Mathematics. — *Sur le théorème de déformation de* KOEBE. Par H. BOLDER. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of May 30, 1942.)

§ 1. **Notations.**

Ω: Un domaine simple et simplement connexe dans le plan de la variable complexe w, contenant dans son intérieur le point $w = 0$ et non le point $w = \infty$, et pour lequel la fonction de GREEN existe.

Σ: la frontière de Ω.

d: la plus petite distance de 0 à Σ.

$G(o, w)$: la fonction de GREEN de Ω avec pôle en 0.

$g(w)$: $G(0, w) - \log |w|^{-1}$ pour $w \neq 0$, et continue pour $w = 0$.

$\Omega(G_1)$: la partie de Ω, dans laquelle $G(0, w) > G_1 \geqq 0$.

$\Sigma(G_1)$: la frontière de $\Omega(G_1)$, donc ligne de niveau de $G(0, w)$.

$n(w)$: la normale extérieure de $\Omega(G(w))$ en w ($|n| = 1$).

$\frac{\partial G(0, w)}{\partial n}$: la dérivée de $G(0, w)$ dans la direction $n(w)$.

$$\left(donc \frac{\partial G(0, w)}{\partial n} \leqq 0 \right)$$

$\varrho^2(w)$: la densité d'une distribution de masse positive.

$M[D]$: la masse portée par l'ensemble D.

Indiquons enfin par $\Omega^*, \Sigma^*, d^*, G^*(0, w)$, etc. des entités analogues aux précédentes, qui sont soumises aux mêmes prémisses.

Domaine de KOEBE („Schlitzgebiet"): Un Ω, dont Σ est l'ensemble de points w pour lesquels $w = |w| e^{i\theta}$, où θ est constant, et $|w| \geqq d > 0$.

Le point $T = d e^{i\theta}$ s'appelle le sommet du domaine de KOEBE.

§ 2. **Introduction.**

M. MONNA a montré [1]), que le théorème de déformation de KOEBE s'exprime en termes de la théorie du potentiel par le

Théorème A. *Il existe une fonction* $f(d)$ *telle, que l'inégalité* $g(0) \leqq f(d)$ *est valable pour tout* Ω, *dont la plus petite distance de* 0 *à* Σ *vaut* d.

Supposons le théorème valable pour une seule valeur d^* de d.

Soit Ω^* l'image de Ω dans le plan de w^* par la transformation $dw^* = d^* w$, nous avons

$$G_\Omega(0, w) = G_{\Omega^*}(0, w^*), \log |w| - \log d = \log |w^*| - \log d^*,$$

$$g_\Omega(w) - \log d = G_\Omega(0, w) + \log |w| - \log d =$$
$$= G_{\Omega^*}(0, w^*) + \log |w^*| - \log d^* = g_{\Omega^*}(w^*) - \log d^*,$$

et nous pouvons, en posant $f(d^*) - \log d^* = \log k$, préciser le théorème A par le

---

[1]) A. F. MONNA: Sur quelques inégalités de la théorie des fonctions et leurs généralisations spatiales, Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **45**, p. 43 e.s., et p. 165 e.s. (1942).

Théorème B. *Il existe un nombre k tel, que l'inégalité $g(0) \leqq \log k.d$ est valable pour tout Ω, dont la plus petite distance de 0 à Σ vaut d.*

Dans la théorie de la représentation conforme il existe un théorème encore plus précis, qui s'exprime par le

Théorème C. *Soit Ω^* un domaine de* KOEBE, *l'inégalité $g(0) \leqq g^*(0)$ est valable pour tout Ω dont $d = d^*$.*

Le cas d'égalité ne se présente que si Ω est aussi un domaine de KOEBE. (Et par conséquent nous avons $f(d) = \log 4d$).

M. MONNA a posé le problème de démontrer ces théorèmes en s'appuyant exclusivement sur la théorie du potentiel, c.à.d. sans recourir aux notions et aux méthodes de la théorie de la représentation conforme.

L'article cité de M. MONNA contient une telle démonstration des théorèmes A et B. Dans la note présente je me propose d'établir une démonstration du caractère demandé du théorème C. On y reconnaîtra une démonstration connue de AHLFORS–NEVANLINNA [2]), dont une représentation conforme auxiliaire a été remplacée par l'introduction d'une distribution de masse positive telle, que la masse portée par chaque partie de Ω égale l'aire de son image. La fonction $\varrho(w)$ correspond à la dilatation linéaire de cette représentation; elle a une signification physique simple.

M. MONNA a déjà signalé, que dans l'espace il n'existe pas un théorème analogue à A. Cependant la généralisation spatiale des lemmes I—VI est immédiate, sans aucune restriction, et ils peuvent servir d'obtenir des limitations pour $g(0)$ dans certains cas particuliers, comme dans l'article de M. MONNA.

Par exemple on peut choisir pour Ω^* le sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, et prolonger le champ E^* correspondant par une inversion par rapport à Σ^* (d'où $\varrho(P) = r_p^{-2}$), ce qui fournit un théorème analogue au premier théorème de § 4.

On obtiendra une autre forme de ce théorème en choisissant pour Σ^* un plan (ne contenant par O), et en prolongeant le champ E^* correspondant par une réflexion par rapport a Σ^*. Nous n'insistons pas.

§ 3. Lemmes.

Lemme I. *Il existe à chaque $\varepsilon > 0$ un nombre $N(\varepsilon)$ tel, que*

$$G > N(\varepsilon) \text{ entraîne } \Omega^*(G + g^*(0) + \varepsilon) \subset \Omega(G + g(0) - \varepsilon).$$

Démonstration. A chaque $\varepsilon > 0$ correspond un voisinage A_ε de 0 tel, que dans A_ε

$$g(w) > g(0) - \varepsilon, \text{ et } g^*(w) < g^*(0) + \varepsilon,$$

d'où

$$g(w) - g(0) + \varepsilon > 0 > g^*(w) - g^*(0) - \varepsilon,$$

et

$$G(0, w) - g(0) + \varepsilon > G^*(0, w) - g^*(0) - \varepsilon.$$

Il existe un $N(\varepsilon)$ tel, que

$$\Omega^*(N(\varepsilon) + g^*(0) + \varepsilon) \subset A_\varepsilon, \text{ et } \Omega(N(\varepsilon) + g(0) - \varepsilon) \subset A_\varepsilon.$$

Pour

$$G > N(\varepsilon),\ G^*(0, w) - g^*(0) - \varepsilon > G \text{ entraîne } G(0, w) - g(0) + \varepsilon > G,$$

ce qui signifie

$$w \subset \Omega^*(G + g^*(0) + \varepsilon) \text{ entraîne } w \subset \Omega(G + g(0) - \varepsilon),$$

et le lemme est démontré.

---

[2]) R. NEVANLINNA: Eindeutige analytische Funktionen p. 92—94.

Introduisons maintenant une distribution de masse positive sur Ω. Pour les distributions considérées, chaque voisinage de 0 portera une quantité infinie, chaque partie excluante un voisinage de 0 portera une quantité finie.

Pour $w \neq 0$, la densité $\varrho^2(w)$ sera continue.

Lemme II.

$$2\pi M[\Omega(G_1)-\Omega(G_2)] \geqq \int_{G_1}^{G_2} dG \cdot \left(\int_{\Sigma(G)} \varrho(w)\, ds \right)^2, \quad \text{si } 0 \leqq G_1 < G_2.$$

Démonstration. Si $G_1 > 0$ nous avons

$$M[\Omega(G_1)-\Omega(G_2)] = \int_{G_1}^{G_2} dG \cdot \int_{\Sigma(G)} \varrho^2(w) \left(-\frac{\partial G(0,w)}{\partial n} \right)^{-1} ds \geqq$$

$$\geqq \int_{G_1}^{G_2} dG \left[\left(\int_{\Sigma(G)} \varrho\, ds \right)^2 \cdot \left(\int_{\Sigma(G)} \left(-\frac{\partial G(0,w)}{\partial n} \right) ds \right)^{-1} \right] =$$

$$= (2\pi)^{-1} \int_{G_2}^{G_3} dG \left[\int_{\Sigma(G)} \varrho\, ds \right]^2,$$

en vertu de l'inégalité de SCHWARZ, et de la formule

$$\int_{\Sigma(G)} \left(-\frac{\partial G(0,w)}{\partial n} \right) ds = 2\pi.$$

Si $G_1' > 0$ nous avons

$$M[\Omega(0)-\Omega(G_2)] > M[\Omega(G_1')-\Omega(G_2)],$$

d'où

$$M[\Omega(0)-\Omega(G_2)] \geqq \lim_{G_1' \to 0} M[\Omega(G_1')-\Omega(G_2)] \geqq$$

$$\geqq \lim_{G_1' \to 0} (2\pi)^{-1} \int_{G_1'}^{G_2} dG \left[\int_{\Sigma(G)} \varrho\, ds \right]^2 = (2\pi)^{-1} \int_0^{G_2} dG \left[\int_{\Sigma(G)} \varrho\, ds \right]^2.$$

Il faut maintenant choisir la densité $\varrho^2(w)$.

Définissons, à un domaine Ω^* un champ vectoriel $E^*(w) = -\operatorname{grad} G^*(0,w)$, autrement dit

$$E^*(w) = \left| \frac{\partial G^*(0,w)}{\partial n^*} \right| \cdot n^*(w), \quad \text{et} \quad \varrho(w) = |E^*(w)|.$$

Le potentiel $G^*(0,w)$, et le champ $E^*(w)$ peuvent être interprétés comme générés par une charge $+1$ en 0 et des charges négatives sur Σ^*, $\varrho^2(w)$ est proportionnel à la densité de l'énergie du champ $E^*(w)$.

Définition. *Soit D un domaine, contenant dans son intérieur le point 0, et soit Γ sa frontière. Soit $D + \Gamma \subset \Omega$. Soit, en un point w de Γ, $n'(w)$ la normale extérieure de D.*

Un champ vectoriel $F(w)$, défini dans Ω, sera dit être de la classe $U(\Omega)$, s'il possède les propriétés suivantes:

$F(w)$ est continu pour $w \neq 0$, et

$$\int_{\Gamma} (F(w), n'(w))\, ds = 2\pi$$

pour tout D suffisant aux conditions précédentes.

Evidemment $E^*(w)$ est de la classe $U(\Omega^*)$.

Lemme III. *Soit $F(w)$, un champ vectoriel de la classe $U(\Omega(G))$, et $\varrho(w) = |F(w)|$, on a*

$$\int_{\Sigma(G')} \varrho(w)\, ds \geqq 2\pi \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

pour $G' > G$.

Le cas d'égalité ne se présente, que si en chaque point w de $\Sigma(G')$:

$$|F(w)| = (F(w), n(w)),$$

c.à.d. les directions de $F(w)$ et de $n(w)$ coïncident.

Lemme IV. *Soit $0 \leqq G_1 < G_2$. Si dans $\Omega(G_1) - \Omega(G_2)$. la fonction $\varrho(w)$ suffit à (1) pour tout G' de $G_1 < G' < G_2$ on a*

$$M[\Omega(G_1) - \Omega(G_2)] \geqq 2\pi(G_2 - G_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Le cas d'égalité ne se présente que si

$$\int_{\Sigma(G')} \varrho\, ds = 2\pi \text{ pour tout } G' \text{ de } G_1 < G' < G_2.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du lemme II.

Lemme V. *Pour $0 \leqq G_1 < G_2$, $\varrho(w) = |E^*(w)|$, on a*

$$M[\Omega^*(G_1) - \Omega^*(G_2)] = 2\pi(G_1 - G_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Démonstration. Si $G_1 > 0$ nous avons

$$M[\Omega^*(G_1) - \Omega^*(G_2)] = \int_{G_1}^{G_2} dG \int_{\Sigma^*(G)} \left(-\frac{\partial G^*(0,w)}{\partial n^*}\right)^2 \cdot \left(-\frac{\partial G^*(0,w)}{\partial n^*}\right)^{-1} ds =$$

$$= \int_{G_1}^{G_2} dG \int_{\Sigma^*(G)} \left(-\frac{\partial G^*(0,w)}{\partial n^*}\right) ds = 2\pi(G_2 - G_1)$$

Soit $G_1 = 0$.

$$\lim_{G_1' \to 0} (\Omega(G_1') - \Omega(G_2)) = \Omega(0) - \Omega(G_2),$$

par conséquent

$$M[\Omega(0) - \Omega(G_2)] = \lim_{G_1' \to 0} M[\Omega(G_1') - \Omega(G_2)] = \lim_{G_1' \to 0} 2\pi(G_2 - G_1') = 2\pi G_2.$$

Lemme VI. *Soit A un voisinage de 0, soit la fonction $\varrho(w)$ définie dans Ω et Ω^* tellement, que les relations (2) et (3) sont remplies pour tout G_1 et G_2 de $0 \leqq G_1 < G_2$; soient $a \geqq 0$ et $a^* \geqq 0$.*

Alors

$$M[\Omega(a)-A] \leqslant [\Omega^*(a^*)-A] \text{ entraîne } g(0)-a \leqslant g^*(0)-a^*.$$

Le cas d'égalité ne se présente que si dans (2) *l'égalité se présente pour tout* G_1 *et* G_2 *admis.*

Démonstration. Choisissons $\varepsilon > 0$. En vertu du lemme I nous avons

$$\Omega^*(G+g^*(0)+\varepsilon) \subset \Omega(G+g(0)-\varepsilon)$$

pour G assez grand. Nous avons donc

$$M[\Omega(a)-\Omega(G_1+g(0)-\varepsilon)] \leqslant M[\Omega^*(a^*)- \\ -\Omega(G+g(0)-\varepsilon)] \leqslant M[\Omega^*(a^*)-\Omega^*(G+g^*(0)+\varepsilon)],$$

et la démonstration se termine par l'application de (2) et (3).

§ 4. Application des lemmes.

L'application des lemmes précédents pour comparer $g(0)$ et $g^*(0)$ rencontre encore une difficulté. Si

$$\Omega \subset \Omega^* \text{ et } \varrho(w) = |E^*(w)|$$

les lemmes s'appliquent sans aucune restriction, et parce que, dans ce cas,

$$M[\Omega - A] \leqslant M[\Omega^* - A],$$

nous avons:

$$\Omega \subset \Omega^* \text{ entraîne } g(0) \leqslant g^*(0),$$

un résultat trivial (une conséquence immédiate du principe de CARLEMAN). Si une partie de Ω n'est pas contenue dans Ω^*, E^*, et par conséquent la fonction ϱ, ne sont pas définis dans tout Ω. Nous sommes conduits à chercher un prolongement du champ E^*.

Soit, par exemple, Ω^* le cercle $|w| < 1$, auquel correspondent:

$$G^*(0, w) = \log|w|^{-1}, E^*(w) = w|w|^{-2}, \varrho(w) = |w|^{-1}.$$

Prolongeons $E^*(w)$ par une inversion par rapport à Σ^*, nous obtenons un champ $E^*(w)$ de la classe U du plan complet.

$E^*(w)$ et $\varrho(w)$ s'expriment pour tout w par les mêmes formules

$$E^*(w) = w|w|^{-2}, \varrho(w) = |w|^{-1}.$$

Nous en tirons le

Théorème: *Soit* Ω^* *le cercle* $|w| < 1$, *et* $\varrho(w) = |w|^{-1}$ *pour tout* w,

$$M[\Omega - A] \leqslant M[\Omega^* - A] \text{ entraîne } g(0) \leqslant g^*(0),$$

qui est un peu plus général que celui, par lequel s'exprime en termes du potentiel le théorème de KOEBE transformé, traité par M. NEVANLINNA (NEVANLINNA l.c. p. 81 e.s.).

Pour obtenir une démonstration directe du théorème C nous choisissons pour Ω^* un domaine de KOEBE, et $\varrho(w) = |E^*(w)|$.

Alors E^* est défini partout (sauf sur Σ^*), mais les lemmes ne s'appliquent pas encore. En effet, il y a peut-être des $\Sigma(G)$ incluantes des parties de Σ^*, où se trouvent des charges négatives, c.à.d. dans ce cas $E^*(w)$ n'est pas de la classe $U(\Omega)$.

Le lemme suivant éliminera cet obstacle.

Lemme VII. *Soit* Ω^* *un domaine de* KOEBE, *dont le sommet* T *est situé sur* Σ. *Il* *existe un champ vectoriel $E'(w)$ de la classe $U(\Omega)$, tel que $|E'(w)| = |E^*(w)|$ pour tout $w \subset \Omega$.*

Démonstration. Formons un champ vectoriel bivalent $E_{1,2}$, en définissant $E_1(w) = E^*(w)$, et $E_2(w)$ son image réfléchie par rapport à Σ^*. Choisissons $E' = E_1$ dans le voisinage de 0, et prolongeons, *tout en restant dans l'intérieur de Ω*, par $E' = E_1$ ou $E' = E_2$, de sorte que E' est continu. Parce que Ω est simplement connexe, et ne contient pas dans son intérieur les deux points de ramification de $E_{1,2}$, T et ∞, nous obtenons un champ E' univalent.

Evidemment E' est de la classe $U(\Omega)$.

Passons enfin à la démonstration du théorème C.

Soit d la plus petite distance de 0 à Σ, il existe un point T de Σ, avec $|w_T| = d$. Choisissons pour Ω^* le domaine de KOEBE dont T est le sommet.

Formons le champ $E'(w)$ du lemme VII, et posons

$$\varrho(w) = |E^*(w)| = |E'(w)|.$$

Ω est simple, et Ω^* couvre le plan total, nous avons donc

$$M[\Omega - A] \leqq M[\Omega^* - A].$$

Des lemmes III—VI nous déduisons immédiatement $g(0) \leqq g^*(0)$.

Il faut encore considérer le cas d'égalité.

Nous avons dans ce cas

$$M[\Omega(G_1) - \Omega(G_2)] = 2\pi(G_2 - G_1)$$

pour tout $G_1 < G_2$ (lemme VI), d'où

$$\int_{\Sigma(G)} \varrho\, ds = \int_{\Sigma(G)} |E^*|\, ds = 2\pi$$

pour tout $G > 0$ (lemme IV). Par conséquent, en tout point w de $\Sigma(G(w))$ les directions de $E^*(w)$ et de $n(w)$ coïncident, c.à.d. $\Sigma(G)$ est une ligne équipotentielle du champ E^*,

$$\text{c. à. d. } \Sigma(G) \text{ coïncide avec } \Sigma^*(G^*).$$

Choisissant

$$A = \Omega(G) = \Omega^*(G^*)$$

nous avons

$$2\pi G = M[\Omega(0) - \Omega(G)] = M[\Omega^*(0) - \Omega^*(G^*)] = 2\pi G^*.$$

Nous avons donc obtenu:

$$\Omega(G) = \Omega^*(G) \text{ pour tout } G > 0,$$

d'où

$$G(0, w) = G^*(0, w) \text{ pour } w \subset \Omega^* \qquad (\text{ou } w \subset \Omega).$$

Parce que Ω est simplement connexe, il n'y a pas de points-frontières irréguliers, et $\Omega(G) = \Omega^*(G)$ subsiste pour $G = 0$.