

on trouve

$$x_{n+1}^2 \prod_{v=1}^n (a_v x_{n+1} - x_v)^2 < \left( \frac{\gamma_{n+1}}{n+1} \right)^{n+1}$$

ou

$$\prod_{v=1}^n \left| a_v - \frac{x_v}{x_{n+1}} \right| < \left( \frac{\gamma_{n+1}}{n+1} \right)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{|x_{n+1}|^{n+1}}$$

avec (23). Pour  $n$  très grand ce résultat est meilleur que (28).

§ 4. Démonstration du théorème 2.

Nous appliquons le théorème 1 avec

$$L_v = x_v (v = 1, \dots, n); L_{n+1} = L; r = n; \varrho_{n,n}^* = \varrho_{n,n} = \varrho_n.$$

Alors  $|\Delta| = 1$ . Il existe donc au moins un système  $(x_1, \dots, x_{n+1})$  avec  $\max(|x_1|, \dots, |x_{n+1}|) \geq 1$ , (17), (18), (19) et (20). Nous remarquons qu'il est impossible que  $x_v = 0$  pour toute valeur de  $v = 1, \dots, n$ . Car dans ce cas nous aurions

$$|L| = |x_{n+1}| \geq 1, \text{ ce qui est en contradiction avec (18), où } |L| \leq \frac{2}{t} < 1.$$

Alors on a  $X = \max(|x_1|, \dots, |x_n|) \geq 1$ , et le théorème est démontré.

§ 5. Démonstration du théorème 3.

Nous appliquons maintenant le théorème 1 avec

$$L_1 = x_{n+1}; L_v = x_{n+1} a_{v-1} - x_{v-1} (v = 2, \dots, n+1); r = 1; \varrho_{n,1}^* = \varrho_{n,n} = \varrho_n.$$

Alors il est encore  $|\Delta| = 1$ . Il existe donc au moins un système  $(x_1, \dots, x_{n+1})$  avec  $\max(|x_1|, \dots, |x_{n+1}|) \geq 1$ ,

$$|x_{n+1}| \leq \frac{2t^n}{\varrho_n}, \dots \dots \dots (30)$$

$$\sum_{v=1}^n |x_{n+1} a_v - x_v| \leq \frac{2}{t}, \dots \dots \dots (31)$$

$$\sum_{v=1}^n |x_{n+1} a_v - x_v| \leq \frac{1}{\frac{1}{\varrho_n^n} |x_{n+1}|^n}, \dots \dots \dots (32)$$

$$\prod_{v=1}^n |x_{n+1} a_v - x_v| \leq \frac{1}{\varrho_n n^n |x_{n+1}|}, \dots \dots \dots (33)$$

Il est impossible que  $x_{n+1} = 0$ . Dans ce cas nous aurions au moins une valeur de  $v = 1, \dots, n$ , où  $x_v \neq 0$ , donc  $\sum_{v=1}^n |x_v| \geq 1$ , ce qui est en contradiction avec (31) où  $\sum_{v=1}^n |x_v| \leq \frac{2}{t} < 1$ . On a donc  $|x_{n+1}| \geq 1$ , et alors d'après (30), (31), (32) et (33) il suit l'assertion de ce théorème.

Mathematics. — Contribution à la théorie métrique des approximations diophantiques non-linéaires. (Deuxième communication.) Par J. F. KOKSMA. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of February 28, 1942.)

§ 1. Introduction<sup>1)</sup>.

I. Soit  $f(1), f(2), \dots$  une suite arbitraire de nombres naturels croissants. Par  $d(z, x)$  j'indique le plus grand diviseur commun  $(f(z), f(x))$  des nombres  $f(z)$  et  $f(x)$  ( $z, x = 1, 2, \dots$ ). Alors pour toute suite de cette espèce et toute paire de nombres  $a, \beta$  satisfaisant aux inégalités  $0 \leq a < \beta \leq 1$ , je définis la fonction arithmétique  $A(x, a, \beta)$  ( $x = 1, 2, \dots$ ) comme le nombre des nombres naturels de l'intervalle  $af(x) < u < \beta f(x)$  qui pour aucune valeur de l'indice  $z$  ( $1 \leq z < x$ ) ne sont divisibles par le nombre  $\frac{f(x)}{d(z, x)}$ .

Soit  $S$  un système de  $n \geq 1$  suites de nombres naturels croissants

$$f_v(1), f_v(2), \dots (v = 1, 2, \dots, n), \dots \dots \dots (1)$$

$B$  un système de  $n$  paires de nombres  $a_v, \beta_v$  avec  $0 \leq a_v < \beta_v \leq 1$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ) et soit posé pour tout nombre naturel  $N$

$$H(N, B) = H(N, B, S) = \frac{1}{N} \sum_{x=1}^N \sum_{v=1}^n \frac{A_v(x, a_v, \beta_v)}{f_v(x)}, \dots \dots (2)$$

où  $A_v(x, a_v, \beta_v)$  désigne la fonction  $A(x, a_v, \beta_v)$  correspondant à la suite  $f_v(1), f_v(2), \dots$

**Définition 3.** Nous dirons que le système  $S$  possède la propriété  $\mathcal{R}$ , si au système spécial  $B_0$  des nombres  $a_v = 0, \beta_v = 1$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ) correspondent un nombre positif  $c$  et un indice  $N_0$ , indépendant de  $N$ , tels que

$$H(N, B_0, S) \geq c, \text{ si } N \geq N_0 \dots \dots \dots (3)$$

Nous dirons (comme dans la définition 2 de la première communication) que  $S$  possède la propriété  $\mathcal{Q}$  si à tout système  $B$  correspondent un nombre positif  $c = c(B)$  et un indice  $N_0$  indépendant de  $N$ , tels que

$$\frac{H(N, B, S)}{\prod_{v=1}^n (\beta_v - a_v)} \geq c(B), \text{ si } N \geq N_0 \dots \dots \dots (4)$$

Nous dirons que  $S$  possède la propriété  $\mathcal{Q}^*$ , s'il est possible de choisir le nombre  $c$  indépendant du système  $B$ .

Dans la première communication j'ai donné plusieurs exemples de systèmes  $S$  possédant la propriété  $\mathcal{Q}^*$ . Dans § 2 de la présente communication je démontre le

**Théorème 5.** Soient  $m_1, m_2, \dots, m_n$  un système de  $n \geq 1$  nombres naturels arbitraires. Alors le système  $S$  des  $n$  suites  $x^{m_v}$  ( $x = 1, 2, \dots, 1 \leq v \leq n$ ) possède la propriété  $\mathcal{Q}^*$ , et donc a fortiori la propriété  $\mathcal{R}$ .

II. Dans § 3 de la première communication, j'ai démontré le théorème 3. La conclusion

<sup>1)</sup> Première communication, Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 45, p. 176—183 (1942).

finale de cette démonstration (le lecteur peut s'en assurer d'un coup d'oeil) entraîne non seulement le théorème 3, mais aussi le théorème suivant dont la rédaction est moins élégante que celle du théorème 3, mais contient quelques détails, dont j'ai besoin ici.

**Théorème 6.** Soit  $n$  un nombre naturel et  $\omega_\nu(x)$  pour  $\nu = 1, 2, \dots, n$  une fonction positive non-croissante du nombre naturel  $x$ , telle que la série

$$\sum_{x=1}^{\infty} \prod_{\nu=1}^n \omega_\nu(x) \dots \dots \dots (5)$$

diverge et satisfaisant à

$$\omega_\nu(x) \leq \frac{1}{x} (\nu = 1, 2, \dots, n; x \geq 1); x \prod_{\nu=1}^n \omega_\nu(x) \rightarrow 0, \text{ si } x \rightarrow \infty.$$

Soient  $S$  un système de  $n$  suites croissantes de nombres naturels (1) et  $B$  un système de  $2n$  nombres  $\alpha_\nu, \beta_\nu$ , avec  $0 \leq \alpha_\nu < \beta_\nu \leq 1$ , tels que (4) est valable, où  $c(B)$  et  $N_0$  désignent des nombres positifs convenablement choisis et où  $H(N, B, S)$  est défini par (2). Alors la mesure au sens DE LEBESGUE de l'ensemble des points  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$  du parallélépipède  $\alpha_\nu < u_\nu < \beta_\nu (\nu = 1, 2, \dots, n)$  pour lesquels le système des inégalités

$$|\theta_\nu f_\nu(x) - y_\nu| < \omega_\nu(x) \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) \dots \dots \dots (6)$$

possède une infinité de solutions entières  $x \geq 1, y_1, y_2, \dots, y_n$  est au moins égale à

$$\frac{(c(B))^2}{24 \cdot 2^n \cdot \prod_{\nu=1}^n \left(1 + \frac{1}{\beta_\nu - \alpha_\nu}\right)} \prod_{\nu=1}^n (\beta_\nu - \alpha_\nu).$$

III. Dans la première communication j'ai étudié des systèmes  $S$  possédant la propriété  $Q^*$  sous la condition supplémentaire  $d_\nu(z, x) \rightarrow \infty$ , si  $x \rightarrow \infty (1 \leq \nu \leq n)$  (Théorème 4). Dans la présente communication je considère, sous une condition supplémentaire d'un autre caractère, des systèmes  $S$  possédant la propriété  $\mathcal{R}$ .

**Définition 4.** Soient  $C$  un nombre positif,  $q_1, q_2, \dots, q_n$  un système de  $n \geq 1$  nombres naturels et  $S$  un système de  $n$  suites de nombres naturels croissants (1). Nous dirons que  $S$  possède la propriété  $\mathcal{M}(q_1, q_2, \dots, q_n; C)$ , si pour tout nombre  $f_\nu(x)$  de la suite (1) le nombre  $q_\nu f_\nu(x)$  fait partie de cette suite aussi ( $1 \leq \nu \leq n$ ) et si en outre l'indice  $\bar{x} = \bar{x}(x; q_1, \dots, q_n; C)$  pour lequel  $q_\nu f_\nu(x) = f_\nu(\bar{x})$  est indépendant de  $\nu$  et satisfait à l'inégalité  $\bar{x} \leq Cx^2$ .

**Exemples.** 1. Il est clair que le système  $S$  du théorème 5 pour tout nombre naturel  $q$  possède la propriété  $\mathcal{M}(q^{m_1}, q^{m_2}, \dots, q^{m_n}; q)$ .

2. Si  $k_1, \dots, k_n$  désignent  $n$  nombres entiers  $\geq 2$ , le système des  $n$  suites  $k_\nu^x (x = 1, 2, \dots)$  possède la propriété  $\mathcal{M}(k_1, \dots, k_n; 2)$ .

IV. Dans le § 3 de cette communication je vais démontrer le théorème suivant qui forme une généralisation directe du théorème célèbre de M. A. KHINTCHINE, cité dans la première communication comme Théorème 1A, et contient celui là comme cas spécial.

Comme dans la première communication je ferai usage des belles idées développées par M. A. KHINTCHINE dans sa démonstration du théorème 1A<sup>3)</sup>.

2) Les nombres  $q_1, \dots, q_n, C$  soient indépendants de  $x$ .

3) A. KHINTCHINE, Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen. Math. Z. 24, 706—714 (1926).

**Théorème 7.** Soient  $n$  un nombre naturel et  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  un système de  $n$  nombres fixes, non négatifs, tels que  $\sigma_1 + \dots + \sigma_n = 1$ . Soit  $\omega_\nu(x)$  pour  $\nu = 1, 2, \dots, n$  une fonction positive du nombre naturel  $x$ , telle que  $x^{\sigma_\nu} \omega_\nu(x)$  tend vers zéro monotonement, si  $x \rightarrow \infty$  et satisfaisant à

$$\omega_\nu(x) \leq \frac{1}{x} \quad (0 \leq \nu \leq n; x \geq 1) \dots \dots \dots (7)$$

Soit  $S$  un système de  $n$  suites de nombres naturels croissants (1) possédant les propriétés  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{M}(q_1, \dots, q_n; C)$  ( $q_1, \dots, q_n$  désignant des nombres naturels  $\geq 2$  et  $C$  désignant un nombre  $> 1$ ). Alors pour presque tous les points  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$  de l'espace  $R_n$  le système des inégalités simultanées (7) admet une infinité de solutions entières  $x \geq 1, y_1, \dots, y_n$ .

§ 2. Démonstration du théorème 5.

I. Considérons la suite  $x^{m_\nu} (x = 1, 2, \dots)$ ,  $\nu$  désignant un indice arbitraire ( $1 \leq \nu \leq n$ ). Si  $\alpha_\nu, \beta_\nu$  désignent des nombres quelconques avec  $0 \leq \alpha_\nu < \beta_\nu \leq 1$ , il est clair que le nombre  $A_\nu(x, \alpha_\nu, \beta_\nu)$  est au moins égal au nombre des nombres naturels de l'intervalle  $\alpha_\nu f_\nu(x) < u < \beta_\nu f_\nu(x)$  qui sont premiers avec  $x$ , c'est à dire que  $A_\nu(x, \alpha_\nu, \beta_\nu)$  est au moins

$$\begin{aligned} & (\beta_\nu - \alpha_\nu) x^{m_\nu} - \left( (\beta_\nu - \alpha_\nu) \frac{x^{m_\nu}}{p_1} + \dots + (\beta_\nu - \alpha_\nu) \frac{x^{m_\nu}}{p_s} \right) \\ & + \left( (\beta_\nu - \alpha_\nu) \frac{x^{m_\nu}}{p_1 p_2} + \dots + (\beta_\nu - \alpha_\nu) \frac{x^{m_\nu}}{p_{s-1} p_s} \right) - \\ & \dots \dots \dots \\ & \pm (\beta_\nu - \alpha_\nu) \frac{x^{m_\nu}}{p_1 p_2 \dots p_s} - 2^{s+1} = \\ & = (\beta_\nu - \alpha_\nu) x^{m_\nu} \prod_{\sigma=1}^s \left( 1 - \frac{1}{p_\sigma} \right) - 2^{s+1} = (\beta_\nu - \alpha_\nu) \varphi(x^{m_\nu}) - 2^{s+1}, \end{aligned}$$

si  $p_1, p_2, \dots, p_s$  désignent les facteurs premiers différents de  $x$  et  $\varphi(x)$  désigne la fonction d'EULER. Comme

$$\varphi(x^{m_\nu}) = x^{m_\nu-1} \varphi(x),$$

nous aurons donc

$$\frac{A_\nu(x, \alpha_\nu, \beta_\nu)}{x^{m_\nu}} \geq (\beta_\nu - \alpha_\nu) \frac{\varphi(x)}{x} - \frac{2^{s+1}}{x^{m_\nu}} \dots \dots \dots (8)$$

II. Démontrons maintenant la relation bien connue de MERTENS

$$\sum_{x=1}^N \varphi(x) = \frac{3}{\pi^2} N^2 + O(N \log N) \dots \dots \dots (9)$$

Si  $\mu(x)$  désigne la fonction de MOEBIUS, on a

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^N \varphi(x) &= \sum_{x=1}^N x \sum_{d|x} \frac{\mu(d)}{d} = \sum_{d=1}^N \frac{\mu(d)}{d} \sum_{z=1}^{\lfloor \frac{N}{d} \rfloor} d \cdot z = \sum_{d=1}^N \mu(d) \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{N}{d} \right] \left( \left[ \frac{N}{d} \right] + 1 \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} N^2 \sum_{d=1}^N \frac{\mu(d)}{d^2} + \frac{1}{2} N \sum_{d=1}^N \frac{\mu(d)}{d} + \sum_{d=1}^N O\left(\frac{N}{d}\right) = \frac{1}{2} N^2 \cdot \frac{1}{\zeta(2)} + O(N \log N); \text{ c.q.f.d.} \end{aligned}$$

Soit  $c_1$  un nombre positif fixe  $< \frac{3}{\pi^2}$ . Alors d'après (9) à  $c_1$  un indice  $N_1$  correspond, tel que

$$\sum_{x=1}^N \varphi(x) > c_1 N^2, \text{ si } N \geq N_1. \dots \dots \dots (10)$$

Soit posé maintenant  $c_2 + c_3 = c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$  désignant des nombres positifs fixes. Alors j'assers que le nombre des  $x$  ( $1 \leq x \leq N$ ,  $N$  étant  $\geq N_1$ ) pour lesquels

$$\varphi(x) \geq c_2 x, \dots \dots \dots (11)$$

est au moins égal à

$$c_3 N.$$

En effet,  $\varphi(x)$  étant  $\leq N$ , on aurait dans le cas contraire

$$\sum_{x=1}^N \varphi(x) < c_3 N^2 + \sum_{x=1}^N c_2 x \leq c_3 N^2 + \frac{1}{2} c_2 (N^2 + N) \leq c_1 N^2$$

ce qui nous amène à une contradiction avec (10).

III. Supposons que l'indice  $x$  satisfait à (11). Alors nous tirons de (8)

$$\frac{A_\nu(x, a_\nu, \beta_\nu)}{x^{m_\nu}} \geq c_2 (\beta_\nu - a_\nu) - \frac{2^{s+1}}{x^{m_\nu}} \text{ et donc } > \frac{c_2}{2} (\beta_\nu - a_\nu), \text{ si } x \geq x_0^{(\nu)},$$

où  $x_0^{(\nu)}$  désigne un nombre positif convenablement choisi, ne dépendant que de  $a_\nu$  et  $\beta_\nu$ , car on a

$$s! \leq p_1 p_2 \dots p_s \leq x \text{ et donc } \frac{2^{s+1}}{x^{m_\nu}} \rightarrow 0, \text{ quand } x \rightarrow \infty.$$

Nous concluons qu'à tout système  $B$  de  $2n$  nombres  $a_\nu, \beta_\nu$  ( $0 \leq a_\nu < \beta_\nu \leq 1$ ;  $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) un indice  $x_0$ , ne dépendant que de  $B$  correspond, tel que pour tout  $x \geq x_0$  satisfaisant à (11):

$$\prod_{\nu=1}^n \frac{A_\nu(x, a_\nu, \beta_\nu)}{x^{m_\nu}} \geq \left(\frac{c_2}{2}\right)^n \prod_{\nu=1}^n (\beta_\nu - a_\nu). \dots \dots \dots (12)$$

D'après II parmi les nombres  $x = 1, 2, \dots, N$  ( $N \geq N_1$ ) il y a  $c_3 N$  au moins satisfaisant à (11). Si  $N_0$  est convenablement choisi  $\geq x_0$  et  $\geq N_1$  (ne dépendant que de  $B$ ) parmi les nombres  $x = 1, 2, \dots, N$  ( $N \geq N_0$ ) il y a donc  $\frac{c_3}{2} N$  au moins qui satisfont à (11) et en même temps sont  $\geq x_0$ . Pour tous ces  $x$  l'inégalité (12) est valable, c'est à dire qu'on a

$$\sum_{x=1}^N \prod_{\nu=1}^n \frac{A_\nu(x, a_\nu, \beta_\nu)}{x^{m_\nu}} \geq \frac{c_3 c_2^n}{2^{n+1}} \prod_{\nu=1}^n (\beta_\nu - a_\nu).$$

Or, ça veut dire que le système  $S$  des  $n$  suites  $x^{m_\nu}$  ( $x = 1, 2, \dots$ ) possède la propriété  $Q^*$ . C.q.f.d.

§ 3. Démonstration du théorème 7.

I. J'appliquerai le lemme suivant de M. KHINTCHINE<sup>4)</sup>.

**Lemme 4.** Si  $\psi(t)$  désigne une fonction positive et continue de  $t \geq 1$ , telle que

<sup>4)</sup> Cf. 3).

$t\psi(t)$  tend vers zéro monotonement, si  $t \rightarrow \infty$  et telle que  $\int_1^\infty \psi(t) dt$  diverge, une fonction continue  $\chi(t)$  existe, telle que

$$\chi(t) \rightarrow \infty \text{ monotonement, quand } t \rightarrow \infty, \dots \dots \dots (13)$$

$$\text{l'intégrale } \int_1^\infty \psi(t \chi(t)) dt \text{ diverge. } \dots \dots \dots (14)$$

II. Définissons la fonction continue  $\psi_\nu(t)$  par

$$\psi_\nu(x) = \omega_\nu(x) \quad (x \geq 1, \text{ entier}) \quad t^{\sigma_\nu} \psi_\nu(t) = \text{linéaire} \quad (x \leq t < x+1) \quad (15)$$

et posons

$$\psi(t) = \prod_{\nu=1}^n \psi_\nu(t).$$

Alors le lemme 4 nous apprend l'existence d'une fonction positive et continue  $\chi(t)$  possédant les propriétés (13) et (14). D'après une proposition bien connue, on peut choisir une fonction positive, continue  $\eta(t) \leq 1$ , tendant vers zéro monotonement, si  $t \rightarrow \infty$ , telle que l'intégrale

$$\int_1^\infty \eta(t) \psi(t \chi(t)) dt$$

diverge encore. En remarquant que la fonction  $(t\chi(t))^{\sigma_\nu} \psi_\nu(t\chi(t))$  tend vers zéro monotonement, si  $t \rightarrow \infty$  et en posant

$$\Omega_\nu(t) = \sqrt[n]{\eta(t) \psi_\nu(t \chi(t))} \quad (1 \leq \nu \leq n), \dots \dots \dots (16)$$

je conclue que les fonctions  $t^{\sigma_\nu} \Omega_\nu(t)$  et  $\Omega_\nu(t)$  tendent vers zéro monotonement, quand  $t \rightarrow \infty$  et que l'intégrale

$$\int_1^\infty \prod_{\nu=1}^n \Omega_\nu(t) dt$$

et donc aussi la série

$$\sum_{x=1}^\infty \prod_{\nu=1}^n \Omega_\nu(x)$$

divergent.

Parce qu'on a en outre  $\Omega_\nu(t) \leq \frac{1}{2}$ , il est clair que les conditions du théorème 6 sont remplies, si l'on y pose  $a_\nu = 0, \beta_\nu = 1$  (c'est à dire  $B = B_0$ ) et  $\Omega_\nu(x)$  au lieu de  $\omega_\nu(x)$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) et si  $S$  y désigne le système du théorème 7. Nous en concluons que la mesure  $mG$  de l'ensemble  $G$  des points  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$  du cube  $0 < u_\nu < 1$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) pour lesquels le système

$$|\theta_\nu f_\nu(x) - y_\nu| < \Omega_\nu(x) \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) \dots \dots \dots (17)$$

admet une infinité de solutions entières  $x \geq 1, y_1, \dots, y_n$  est positive.

III. Soit  $r$  un nombre naturel et partageons le cube  $0 \leq u_\nu \leq 1$  en  $q_1^r q_2^r \dots q_n^r$  parallélépipèdes  $P$ , congruents entre eux, dont les cotés (ayant les longueurs  $q_1^{-r}, \dots, q_n^{-r}$ ) sont parallèles à ceux du cube. Soit  $\varepsilon$  un nombre positif et  $< 1$ . Alors  $r = r(\varepsilon)$  étant choisi suffisamment grand, dans au moins un des parallélépipèdes  $P$  (désignons le par  $P_0$ ),

la densité de  $G$  est au moins égal à  $1 - \varepsilon$ . À chacun des  $P$  une translation congruente

$$\theta_v = \theta'_v + \frac{h_v}{q_v^r} \quad (h_v \text{ entier; } v = 1, 2, \dots, n) \dots (18)$$

correspond, transférant les points  $(\theta'_1, \dots, \theta'_n)$  de  $P_0$  en des points  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$  de  $P$ . Soit  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$  un point de  $P_0$  appartenant à  $G$  et soit  $x \geq 1, y_1, \dots, y_n$  une solution entière quelconque de (17). Alors pour tout point  $(\theta'_1, \dots, \theta'_n)$  avec (18) on a

$$|\theta'_v q_v^r f_v(x) - q_v^r y_v + h_v f_v(x)| = |\theta_v f_v(x) - y_v| q_v^r < q_v^r \Omega_v(x) \quad (v = 1, 2, \dots, n) \quad (19)$$

Le système  $S$  possédant la propriété  $\mathcal{M}(q_1, \dots, q_n; C)$  nous pouvons poser

$$q_v^r f_v(x) = f_v(X), \quad \text{où } X \equiv C^r x.$$

En posant en outre  $Y_v = q_v^r y_v - h_v f_v(x)$  nous tirons de (19)

$$|\theta'_v f_v(X) - Y_v| < q_v^r \Omega_v\left(\frac{X}{C^r}\right)$$

et donc, si  $x$  est suffisamment grand

$$\left\langle \psi_v \left( \frac{X}{C^r} \right) \chi \left( \frac{X}{C^r} \right) \right\rangle < \psi_v(X) = \omega_v(X) \quad (v = 1, 2, \dots, n),$$

à cause des relations (16),  $\eta(x) \rightarrow 0, \chi(x) \rightarrow \infty$  (quand  $x \rightarrow \infty$  et (15).

Comme (17) possède une infinité de solutions entières nous concluons que le système

$$|\theta'_v f_v(X) - Y_v| < \omega_v(X) \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

admet une infinité de solutions entières de même. Ça veut dire que le point  $(\theta'_1, \dots, \theta'_n)$  appartient à  $G$ . Or, ceci entraîne que la densité de  $G$  par rapport à chacun des parallélépipèdes  $P$  est  $\geq 1 - \varepsilon$ . Le nombre  $\varepsilon$  étant arbitraire et  $G$  ne dépendant pas de  $\varepsilon$ , nous en concluons que la mesure  $mG$  est égale à 1. C.q.f.d.

**Hydrodynamics.** — *Laminar flow in radial direction along a plane surface.* By A. VAN WIJNGAARDEN. (Mededeeling N<sup>o</sup>. 43 uit het Laboratorium voor Aero- en Hydrodynamica der Technische Hoogeschool te Delft.) (Communicated by Prof. J. M. BURGERS.)

(Communicated at the meeting of February 28, 1942.)

1. The theory of laminar boundary layer flow mostly has been used for those types of flow in which the velocity of the fluid at great distances from the wall is approximately parallel to a single given direction. A solution of this kind for the case of the flow in radial direction along an infinite plane surface has been given by HOMANN<sup>1</sup>). In this solution at great distances from the plane the velocity is directed towards the plane; however, at the same time it possesses a radial component which increases proportionally to the distance from the central axis. The equation of continuity then requires that the component normal to the plane shall increase indefinitely with the distance from the plane; it must be assumed, consequently, that the field is limited by another plane at some great distance. In this case the amount of fluid transported in the radial direction through the surface of a cylinder having its axis along the axis of the field increases proportionally to the square of the radius of the cylinder, in agreement with the fact that the amount of fluid supplied by the main stream likewise is proportional to the square of the radius.

In the case where a limited amount of fluid is supplied in the axis of the field, the velocity component in the radial direction must decrease inversely proportionally to the radius. We meet such kinds of flow for instance in the valves of piston pumps and in the air supported bearings of modern ultra-centrifuges. Actually the problem here is greatly complicated by the presence of a second limiting plane boundary.

The investigation of the field with decreasing radial velocity along a single plane wall will be the subject of the present paper. In a final remark a more general view on the problem has been indicated.

2. We take the plane boundary as  $X, Y$ -plane and the central axis as  $Z$ -axis. Further we denote the distance from the axis by  $r$ , and the velocities in the  $r$ - and  $z$ -directions by  $u$  and  $w$  respectively. It is supposed that the motion is independent of the time and has no tangential component. Then the equations of motion and of continuity are:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{p}{s} \right) + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right] \\ u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{s} \right) + \nu \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right] \\ u &= \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dz}; \quad w = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Here  $p$  is the pressure,  $s$  the (constant) density and  $\nu$  the kinematic viscosity of the fluid. By introducing the dimensionless variables:

$$\varrho = \frac{r}{r_0}; \quad \zeta = \frac{z}{r_0 \sqrt{\varepsilon}}; \quad u^* = \frac{u}{u_0}; \quad w^* = \frac{w}{u_0 \sqrt{\varepsilon}}; \quad \left( \frac{p}{s} \right)^* = \left( \frac{p}{s} \right) / u_0^2; \quad \psi^* = \frac{\psi}{r_0 \sqrt{\varepsilon}},$$

<sup>1</sup>) F. HOMANN, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 16, 153—164 (1936).