Mathematics. — *Die Begründung der Trigonometrie in der hyperbolischen Ebene.* (Erste Mitteilung.) Von J. C. H. GERRETSEN. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of March 28, 1942.)

Einleitung.

Von H. LIEBMANN [1]) ist der Versuch gemacht worden, die Trigonometrie in der hyperbolischen Ebene mittels der von D. HILBERT [2]) entwickelten Endenrechnung zu begründen. Wenn man die Forderung aufrecht erhalten will, dasz keine Stetigkeitsannahmen gemacht werden dürfen, musz dieser Versuch als miszlungen betrachtet werden. Denn an entscheidender Stelle werden Stetigkeitsaxiome benutzt und es wird dabei nicht hervorgehoben inwiefern sie vermieden werden können. Auszerdem sind die Betrachtungen LIEBMANNs wenig elegant, da für die Herleitung der Formeln der Längenmessung eine ziemlich verwickelte Hilfsfunktion eingeführt wird, deren geometrische Bedeutung nicht sofort einleuchtet.

Die Frage nach der Begründung der bekannten trigonometrischen Formeln ist besonders interessant im Lichte einer Aeuszerung von FR. SCHUR [3]):

„......Es scheint mir daher nicht ganz verständlich, welche Ableitung Herr Hilbert im Auge hat, wenn er am Schlusse seiner Abhandlung sagt: „Auch sind dann die bekannten Formeln der Bolyai-Lobatschewskijschen Geometrie ohne Schwierigkeit ableitbar". Denn alle mir sonst bekannten Formeln der nicht-Euklidischen Geometrie — und nur diese können doch gemeint sein — und auch ihre Ableitungen enthalten die Exponentialfunktion, können also bei Vermeidung eines Stetigkeitsaxioms nicht in Betracht kommen".

Ich möchte zeigen, dasz dieser Skeptizismus unberechtigt ist. Tatsächlich kann der ganze Formelapparat der hyperbolischen Trigonometrie aufgebaut werden, wobei nur die in der HILBERTschen Abhandlung aufgezählten Axiome benutzt werden. Die Axiome der ersten drei Gruppen werden wir als die *Axiome der absoluten ebenen Geometrie* bezeichnen, während das Axiom der vierten Gruppe das HILBERT*sche Parallelenaxiom* heiszen möge.

Ich setze im Folgenden die Bekanntschaft mit den wichtigsten Sätzen der elementaren hyperbolischen Geometrie voraus; man kann sie in der HILBERTschen Abhandlung nachlesen. Aber die Endenrechnung werde ich zum besseren Verständnis der sich darauf stützenden Betrachtungen aufs neue herleiten in einer Weise, welche einigermaszen von der von HILBERT gegebenen abweicht. Darauf werde ich die Bewegungen der hyperbolischen Ebene betrachten, womit die Grundlage für die Erklärung der hyperbolischen und trigonometrischen Funktionen geschaffen wird. In einfachster Weise werde ich weiter die berühmte LOBATSCHEWSKIJsche Formel hinsichtlich des Parallelwinkels herleiten.

Eigentlich wäre damit das Ziel erreicht, denn schon LOBATSCHEWSKIJ [4]) hat ein Verfahren angegeben, womit sämtliche Formeln des rechtwinkligen Dreiecks gefunden

[1]) H. LIEBMANN, Ueber die Begründung der hyperbolischen Geometrie, Math. Ann. **59**, 110—128 (1904).

[2]) D. HILBERT, Neue Begründung der Bolyai-Lobatschewskijschen Geometrie, Math. Ann. **57**, 137—150 (1903). Wieder abgedruckt in: Grundlagen der Geometrie, 7 Aufl. (Leipzig und Berlin 1930), Anhang III.

[3]) FR. SCHUR, Zur Bolyai-Lobatschewskijschen Geometrie, Math. Ann. **59**, 314—320 (1904).

[4]) N. I. LOBATSCHEWSKIJ, Zwei geometrische Abhandlungen. Uebersetzt und mit Anmerkungen versehen von F. ENGEL (Leipzig 1899), S. 20

werden können; dieses Verfahren ist in mehr oder wenig abgeänderter Form in der Literatur mehrmals benutzt worden [5]). Ich werde aber diese Formeln unmittelbar mit Benutzung der Endenrechnung herleiten.

Nebenbei kann noch eine interessante Frage beantwortet werden. Schon FR. SCHUR [6]) hat bemerkt, dasz das HILBERTsche Parallelenaxiom ein besonderes Axiom über das Schneiden eines Kreises mit einer Geraden, die einen Punkt innerhalb des Kreises enthält, entbehrlich macht. Dieser Satz hängt aufs engste mit der Parallelenkonstruktion zusammen. Man hat die Vermutung ausgesprochen [7]), dasz ein etwaiges Vorhandensein der Schnittpunkte zweier Kreise nicht ohne das Axiom der Stetigkeit oder das ihm gleichwertige Archimedische Axiom, zu dem auszerdem das HILBERTsche Vollständigkeitsaxiom hinzutreten musz, beweisbar ist. Ich werde aber zeigen, dasz diese Vermutung falsch ist, indem ich mit Hilfe der Trigonometrie einen ganz einfachen Beweis dieses Satzes gebe. Der erstgenannte Satz läszt sich auch sehr einfach trigonometrisch beweisen.

§ 1. Die Endenrechnung.

Wenn die Halbgeraden AA' und BB' nicht zu einer einzigen Geraden gehören, möge die erste zu der zweiten *parallel* genannt werden, wenn die Halbgeraden keinen Punkt gemeinsam haben und jede von A ausgehende innerhalb des Winkels $A'AB$ liegende Halbgerade die Halbgerade BB' trifft. Wenn die Halbgeraden AA' und BB' jedoch zu einer einzigen Geraden gehören, mögen sie untereinander parallel genannt werden, wenn die Punkte von einer der Halbgeraden sämtlich zu der anderen Halbgeraden gehören. Unter alleiniger Benutzung der Axiome der absoluten ebenen Geometrie kann man zeigen:

1. *Mit der Halbgeraden AA' ist jede Halbgerade, welche zu der Geraden AA' gehört und mit der ersten Halbgeraden parallel ist, parallel zu der Halbgeraden BB'* (Erhaltung des Parallelismus längs einer Geraden).

2. *Wenn die Halbgerade AA' zu der Halbgeraden BB' parallel ist, so ist auch diese zu jener parallel* (Gegenseitigkeit des Parallelismus).

3. *Wenn die Halbgeraden AA' und BB' zu der Halbgeraden CC' parallel sind, so sind AA' und BB' untereinander parallel* (Fortpflanzung des Parallelismus).

Von allen Halbgeraden, die zu einander parallel sind, sagt man, dasz sie dasselbe *Ende* bestimmen; durch nicht-parallele Halbgeraden werden verschiedene Enden bestimmt.

Wir werden sagen, dasz die Gerade g „durch" das Ende α „geht", oder dasz α „auf" g „liegt", oder dasz g das Ende α mit einem Punkt oder mit einem anderen Ende „verbindet", wenn eine Halbgerade zu g gehört, die das Ende α bestimmt. Ist A ein Punkt auf der Geraden g, dann werden wir diese Gerade mit $(A\,\alpha)$ bezeichnen. Offenbar liegen auf einer Geraden immer zwei Enden.

Das *Parallelenaxiom* von HILBERT besagt im wesentlichen folgendes:

4. *Jedes Ende kann mit einem Punkt durch eine und nur eine Gerade verbunden werden. Durch zwei Enden geht höchstens eine Gerade.*

Wenn man das Parallelenaxiom zu den Axiomen der absoluten Geometrie hinzunimmt, kann man beweisen:

5. *Durch irgend zwei Enden geht immer eine Gerade.*

[5]) H. LIEBMANN, Elementargeometrischer Beweis der Parallelenkonstruktion und neue Begründung der trigonometrischen Formeln der hyperbolischen Geometrie, Math. Ann. **61**, 185—199 (1905).

R. BONOLA, Sulla teoria delle parallele e sulle geometrie non-euclidee, Questioni riguardanti le matematiche elementari, I_2, 3a Ed. (Bologna 1925), § 36.

[6]) a.a.O. S. 319.

[7]) M. SIMON, K. FLADT, Nichteuklidische Geometrie (Leipzig und Berlin 1925), S. 54.

Die durch die Enden α und β gehende Gerade wird mit (α, β) bezeichnet.

Aus vorigem Satz in Verbindung mit dem Parallelenaxiom geht leicht hervor:

6. *Wenn irgend eine Gerade g und ein Ende α, das nicht auf der Geraden liegt, vorgelegt sind, dann gibt es eine und nur eine Gerade durch α, die auf der Geraden g senkrecht steht.*

Denn die Gerade, welche α mit dem Spiegelbild α' von α inbezug auf die Gerade g verbindet, steht auf g senkrecht. Es gibt durch α kein zweites Lot auf g, denn dieses müszte auch durch α' gehen.

Wir werden sehr oft mit Bewegungen zu tun haben. Unter einer *Bewegung* werde eine Transformation der Ebene in sich verstanden, wobei irgend einem Dreieck ein damit kongruentes Dreieck zugeordnet wird. Wenn $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ zwei Bewegungen sind, so ist die Transformation, welche entsteht, wenn man zuerst $\mathfrak{B}_1$ und dann $\mathfrak{B}_2$ ausübt, ebenfalls eine Bewegung. Sie heiszt das *Produkt* der Bewegungen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ und wird mit $\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_1$ bezeichnet; dabei hat man auf die Reihenfolge der Faktoren zu achten. Wegen $(\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{B}_2)\,\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_3\,(\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_1)$, sind Klammern bei der Produktbildung von mehr als zwei Faktoren überflüssig.

Bei einer *Spiegelung* an einer Geraden wird irgend einem Punkt P der mit ihm inbezug auf die Gerade symmetrisch gelegene Punkt P' zugeordnet. Dabei bleiben die Punkte der Geraden ungeändert. Eine Spiegelung ist eine Bewegung, wie aus den Kongruenzsätzen leicht hervorgeht. Auszerdem erkennen wir:

7. *Eine Spiegelung ist eine involutorische Transformation*; d.h. das Produkt zweier Spiegelungen an der nämlichen Geraden ist eine Transformation, welche jedem Punkt sich selbst zuordnet.

Man sieht ohne Mühe ein, dasz durch eine Bewegung eine umkehrbar eindeutige Zuordnung der Enden untereinander hervorgerufen wird.

Den weiteren Betrachtungen legen wir zunächst folgenden Satz zugrunde:

8. *Wenn a, b und c drei Geraden sind, welche durch das nämliche Ende ω gehen und die Spiegelungen an diesen Geraden bezw. mit $\mathfrak{S}_a$, $\mathfrak{S}_b$ und $\mathfrak{S}_c$ bezeichnet werden, so gibt es stets eine eindeutig bestimmte Gerade d durch dasselbe Ende ω, so dasz das Produkt der Spiegelungen an den Geraden a, b und c der Spiegelung $\mathfrak{S}_d$ an der geraden d gleichkommt.*

In einer Formel ausgedrückt:

$$\mathfrak{S}_c\,\mathfrak{S}_b\,\mathfrak{S}_a = \mathfrak{S}_d. \qquad (1,1)$$

Den Beweis lese man bei HILBERT nach.

Wir fügen noch hinzu:

9. *Wenn die Geraden a, b und c den im vorigen Satz genannten Voraussetzungen genügen, dann kommt das Produkt der Spiegelungen an den Geraden a, b und c dem Produkt der Spiegelungen an den Geraden c, b und a gleich.*

Also:

$$\mathfrak{S}_c\,\mathfrak{S}_b\,\mathfrak{S}_a = \mathfrak{S}_a\,\mathfrak{S}_b\,\mathfrak{S}_c. \qquad (1,2)$$

Die Richtigkeit dieser Behauptung erhellt sofort aus der Tatsache, dasz eine Spiegelung eine involutorische Transformation ist.

Für eine spätere Anwendung erwähnen wir folgenden, übrigens von HILBERT nicht genannten Satz:

10. *Wenn a, b und c drei Geraden sind, welche auf der nämlichen Geraden g senkrecht stehen und die Spiegelungen an jenen Geraden bezw. mit $\mathfrak{P}_a$, $\mathfrak{P}_b$ und $\mathfrak{P}_c$ bezeichnet werden, so gibt es stets eine eindeutig bestimmte Gerade d, senkrecht auf derselben Geraden g, so dasz das Produkt der Spiegelungen an den Geraden a, b und c der Spiegelung $\mathfrak{P}_d$ an der Geraden d gleichkommt.*

In der Formel:

$$\mathfrak{P}_c\,\mathfrak{P}_b\,\mathfrak{P}_a = \mathfrak{P}_d. \qquad (1,3)$$

Der Beweis dieses Satzes sieht dem Beweis des Satzes 8 ganz ähnlich.

Dieser Satz kann wieder ergänzt werden mit:

11. *Wenn die Geraden a, b und c den im vorigen Satz genannten Voraussetzungen genügen, dann kommt das Produkt der Spiegelungen an den Geraden a, b und c dem Produkt der Spiegelungen an den Geraden c, b und a gleich.*

Also:

$$\mathfrak{P}_c\,\mathfrak{P}_b\,\mathfrak{P}_a = \mathfrak{P}_a\,\mathfrak{P}_b\,\mathfrak{P}_c. \qquad (1,4)$$

Wir wollen nun Verknüpfungen der Enden erklären und die Rechnungsregeln herleiten.

a. D i e A d d i t i o n d e r E n d e n. Es werde eine bestimmte Gerade angenommen und deren Enden mit 0 und ∞ bezeichnet. Die Menge der von ∞ verschiedenen Enden werde $\mathfrak{h}$ genannt. Die Spiegelung an der Geraden (ξ, ∞), wobei ξ irgend ein Element von $\mathfrak{h}$ ist, läszt die Enden ξ und ∞ ungeändert; wir werden diese Spiegelung mit $\mathfrak{S}_\xi$ bezeichnen.

Es seien α und β irgend zwei Elemente von $\mathfrak{h}$. Auf Grund des Satzes 8 gibt es eine eindeutig bestimmte Gerade (σ, ∞) derart, dasz für die Spiegelung $\mathfrak{S}_\sigma$ an dieser Geraden die Beziehung

$$\mathfrak{S}_\sigma = \mathfrak{S}_\beta\,\mathfrak{S}_0\,\mathfrak{S}_\alpha. \qquad (1,5)$$

erfüllt ist. Das Element σ heiszt die *Summe* $\alpha + \beta$ der Enden α und β.

12. *Es gilt das kommutative Gesetz:*

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha. \qquad (1,6)$$

Denn wegen der Formeln (1,5) und (1,2) haben wir:

$$\mathfrak{S}_{\alpha+\beta} = \mathfrak{S}_\beta\,\mathfrak{S}_0\,\mathfrak{S}_\alpha = \mathfrak{S}_\alpha\,\mathfrak{S}_0\,\mathfrak{S}_\beta = \mathfrak{S}_{\beta+\alpha}.$$

13. *Es gilt das assoziative Gesetz:*

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma. \qquad (1,7)$$

Denn wir haben:

$$\mathfrak{S}_{\alpha+(\beta+\gamma)} = \mathfrak{S}_{\beta+\gamma}\,\mathfrak{S}_0\,\mathfrak{S}_\alpha = \mathfrak{S}_\gamma\,\mathfrak{S}_0\,\mathfrak{S}_\beta\,\mathfrak{S}_0\,\mathfrak{S}_\alpha$$
$$= \mathfrak{S}_\gamma\,\mathfrak{S}_0\,\mathfrak{S}_{\alpha+\beta} = \mathfrak{S}_{(\alpha+\beta)+\gamma}.$$

14. *Es gibt in $\mathfrak{h}$ ein neutrales Element, die Null:*

$$\alpha + 0 = \alpha, \qquad (1.8)$$

für jedes Element α von $\mathfrak{h}$.

Denn:

$$\mathfrak{S}_{\alpha+0} = \mathfrak{S}_0\,\mathfrak{S}_0\,\mathfrak{S}_\alpha = \mathfrak{S}_\alpha.$$

Das Spiegelbild des Endes α inbezug auf die Gerade $(0, \infty)$ wird mit $-\alpha$ bezeichnet und heiszt *das Entgegengesetzte* von α. Offenbar ist $-(-\alpha) = \alpha$.

15. *Die Summe irgend eines Elements von $\mathfrak{h}$ und seines Entgegengesetzten ist Null:*

$$\alpha + (-\alpha) = 0, \qquad (1,9)$$

für jedes α von $\mathfrak{h}$.

Denn, man prüft leicht nach, dasz die Spiegelung $\mathfrak{S}_{\alpha+(-\alpha)} = \mathfrak{S}_{-\alpha}\,\mathfrak{S}_0\,\mathfrak{S}_\alpha$ die Enden α und $-\alpha$ mit einander vertauscht und also die Spiegelung $\mathfrak{S}_0$ sein musz.

Die gefundenen Ergebnisse können folgendermaszen zusammengefaszt werden:

16. *Die Elemente von $\mathfrak{h}$ bilden gegenüber der Addition eine Abelsche Gruppe.*

Daraus folgt:

17. *Sind α und β irgend zwei Elemente aus $\mathfrak{h}$, so gibt es immer ein eindeutig bestimmtes Element ξ aus $\mathfrak{h}$, das der Gleichung*

$$\beta + \xi = \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1, 10)$$

genügt.

Die Lösung wird mit $\alpha - \beta$ bezeichnet und ist gleich $\alpha + (-\beta)$; insbesondere ist $0 - \beta = -\beta$. Wir nennen $\alpha - \beta$ die *Differenz* der Enden α und β.

Für die späteren Entwicklungen ist folgender Satz von hervorragender Bedeutung:

18. *Ist α ein Element von $\mathfrak{h}$, so wird durch die Bewegung $\mathfrak{S}_\alpha\ \mathfrak{S}_0$ dem willkürlichen Ende ξ das Ende $\bar{\xi}$ vermöge:*

$$\bar{\xi} = \xi + 2\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1, 11)$$

zugeordnet.

Selbstverständlich wird unter 2α die Summe $\alpha + \alpha$ verstanden. Es sei nun ξ ein Element von $\mathfrak{h}$ und $\bar{\xi}$ das aus $-\xi$ durch Spiegelung an der Geraden (α, ∞) hervorgehende Ende. Die Transformation $\mathfrak{S}_\alpha \mathfrak{S}_0 \mathfrak{S}_\xi \mathfrak{S}_0 \mathfrak{S}_\alpha = \mathfrak{S}_{\xi + 2\alpha}$ ist einerseits eine Spiegelung an der Geraden $(\xi + 2\alpha, \infty)$, läszt aber anderseits die durch die Bewegung $\mathfrak{S}_\alpha \mathfrak{S}_0$ aus der Geraden (ξ, ∞) hervorgehende Gerade $(\bar{\xi}, \infty)$ ungeändert. Also musz $\bar{\xi} = \xi + 2\alpha$ sein. Der Satz gilt auch für $\xi = \infty$, wenn man wie üblich

$$\infty + \alpha = \infty \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1, 12)$$

setzt.

b. Die Multiplikation der Enden. Auf der Geraden $(0, \infty)$ wählen wir einen Punkt O und errichten in O das Lot; die Enden dieses Lotes mögen mit 1 und -1 bezeichnet werden. Ein Ende werde *positiv* genannt, wenn es auf derselben Seite der Geraden $(0, \infty)$ liegt wie das Ende 1; ein Ende werde *negativ* genannt, wenn es auf derselben Seite der Geraden $(0, \infty)$ liegt wie das Ende -1. Wie wir schon gesehen haben, (Satz 6) gibt es durch irgend ein von Null verschiedenes Ende ξ aus $\mathfrak{h}$ eine Senkrechte auf der Geraden $(0, \infty)$; das andere Ende dieser Senkrechten ist dann $-\xi$. Die Spiegelung an der Geraden $(-\xi, \xi)$ werden wir $\mathfrak{P}_\xi$ nennen; offenbar kommen $\mathfrak{P}_\xi$ und $\mathfrak{P}_{-\xi}$ auf dasselbe hinaus.

Für die Enden von $\mathfrak{h}$ können wir folgendermaszen eine zweite Verknüpfung erklären. Es seien α und β irgend zwei von Null verschiedene Elemente von $\mathfrak{h}$. Auf Grund des Satzes 10 gibt es eine eindeutig bestimmte Gerade $(\pi, -\pi)$ derart, dasz für die Spiegelung $\mathfrak{P}_\pi$ an dieser Geraden die Beziehung

$$\mathfrak{P}_\pi = \mathfrak{P}_\beta\, \mathfrak{P}_1\, \mathfrak{P}_\alpha . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1, 13)$$

erfüllt ist. Wir werden das positive bezw. das negative Ende der Geraden $(\pi, -\pi)$ das *Produkt* $\alpha\beta$ der Enden α und β nennen, je nachdem die Enden α und β entweder beide positiv bezw. beide negativ, oder eines positiv und das andere negativ ist. Wir ergänzen diese Definition mit der Festsetzung:

$$\alpha \,.\, 0 = 0 \,.\, \alpha = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1, 14)$$

für jedes Element α von $\mathfrak{h}$.

19. *Es gilt das kommutative Gesetz:*

$$\alpha\beta = \beta\alpha . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1, 15)$$

Für von Null verschiedene Elemente beweist man die Behauptung wie Satz 12. Natürlich musz man jetzt auch noch auf die Vorzeichen achten.

20. *Es gilt das assoziative Gesetz:*

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1, 16)$$

Für von Null verschiedene Elemente wie Satz 13.

21. *Es gibt ein neutrales Element, die Eins:*

$$\alpha \,.\, 1 = \alpha \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1, 17)$$

für jedes Element α von $\mathfrak{h}$.

Für von Null verschiedene Elemente wie Satz 14.

Das Spiegelbild eines von Null verschiedenen Endes α inbezug auf die Gerade $(-1, 1)$ wird mit α^{-1} bezeichnet und heiszt das *Umgekehrte* von α. Offenbar ist $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$.

22. *Das Produkt irgend eines von Null verschiedenen Elements von $\mathfrak{h}$ und seines Umgekehrten ist eins:*

$$\alpha \,.\, \alpha^{-1} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1, 18)$$

für jedes $\alpha \neq 0$ von $\mathfrak{h}$.

Dieser Satz wird wie Satz 15 bewiesen.

Wir können die erhaltenen Ergebnisse folgendermaszen zusammenfassen:

23. *Die von Null verschiedenen Elemente von $\mathfrak{h}$ bilden gegenüber der Multiplikation eine Abelsche Gruppe.*

Daraus geht hervor:

24. *Ist α irgend ein Element von $\mathfrak{h}$ und β irgend ein von Null verschiedenes Element von $\mathfrak{h}$, dann gibt es stets ein eindeutig bestimmtes Element ξ von $\mathfrak{h}$, das der Gleichung*

$$\beta\xi = \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1, 19)$$

genügt.

Die Lösung wird mit $\frac{\alpha}{\beta}$ bezeichnet und ist gleich $\alpha\beta^{-1}$; insbesondere ist $\frac{1}{\beta} = \beta^{-1}$.

Wir nennen $\frac{\alpha}{\beta}$ den *Quotienten* von α und β.

Aehnlich wie Satz 18 lautet der Satz:

25. *Ist α ein von Null verschiedenes Element von $\mathfrak{h}$, so wird durch die Bewegung $\mathfrak{P}_\alpha\ \mathfrak{S}_1$ dem willkürlichen Ende ξ das Ende $\bar{\xi}$ vermöge:*

$$\bar{\xi} = \xi\alpha^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1, 20)$$

zugeordnet.

Wie üblich wird unter α^2 das Produkt $\alpha\alpha$ verstanden. Der Satz gilt auch für $\xi = \infty$, wenn man

$$\infty \,.\, \alpha = \infty \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1, 21)$$

für jedes $\alpha \neq 0$ setzt. Im übrigen wird der Satz wie Satz 18 bewiesen.

Wir wollen vom letztgenannten Satz sofort eine Anwendung geben. Es sei α irgend ein positives Element von $\mathfrak{h}$. Der Schnittpunkt der Geraden $(-\alpha, \alpha)$ mit der Geraden $(0, \infty)$ sei A, und M bezeichne die Mitte der Strecke OA, wenn O und A verschieden sind, während M mit O zusammenfällt, wenn M und O denselben Punkt darstellen. Wir errichten in M das Lot auf der Geraden $(0, \infty)$ und bezeichnen dessen Enden mit ω und $-\omega$, wobei ω als positiv vorausgesetzt wird. Die Bewegung $\mathfrak{P}_\omega \mathfrak{P}_1$ führt offenbar das Ende 1 in das Ende α über. Aus (1.20) folgt daher:

$$\alpha = \omega^2 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1, 22)$$

Man zeigt leicht, dasz es nur ein positives Element ω geben kann, dessen Quadrat gleich α ist. Damit haben wir gefunden:

26. *Ist α ein positives Element von $\mathfrak{h}$, dann gibt es stets ein eindeutig bestimmtes positives Element ω, dessen Quadrat gleich α ist.*

Wir schreiben $\omega = \sqrt{\alpha}$ und können $\sqrt{\alpha}$ die *Quadratwurzel* von α nennen. Es liegt auf der Hand, diese Definition mit der Festsetzung $\sqrt{0} = 0$ zu ergänzen.

Wir sind jetzt imstande den Beweis des folgenden Satzes zu geben:

27. *Die Multiplikation ist distributiv inbezug auf die Addition:*

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1,23)$$

Dem Beweis dieser Behauptung schicken wir folgende Bemerkung voraus. Es sei $\mathfrak{B}$ irgend eine Bewegung und $\mathfrak{S}$ eine Spiegelung inbezug auf die Gerade g. Dann ist $\mathfrak{B}\mathfrak{S}\mathfrak{B}^{-1}$ die Spiegelung inbezug auf die Gerade, welche durch die Bewegung $\mathfrak{B}$ aus der Geraden g hervorgeht. Dabei ist $\mathfrak{B}^{-1}$ wie üblich die inverse Bewegung von $\mathfrak{B}$.

Es sei nun α ein positives Element aus $\mathfrak{h}$, und β und γ irgend zwei Elemente aus $\mathfrak{h}$. Da die Bewegungen $\mathfrak{P}_{\sqrt{\alpha}}\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_{\sqrt{\alpha}}$ einander invers sind, gilt offenbar auf Grund der soeben gemachten Bemerkung:

$$\mathfrak{P}_{\sqrt{\alpha}}\,\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{S}_{\xi}\,\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_{\sqrt{\alpha}}=\mathfrak{S}_{\alpha\xi}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1,24)$$

Wenden wir nun die Formel (1,24) an auf die Beziehung:

$$\mathfrak{S}_{\beta+\gamma}=\mathfrak{S}_{\gamma}\,\mathfrak{S}_0\,\mathfrak{S}_{\beta}$$

dann finden wir:

$$\mathfrak{S}_{\alpha(\beta+\gamma)}=\mathfrak{P}_{\sqrt{\alpha}}\,\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{S}_{\beta+\gamma}\,\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_{\sqrt{\alpha}}$$

$$=\mathfrak{P}_{\sqrt{\alpha}}\,\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{S}_{\gamma}\,\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_{\sqrt{\alpha}}\cdot\mathfrak{P}_{\sqrt{\alpha}}\,\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{S}_0\,\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_{\sqrt{\alpha}}\cdot\mathfrak{P}_{\sqrt{\alpha}}\,\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{S}_{\beta}\,\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_{\sqrt{a}}$$

$$=\mathfrak{S}_{\alpha\gamma}\,\mathfrak{S}_0\,\mathfrak{S}_{\alpha\beta}=\mathfrak{S}_{\alpha\beta+\alpha\gamma}.$$

Damit ist die Richtigkeit des Satzes für ein positives Element α erwiesen. Für $\alpha=0$ ist die Behauptung trivial und für ein negatives Element α sieht man die Richtigkeit des Satzes ohne Mühe durch formelles Rechnen ein.

Wir können folgendermaszen zusammenfassen:

28. *Die Elemente von* $\mathfrak{h}$ *bilden gegenüber den oben erklärten Verknüpfungen einen Körper.*

Denn für $\mathfrak{h}$ sind ja die Körperpostulate erfüllt.

Wegen des Satzes 26 gilt:

29. *Im Körper* $\mathfrak{h}$ *ist jede quadratische Gleichung mit nicht-negativer Diskriminante lösbar.*

Weiter haben wir:

30. *Der Körper* $\mathfrak{h}$ *ist angeordnet.*

Für die Elemente von $\mathfrak{h}$ ist nämlich die Eigenschaft, positiv zu sein, definiert und für jedes Element α von $\mathfrak{h}$ gilt genau eine der Aussagen: α ist positiv, α ist Null, $-\alpha$ ist positiv. Dabei kommt es auf dasselbe hinaus, wenn man sagt: α ist positiv, oder $-\alpha$ ist negativ. Weiter sind mit α und β auch $\alpha+\beta$ und $\alpha\beta$ positiv. Für das Produkt leuchtet dies sofort ein auf Grund der Definition der Multiplikation. Für die Summe kann man die Richtigkeit der Behauptung folgendermaszen einsehen. Es sei P irgend ein Punkt auf der Geraden $(0,\infty)$ und A bezw. B das Bild dieses Punktes bei der Bewegung $\mathfrak{S}_{\alpha}$ bezw $\mathfrak{S}_{\beta}$. Die Bewegung $\mathfrak{S}_{\beta}\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_{\alpha}$ führt offenbar A in B über und folglich liegen A und B symmetrisch inbezug auf die Gerade $(\alpha+\beta,\infty)$. Das bedeutet aber, dasz diese Gerade ebenso wie die Punkte A und B auf derselben Seite der Geraden $(0,\infty)$ liegen wie das Ende 1, und das wollten wir zeigen. Damit ist aber auch der Beweis des Satzes schon erbracht.

Wir können nun in bekannter Weise die Beziehungen „gröszer als" und „kleiner als" einführen und dafür die üblichen Eigenschaften herleiten.

Zum Schlusz bemerken wir noch, dasz auch das Ende ∞ in die Rechnungen hineingezogen werden kann, wenn man die üblichen Verabredungen trifft.

(To be continued.)

Mathematics. — *On the affirmative content of* PEANO*'s theorem on differential equations.* By D. VAN DANTZIG. (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN.)

(Communicated at the meeting of March 28, 1942.)

1. **An example.** — The right member of the differential equation

$$\frac{dx}{dt}=3\,\mu(x)^{\frac{2}{3}}, \qquad \mu(x)=Max\,(x,0),$$

is defined [1]) and continuous for every real x. The solution passing through $t=0$, $x=a$, a being a given real number, is

$$\begin{array}{lll} x=Max\,((t+a^{\frac{1}{3}})^3,\ 0) & \text{if } a>0, & \\ x=Max\,((t-b)^3,0) & \text{if } a=0 & (b\geqq 0 \text{ arbitrary}), \\ x=a & \text{if } a<0. & \end{array}$$

If, however, neither $a>0$, nor $a=0$, nor $a<0$ can be ascertained [2]), and if t is any positive number, then the value of x can not be localised closelier than within an interval containing $\langle 0,t\rangle$. In particular an *arbitrary* close approximation of x is not possible for any $t>0$.

PEANO's famous theorem [3]) states the existence of at least one solution, passing through a given point $(t_0, x_{0\mu})$, of the differential equations $dx_\lambda/dt=f_\lambda(t,x_\mu)$, provided $f_\lambda(t,x_\mu)$ is continuous in a neighbourhood of $(t_0,x_{0\mu})$. Its demonstration [3a]) uses a repeated application of BOLZANO-WEIERSTRASS' theorem, which is known [4]) not to correspond with a generally explicitly achievable construction, and therefore is not recognised by the intuitionists. The example shows that the same holds true, not only for the proof of PEANO's theorem, but also for the theorem itself. If more stringent conditions (e.g. of LIPSCHITZ' type, or even somewhat weaker ones) are imposed on $f_\lambda(t,x_\mu)$, it can be shown that the ordinary methods of CAUCHY-LIPSCHITZ or of CAUCHY-PICARD can be brought into a constructive form. If $f_\lambda(t,x_\mu)$ is only continuous, our example shows this to be impossible. In that case we can only try to construct the whole set of solutions, passing through a given point, at once.

---

1) The maximum m of two real numbers x and y is a well-defined real number, even though it may not be possible to prove either $m=x$ or $m=y$. Cf [2]).

2) The existence of such numbers, which was first proved by L. E. J. BROUWER (Cf. e g. Begründung der Mengenlehre I, Verh. Koninkl. Akad. v. Wet., Amsterdam, XII; Wis- en Natuurk. Tijdschr. 2, 1923; Monatsh. f. Math. en Physik 36, 1929) is well known to-day.

3) G. PEANO, Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires. Math. Ann. 37, 182—228. 1890. Cf. also G. MIE, id. 43, 553—568, 1893. The proof is reproduced e.g. by C. CARATHEODORY, Variationsrechnung, and E. KAMKE, Differentialgleichungen reeller Funktionen. Our present demonstration is much more like PEANO's original one, which uses CANTOR's instead of BOLZANO-WEIERSTRASS' theorem. Cf. D. VAN DANTZIG, A remark and a problem concerning the intuitionistic form of CANTOR's intersection theorem, these Proceedings, 45, 374—375, 1942 [10]).

3a) As it is simplified by C. ARZELÁ, Bologna Mem. (5) 5, 257—270, 1895; (5) 6, 131—140, 1896, P. MONTEL, Ann. Ec. Norm. 24, 264—283, 1907.

4) Cf. e.g. L. E. J. BROUWER, l.c. [2]).