$$\frac{c^2}{24 \cdot 4^n}$$

c'est à dire que la densité inférieure de G en A est supérieure à $\frac{c^2}{24 \cdot 4^n}$, le parallélépipède (25) étant arbitraire. Comme A est un point arbitraire du cube (24), ça prouve le théorème d'après une proposition bien connue de la théorie de la mesure.