in which the coefficients h, i, j, k are determined by

$$\left.\begin{aligned}
&h'^{0}_{n}=j'^{0}_{n}=+4\pi^2\lambda^2 n\, e^{-2\pi n\frac{\lambda}{\mu}},\quad h'^{1}_{n}+i'^{1}_{n}=j'^{1}_{n}+k'^{1}_{n}=+4\pi^3\lambda^3 n^2\, e^{-2\pi n\frac{\lambda}{\mu}},\\
&h'^{s}_{n}=-\tfrac{1}{2}(-1)^{\frac{s}{2},\frac{s-1}{2}}\frac{(2\pi\lambda)^s}{(s-1)\,!}n^{s-1}\left(\frac{4\pi^2\lambda^2 n^2}{s+1}+s-2-4\pi n\frac{\lambda}{\mu}\right)e^{-2\pi n\frac{\lambda}{\mu}},\\
&i'^{s}_{n}=+\tfrac{1}{2}(-1)^{\frac{s}{2},\frac{s-1}{2}}\frac{(2\pi\lambda)^s}{(s-1)\,!}n^{s-1}\left(\frac{4\pi^2\lambda^2 n^2(s+2)}{s\,(s+1)}+s-2-4\pi n\frac{\lambda}{\mu}\right)e^{-2\pi n\frac{\lambda}{\mu}},\\
&j'^{s}_{n}=-\tfrac{1}{2}(-1)^{\frac{s}{2},\frac{s-1}{2}}\frac{(2\pi\lambda)^s}{(s-1)\,!}n^{s-1}\left(\frac{4\pi^2\lambda^2 n^2}{s+1}+s-4\pi n\frac{\lambda}{\mu}\right)e^{-2\pi n\frac{\lambda}{\mu}},\\
&k'^{s}_{n}=+\tfrac{1}{2}(-1)^{\frac{s}{2},\frac{s-1}{2}}\frac{(2\pi\lambda)^s}{(s-1)\,!}n^{s-1}\left(\frac{4\pi^2\lambda^2 n^2(s+2)}{s\,(s+1)}+s-4\pi n\frac{\lambda}{\mu}\right)e^{-2\pi n\frac{\lambda}{\mu}}\ (s\geqq 2).
\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

The notation $(-1)^{\frac{s}{2},\frac{s-1}{2}}$ which occurs in the latter formulae must be understood in this sense, that even values of s require the factor $(-1)^{\frac{s}{2}}$, whereas *odd* values of s require the factor $(-1)^{\frac{s-1}{2}}$. As to the formulae (18) it should again be remembered that for $s=0$ the functions $\overline{U}_{\sigma 1}$ and $\overline{U}_{\tau 1}$ only occur combined as $\overline{U}_{\sigma 1}-\overline{U}_{\tau 1}$. Finally it is obvious that, on account of the symmetry of the field, all stresses occurring in points of the line $z=-c$ likewise can be derived from (18). If we have to deal with the functions $U_{\sigma, 2s}$, $U_{\tau, 2s}$ the stresses $\sigma_y\,\sigma_z$ remain unchanged, whereas τ_{yz} changes its sign; if on the contrary we have to deal with the functions $\overline{U}_{\sigma, 2s+1}$, $\overline{U}_{\tau, 2s+1}$ the stresses σ_y and σ_z change their sign and τ_{yz} remains unchanged.

Mathematics. — *Bemerkung über die analytische Fortsetzung in bewerteten Körpern.* Von J. DE GROOT. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of March 28, 1942.)

Die Hauptprobleme der Analyse der bewerteten Körper sind von F. LOONSTRA in seiner Dissertation „Analytische Untersuchungen über bewertete Körper" (Amsterdam 1941) untersucht worden. In Paragraph 12, Seite 34—39, untersucht er das spezielle Problem der analytischen Fortsetzung. Dieses Problem ist nur von Interesse für die nicht-archimedisch bewerteten Körper, da ein (nicht trivial) archimedisch bewerteter Körper bekanntlich isomorph ist zu einem mit gewöhnlichen Absolutbeträgen bewerteten Körper aus komplexen Zahlen. Beschränkt man das Problem also auf einem nicht-archimedisch bewerteten Körper (wobei man ohne der Allgemeinheit zu schaden und abgesehen von trivialen Fällen voraussetzen darf, dasz die Charakteristik des Körpers Null ist, und der Primkörper p-adisch bewertet ist), so stellt sich heraus — im Gegensatz zur reellen und komplexen Funktionentheorie — dasz die analytische Fortsetzung einer Potenzreihe unmöglich ist; das heiszt: versucht man eine vorgegebene Potenzreihe $f(x)$ in einem Punkte x_0 ihres Konvergenzgebietes zu entwickeln in eine Potenzreihe nach aufsteigenden Potenzen von $x-x_0$, so konvergiert die neue Potenzreihe in *genau* demselben Gebiete wie die alte Potenzreihe.

Wir bringen in dieser Note einen zweiten kürzeren Beweis dieser von LOONSTRA bewiesener Tatsache. Vorher aber einige Bemerkungen.

Man beweist in einfacher Weise (sehe LOONSTRA, o.c., S. 10), dasz eine Potenzreihe

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

definiert in einem nicht-archimedisch bewerteten Körper, dann und nur dann konvergiert, wenn

$$\lim_{n\to\infty}|a_n x^n|=0.$$

Die Bewertung von a wird dabei mit $|a|$ bezeichnet.

Hieraus leitet man sofort ab, dasz die zwei folgende prinzipiell verschiedene Fälle eintreten können: (1) konvergiert entweder für $|x|<R$, oder für $|x|\leq R$, wobei R eine passend gewählte reelle Zahl ist.

Nehmen wir in (1) die Bewertung jedes Gliedes

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\,|x|^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und setzen wir $|x|=z$

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\,z^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

so bekommt man eine Potenzreihe in z der gewöhnlichen reellen Funktionentheorie. Wir beweisen zuerst, dasz der Konvergenzradius

$$\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

dieser Reihe genau gleich R ist.

$f(x)$ konvergiert für x mit $|x| \leqq R_1 < R$, also gilt

$$|a_n R_1^n| < \varepsilon \text{ für } n > n_0(\varepsilon)$$

oder

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{R_1}$$

also

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \leqq \frac{1}{R_1}$$

Der Konvergenzradius von $g(z)$ ist also mindestens gleich R_1; das gilt aber für alle $R_1 < R$, woraus die Behauptung folgt. Wir können dieses Resultat auch so ausdrücken: $f(x)$ konvergiert jedenfalls absolut für $|x| < R$.

Man bekommt also zwei Möglichkeiten:

1⁰. *$f(x)$ konvergiert, und konvergiert absolut für $|x| < R$.*

2⁰. *$f(x)$ konvergiert für $|x| \leqq R$, und konvergiert absolut für $|x| < R$.*

In beiden Fällen ist

$$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Auf diese zweite Möglichkeit (welche wir in LOONSTRA's Arbeit nicht antreffen) hat mich Herr H. FREUDENTHAL aufmerksam gemacht. Ein (von FREUDENTHAL herrührendes) Beispiel für diesen Fall ist die folgende Reihe:

$$f(x) = p + px + \ldots + px^p + p^2 x^{p+1} + \ldots + p^2 x^{p^2+p} +$$
$$+ p^3 x^{p^2+p+1} + \ldots + p^3 x^{p^3+p^2+p} + \ldots$$

Man überzeugt sich leicht davon, dasz diese Reihe konvergiert für $|x| \leqq 1$, aber nur absolut konvergiert für $|x| < 1$.

Wir brauchen weiter die folgende Ungleichheit

$$\left|\frac{(n+k)!}{n!\,k!}\right| \leqq \frac{(n+k)!}{n!\,k!} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

n und k sind dabei natürliche Zahlen. Der Beweis dieser Ungleichheit ist leicht zu erbringen, um so mehr als wir sie nur brauchen für alle natürlichen Zahlen n von einer gewissen beliebigen Stelle n_0 an. Wir beweisen aber die schärfere Ungleichheit

$$\left|\frac{(n+k)!}{n!\,k!}\right| \leqq 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

dieselbe, welche LOONSTRA bei seinem Beweise benutzt. (5) ist eine unmittelbare Folge eines bekannten zahlentheoretischen Satzes (sehe z.B. E. LANDAU, Vorlesungen über Zahlentheorie, Band I, S. 13), welcher besagt, dasz $l!$ (l ist eine beliebige natürliche Zahl) genau

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{l}{p^m}\right]$$

Primfaktoren p enthält, wenn $[\xi]$ die gröszte ganze Zahl $\leqq \xi$ ist. Die linke Seite von (5) enthält also

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{n+k}{p^m}\right] - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^m}\right] - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{k}{p^m}\right]$$

Primfaktoren p. Wegen

$$\left[\frac{n+k}{p^i}\right] \geqq \left[\frac{n}{p^i}\right] + \left[\frac{k}{p^i}\right] \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

ist diese Anzahl $\geqq 0$, und das heiszt wegen der p-adischen Bewertung des Primkörpers, dasz (5) gilt.

Wir bringen jetzt den Beweis der Unmöglichkeit der analytischen Fortsetzung, zuerst aber für den Fall 1⁰.

Versuchen wir die Potenzreihe (1) analytisch fortzusetzen durch Entwickelung in einem Punkte x_0 aus dem Gebiete $|x| < R$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

so konvergiert diese Reihe für genau dieselben Werte von x wie die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right| |x - x_0|^n. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Wegen (4) gilt offenbar

$$\left|\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!\,k!} a_{n+k} x^k\right| \leqq \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{(n+k)!}{n!\,k!} a_{n+k} x^k\right| \leqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!\,k!} |a_{n+k}|\,|x|^k. \quad (8)$$

Setzt man in der letzten Reihe aus (8) $|x| = z$, so bekommt man genau die Potenzreihe von $\frac{g^{(n)}(z)}{n!}$, welche bekanntlich jedenfalls konvergiert für alle Werte $\|z\| < R$, wenn wir für die gewöhnliche Absolutbetragbewertung Doppelstriche benutzen. Die Reihen aus (8) konvergieren deshalb gewisz für $|x| < R$, während auszerdem

$$\left|\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right| \leqq \frac{g^{(n)}(z)}{n!} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

gilt für alle $z = |x|$.

Die Entwickelung von $g(z)$ im Punkte $z_0 = |x_0|$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

konvergiert jedenfalls für $\|z - z_0\| < R$. Betrachten wir jene Werte von x, welche der Gleichung $|x - x_0| = \|z - z_0\| < R$ befriedigen, so ist — für einander zugehörigen Werte von x und z — (10), wegen (9), eine Majorante von (7). (7) und (6) konvergieren also für alle Werte x mit $|x - x_0| < R$. In unserm Körper sind aber die Werte von x mit $|x| < R$ und die Werte von x mit $|x - x_0| < R$ genau dieselbe. Hieraus geht hervor, dasz die Reihe (6) mindestens dasselbe Konvergenzgebiet hat wie die Reihe (1). Das Umgekehrte beweist man in genau derselben Weise, womit die Unmöglichkeit der analytischen Fortsetzung im Falle 1⁰ dargetan ist.

Setzen wir jetzt den Fall 2⁰ voraus, und nehmen wir an, dasz analytische Fortsetzung möglich wäre; dann würde (6) jedenfalls konvergieren für $|x| < R_2$, wobei R_2 eine passend gewählte Zahl gröszer als R_1 bedeutet. Man beweist jetzt genau wie oben, dasz die Reihe (1) dann auch konvergieren würde für $|x| < R_2$ im Widerspruch mit dem gegebenen Divergenz dieser Reihe für $|x| > R_1$.