Mathematics. — *Extension d'une série des fonctions de* BESSEL, *due à* LOMMEL, *et de quelques séries des fonctions de* BESSEL *analogues.* I. By J. G. RUTGERS. (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN.)

(Communicated at the meeting of October 31, 1942.)

1. Bien connue est la série de LOMMEL [1]):

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\nu+2n)\, I_{\nu+2n}(x) = \frac{x}{2}\, I_{\nu-1}(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

où ν est arbitraire, qui est une conséquence directe de la propriété suivante des fonctions de BESSEL:

$$\frac{2\mu}{x}\, I_\mu(x) = I_{\mu-1}(x) + I_{\mu+1}(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Autres recherches me conduisaient à la série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\nu+2n)^3\, I_{\nu+2n}(x) = \nu^2 \frac{x}{2}\, I_{\nu-1}(x) - x^2 I_\nu(x), \quad . \quad . \quad (3)$$

dont la précision peut être vérifiée aussi directement; car en appliquant (2) pour $\mu = \nu + 2n$ on peut écrire pour le membre gauche:

$$\frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\nu+2n)^2 \{ I_{\nu+2n-1}(x) + I_{\nu+2n+1}(x) \} =$$

$$= \frac{x}{2} \left[\nu^2 I_{\nu-1}(x) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \{\nu+2n+2)^2 - (\nu+2n)^2\} I_{\nu+2n+1}(x) \right] =$$

$$= \frac{x}{2} \left\{ \nu^2 I_{\nu-1}(x) - 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\nu+2n+1)\, I_{\nu+2n+1}(x) \right\} =$$

$$= \frac{x}{2} \{ \nu^2 I_{\nu-1}(x) - 2x\, I_\nu(x) \} \qquad \textit{selon } (1).$$

Ceci me conduisait à l'examination de la série générale:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\nu+2n)^m\, I_{\nu+2n}(x),$$

où m est un entier positif. Il paraissait qu'il est possible d'y trouver pour ν arbitraire une expression finie dans le cas où m est impair. En posant donc d'abord:

$$S_{\nu,2k+1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\nu+2n)^{2k+1}\, I_{\nu+2n}(x), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

où ν est arbitraire et k entier $\geqq 0$, on trouve d'après (2) pour $\mu = \nu + 2n$:

$$S_{\nu,2k+1}(x) = \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\nu+2n)^{2k} \{ I_{\nu+2n-1}(x) + I_{\nu+2n+1}(x) \}. \quad . \quad (5)$$

---

[1]) NIELSEN, Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen 1904, p. 270, (3).

En y substituant:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n)^{2k}I_{\nu+2n-1}(x)=\nu^{2k}I_{\nu-1}(x)-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n+2)^{2k}I_{\nu+2n+1}(x), \quad (6)$$

on obtient:

$$S_{\nu,2k+1}(x)=\nu^{2k}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)-\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\{\nu+2n+2)^{2k}-(\nu+2n)^{2k}\}I_{\nu+2n+1}(x), \quad (7)$$

ou, d'après les réductions suivantes

$$\left.\begin{aligned}&(\nu+2n+2)^{2k}-(\nu+2n)^{2k}=\{1+(\nu+2n+1)\}^{2k}-\{1-(\nu+2n+1)\}^{2k}=\\&=\sum_{p=0}^{2k}\binom{2k}{p}(\nu+2n+1)^p\{1-(-1)^p\}=2\sum_{p=1,3,\ldots}^{2k-1}\binom{2k}{p}(\nu+2n+1)^p=\\&=2\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+1}(\nu+2n+1)^{2p_1+1}:\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

$$S_{\nu,2k+1}(x)=\nu^{2k}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)-x\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n+1)^{2p_1+1}I_{\nu+2n+1}(x),$$

de sorte que nous trouvons d'abord, selon (4) en ,y changeant ν en $\nu+1$, la formule récurrente:

$$S_{\nu,2k+1}(x)=\nu^{2k}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)-x\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+1}S_{\nu+1,2p_1+1}(x), \quad . \quad (9)$$

qui nous permet de calculer successivement $S_{\nu,1}(x)$, $S_{\nu,3}(x)$, $S_{\nu,5}(x)$, etc.

Ainsi suit de (9) pour $k=0$:

$$S_{\nu,1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n)I_{\nu+2n}(x)=\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

c'est la série de LOMMEL (1).

Pour $k=1$ il suit de (9):

$$S_{\nu,3}(x)=\nu^2\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)-2x\,S_{\nu+1,1}(x)$$

et donc selon (1') en y changeant ν en $\nu+1$:

$$S_{\nu,3}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n)^3I_{\nu+2n}(x)=\nu^2\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)-x^2I_\nu(x), \quad (3')$$

c'est la série (3).

En substituant dans (9) $k=2$, on trouve:

$$S_{\nu,5}(x)=\nu^4\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)-x\{4S_{\nu+1,1}(x)+4S_{\nu+1,3}(x)\},$$

donc selon (1') et (3') en y changeant ν en $\nu+1$:

$$\left.\begin{aligned}S_{\nu,5}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n)^5I_{\nu+2n}(x)=\nu^4\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)-2x^2\{I_\nu(x)+(\nu+1)^2I_\nu(x)-\\-2x\,I_{\nu+1}(x)\}=\nu^4\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)-2(\nu^2+2\nu+2)x^2I_\nu(x)+4x^3I_{\nu+1}(x),\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

etc.

De (9) on peut aussi déduire une formule générale pour $S_{\nu,2k+1}(x)$; pour cela nous substituons dans (9) pour $S_{\nu+1,2p_1+1}(x)$, l'expression qui suit de (9) en y changeant ν en $\nu+1$, p_1 en p_2 et k en p_1, notamment:

$$S_{\nu+1,\,2p_1+1}(x)=(\nu+1)^{2p_1}\frac{x}{2}I_\nu(x)-x\sum_{p_2=0}^{p_1-1}\binom{2p_1}{2p_2+1}S_{\nu+2,\,2p_2+1}(x);$$

alors nous obtenons:

$$S_{\nu,\,2k+1}(x)=\nu^{2k}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)-\frac{x^2}{2}I_\nu(x)\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+1}(\nu+1)^{2p_1}+$$
$$+x^2\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+1}\sum_{p_2=0}^{p_1-1}\binom{2p_1}{2p_2+1}S_{\nu+2,\,2p_2+1}(x),$$

où la dernière somme ne fournit rien pour $p_1=0$; en y changeant p_1 en p_1+1, de sorte que p_1 passe les nombres 0 à $k-2$ au lieu de 1 à $k-1$, on trouve:

$$S_{\nu,2k+1}(x)=\nu^{2k}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)-\frac{x^2}{2}I_\nu(x)\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+1}(\nu+1)^{2p_1}+$$
$$+x^2\sum_{p_1=0}^{k-2}\binom{2k}{2p_1+3}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+2}{2p_2+1}S_{\nu+2,\,2p_2+1}(x).$$

En y substituant de nouveau pour $S_{\nu+2,2p_1+1}(x)$ l'expression, qui suit de (9) en y changeant ν en $\nu+2$, p_1 en p_3 et k en p_2, nous trouvons:

$$S_{\nu,\,2k+1}(x)=\nu^{2k}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)-\frac{x^2}{2}I_\nu(x)\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+1}(\nu+1)^{2p_1}+$$
$$+\frac{x^3}{2}I_{\nu+1}(x)\sum_{p_1=0}^{k-2}\binom{2k}{2p_1+3}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+2}{2p_2+1}(\nu+2)^{2p_2}-$$
$$-x^3\sum_{p_1=0}^{k-2}\binom{2k}{2p_1+3}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+2}{2p_2+1}\sum_{p_3=0}^{p_2-1}\binom{2p_2}{2p_3+1}S_{\nu+3,\,2p_3+1}(x),$$

où de nouveau la dernière somme ne fournit rien pour $p_2=0$ et donc aussi rien pour $p_1=0$; en y changeant p_1 en p_1+1 et p_2 en p_2+1 on obtient:

$$S_{\nu,2k+1}(x)=\nu^{2k}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)-\frac{x^2}{2}I_\nu(x)\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+1}(\nu+1)^{2p_1}+$$
$$+\frac{x^3}{2}I_{\nu+1}(x)\sum_{p_1=0}^{k-2}\binom{2k}{2p_1+3}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+2}{2p_2+1}(\nu+2)^{2p_2}-$$
$$-x^3\sum_{p_1=0}^{k-3}\binom{2k}{2p_1+5}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4}{2p_2+3}\sum_{p_3=0}^{p_2}\binom{2p_2+2}{2p_3+1}S_{\nu+3,2p_3+1}(x).$$

En continuant ainsi la dernière somme devient ensuite:

$$(-1)^k x^k\sum_{p_1=0}^{0}\binom{2k}{2p_1+2k-1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+2k-2}{2p_2+2k-3}\cdots\sum_{p_k=0}^{p_{k-1}}\binom{2p_{k-1}+2}{2p_k+1}S_{\nu+k,2p_k+1}(x)=$$
$$=(-x)^k(2k)(2k-2)\ldots 2\,S_{\nu+k,1}(x)=(-1)^k 2^{k-1}k!\,x^{k+1}I_{\nu+k-1}(x).$$

selon (1') en y changeant ν en $\nu+k$.

Par conséquent on a la formule générale pour ν arbitraire et k entier $\geqq 0$:

$$\left.\begin{aligned} S_{\nu,2k+1}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n)^{2k+1}I_{\nu+2n}(x) = \\ =\frac{x}{2}\Bigg\{\nu^{2k}I_{\nu-1}(x) &+ \sum_{r=1}^{k}(-1)^r x^r I_{\nu+r-1}(x)\sum_{p_1=0}^{k-r}\binom{2k}{2p_1+2r-1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+2r-2}{2p_2+2r-3}\cdots \\ &\cdots\sum_{p_r=0}^{p_{r-1}}\binom{2p_{r-1}+2}{2p_r+1}(\nu+r)^{2p_r}\Bigg\} \end{aligned}\right\} \quad I$$

Il est évident que la formule I représente la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2_n)^{2k+1}I_{\nu+2n}(x)$$

à l'aide des fonctions

$$I_{\nu-1}(x),\ I_\nu(x),\ \ldots\ I_{\nu+k-1}(x).$$

De I suivent (1) pour $k=0$, (3) pour $k=1$ et (10) pour $k=2$.

2. Nous avions substitué dans (5)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n)^{2k}I_{\nu+2n-1}(x)=\nu^{2k}I_{\nu-1}(x)-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n+2)^{2k}I_{\nu+2n+1}(x). \quad (6)$$

Quand nous y substituons:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n)^{2k}I_{\nu+2n+1}(x)=(\nu-2)^{2k}I_{\nu-1}(x)-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n-2)^{2k}I_{\nu+2n-1}(x)\ldots, \quad (6')$$

il vient:

$$S_{\nu,2k+1}(x)=(\nu-2)^{2k}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)+\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\{(\nu+2n)^{2k}-(\nu+2n-2)^{2k}\}I_{\nu+2n-1}(x)$$

ou, d'après les réductions suivantes

$$\begin{aligned} &(\nu+2n)^{2k}-(\nu+2n-2)^{2k}=\{1+(\nu+2n-1)\}^{2k}-\{1-(\nu+2n-1)\}^{2k}= \\ &=\sum_{p=0}^{2k}\binom{2k}{p}(\nu+2n-1)^p\{1-(-1)^p\}=2\sum_{p=1,3,\ldots}^{2k-1}\binom{2k}{p}(\nu+2n-1)^p= \\ &=2\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+1}(\nu+2n-1)^{2p_1+1}; \end{aligned}$$

$$S_{\nu,2k+1}(x)=(\nu-2)^{2k}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)+x\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n-1)^{2p_1+1}I_{\nu+2n-1}(x),$$

de sorte que nous obtenons en vertu de (4), en y changeant ν en $\nu-1$, la formule récurrente:

$$S_{\nu,2k+1}(x)=(\nu-2)^{2k}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)+x\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+1}S_{\nu-1,2p_1+1}(x), \quad . \quad (9')$$

qui nous permet également comme (9) de calculer successivement $S_{\nu,1}(x)$, $S_{\nu,3}(x)$, $S_{\nu,5}(x)$, etc.

En allant comme dans le paragraphe 1 on peut aussi déduire de (9′) une formule générale pour $S_{\nu,2k+1}(x)$. D'abord on trouve:

$$S_{\nu,2k+1}(x) = (\nu-2)^{2k}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x) + \frac{x^2}{2}I_{\nu-2}(x)\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+1}(\nu-3)^{2p_1} +$$

$$+ x^2\sum_{p_1=0}^{k-2}\binom{2k}{2p_1+3}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+2}{2p_2+1}S_{\nu-2,2p_2+1}(x),$$

et ensuite:

$$\left.\begin{aligned} S_{\nu,2k+1}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n)^{2k+1}I_{\nu+2n}(x) = \\ = \frac{x}{2}\Big\{(\nu-2)^{2k}I_{\nu-1}(x) &+ \sum_{r=1}^{k}x^r I_{\nu-r-1}(x)\sum_{p_1=0}^{k-r}\binom{2k}{2p_1+2r-1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_2+2r-2}{2p_2+2r-3}\cdots \\ &\cdots\sum_{p_r=0}^{p_{r-1}}\binom{2p_{r-1}+2}{2p_r+1}(\nu-r-2)^{2p_r}\Big\} \end{aligned}\right\} . \quad II$$

La formule II représente la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n)^{2k+1}I_{\nu+2n}(x)$$

à l'aide des fonctions

$$I_{\nu-1}(x),\ I_{\nu-2}(x),\ \ldots\ I_{\nu-k-1}(x).$$

3. Il est aussi possible de faire une combinaison des formules récurrentes (9) et (9′). En substituant dans (9) pour $S_{\nu+1,2p_1+1}(x)$ resp. dans (9′) pour $S_{\nu-1,2p_1+1}(x)$ l'expression, qui suit de (9′) resp. de (9) en y changeant ν en $\nu+1$ resp. $\nu-1$, p_1 en p_2 et k en p_1, nous trouvons les relations:

$$S_{\nu,2k+1}(x) = \nu^{2k}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x) - \frac{x^2}{2}I_\nu(x)\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+1}(\nu-1)^{2p_1} -$$

$$- x^2\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+1}\sum_{p_2=0}^{p_1-1}\binom{2p_1}{2p_2+1}S_{\nu,2p_2+1}(x),$$

resp.

$$S_{\nu,2k+1}(x) = (\nu-2)^{2k}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x) + \frac{x^2}{2}I_{\nu-2}(x)\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+1}(\nu-1)^{2p_1} -$$

$$- x^2\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+1}\sum_{p_2=0}^{p_1-1}\binom{2p_1}{2p_2+1}S_{\nu,2p_2+1}(x),$$

dans lesquelles la dernière somme ne fournit rien pour $p_1=0$; en y changeant p_1 en p_1+1, nous obtenons les formules récurrentes:

$$\left.\begin{aligned} S_{\nu,2k+1}(x) = \nu^{2k}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x) &- \frac{x^2}{2}I_\nu(x)\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+1}(\nu-1)^{2p_1} - \\ &- x^2\sum_{p_1=0}^{k-2}\binom{2k}{2p_1+3}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+2}{2p_2+1}S_{\nu,2p_2+1}(x), \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

$$\left.\begin{aligned} S_{\nu,2k+1}(x) = (\nu-2)^{2k}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x) + \frac{x^2}{2}I_{\nu-2}(x)\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+1}(\nu-1)^{2p_1} - \\ - x^2\sum_{p_1=0}^{k-2}\binom{2k}{2p_1+3}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+2}{2p_2+1}S_{\nu,2p_2+1}(x). \end{aligned}\right\} \quad (11')$$

De ces formules on peut déduire, comme dans le paragraphe 1, des formules générales pour $S_{\nu,2k+1}(x)$; cependant il est préférable de faire différence entre k pair et k impair. En changeant k en $2k$ resp. $2k+1$, nous trouvons respectivement:

$$\left.\begin{aligned} & S_{\nu,4k+1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n)^{4k+1}I_{\nu+2n}(x) = \\ & = \frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)\left\{\nu^{4k} + \sum_{r=1}^{k}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r}\binom{4k}{2p_1+4r-1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r-2}{2p_2+4r-3}\cdots\right. \\ & \qquad \left.\cdots\sum_{p_{2r}=0}^{p_{2r-1}}\binom{2p_{2r-1}+2}{2p_{2r}+1}\nu^{2p_{2r}}\right\} - \\ & - \frac{x^2}{2}I_{\nu}(x)\sum_{r=0}^{k-1}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r-1}\binom{4k}{2p_1+4r+1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r}{2p_2+4r-1}\cdots \\ & \qquad \cdots\sum_{p_{2r+1}=0}^{p_{2r}}\binom{2p_{2r}+2}{2p_{2r+1}+1}(\nu-1)^{2p_{2r+1}} \end{aligned}\right\} \quad IIIa$$

$$\left.\begin{aligned} & S_{\nu,4k+3}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n)^{4k+3}I_{\nu+2n}(x) = \\ & = \frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)\left\{\nu^{4k+2} + \sum_{r=1}^{k}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r+1}\binom{4k+2}{2p_1+4r-1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r-2}{2p_2+4r-3}\cdots\right. \\ & \qquad \left.\cdots\sum_{p_{2r}=0}^{p_{2r-1}}\binom{2p_{2r-1}+2}{2p_{2r}+1}\nu^{2p_{2r}}\right\} - \\ & - \frac{x^2}{2}I_{\nu}(x)\sum_{r=0}^{k}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r}\binom{4k+2}{2p_1+4r+1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r}{2p_2+4r-1}\cdots \\ & \qquad \cdots\sum_{p_{2r+1}=0}^{p_{2r}}\binom{2p_{2r}+2}{2p_{2r+1}+1}(\nu-1)^{2p_{2r+1}} \end{aligned}\right\} \quad III\,b$$

$$\left.\begin{aligned} & S_{\nu,4k+1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n)^{4k+1}I_{\nu+2n}(x) = \\ & = \frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)\left\{(\nu-2)^{4k} + \sum_{r=1}^{k}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r}\binom{4k}{2p_1+4r-1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r-2}{2p_2+4r-3}\cdots\right. \\ & \qquad \left.\cdots\sum_{p_{2r}=0}^{p_{2r-1}}\binom{2p_{2r-1}+2}{2p_{2r}+1}(\nu-2)^{2p_{2r}}\right\} + \\ & + \frac{x^2}{2}I_{\nu-2}(x)\sum_{r=0}^{k-1}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r-1}\binom{4k}{2p_1+4r+1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r}{2p_2+4r-1}\cdots \\ & \qquad \cdots\sum_{p_{2r+1}=0}^{p_{2r}}\binom{2p_{2r}+2}{2p_{2r+1}+1}(\nu-1)^{2p_{2r+1}} \end{aligned}\right\} \quad IVa$$

$$
\left.\begin{aligned}
&S_{\nu,4k+3}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n)^{4k+3}I_{\nu+2n}(x)=\\
&=\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)\Big\{(\nu-2)^{4k+2}+\sum_{r=1}^{k}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r+1}\binom{4k+2}{2p_1+4r-1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r-2}{2p_2+4r-3}\cdots\\
&\qquad\cdots\sum_{p_{2r}=0}^{p_{2r-1}}\binom{2p_{2r-1}+2}{2p_{2r}+1}(\nu-2)^{2p_{2r}}\Big\}+\\
&+\frac{x^2}{2}I_{\nu-2}(x)\sum_{r=0}^{k}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r}\binom{4k+2}{2p_1+4r+1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r}{2p_2+4r-1}\cdots\\
&\qquad\cdots\sum_{p_{2r+1}=0}^{p_{2r}}\binom{2p_{2r}+2}{2p_{2r+1}+1}(\nu-1)^{2p_{2r+1}}
\end{aligned}\right\}\ IVb
$$

Il est évident que les formules III*a* et III*b* représentent la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n)^{2k+1}I_{\nu+2n}(x)$$

seulement à l'aide des fonctions $I_{\nu-1}(x)$ et $I_\nu(x)$, et les formules IV*a* et IV*b* seulement à l'aide des fonctions $I_{\nu-1}(x)$ et $I_{\nu-2}(x)$.

Remarque. Les formules précédentes sont déduites en appliquant seulement la propriété (2) des fonctions de BESSEL; alors il est évident que dans ces formules les fonctions de BESSEL peuvent être remplacées par toute fonction cylindrique qui satisfait à la même propriété.

4. A cause des cas particuliers:

$$I_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \qquad \text{et} \qquad I_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

les formules III*a* et III*b* donnent pour $\nu=\frac{1}{2}$, de même les formules IV*a* et IV*b* pour $\nu=\frac{3}{2}$, les formules spéciales:

$$
\left.\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(2n+\tfrac{1}{2}\right)^{4k+1}I_{2n+\frac{1}{2}}(x)=\\
&=\sqrt{\frac{x}{2\pi}}\Big[\cos x\Big\{\frac{1}{2^{4k}}+\sum_{r=1}^{k}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r}\binom{4k}{2p_1+4r-1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r-2}{2p_2+4r-3}\cdots\\
&\qquad\cdots\sum_{p_{2r}=0}^{p_{2r-1}}\binom{2p_{2r-1}+2}{2p_{2r}+1}\frac{1}{2^{2p_{2r}}}\Big\}-\\
&-x\sin x\sum_{r=0}^{k-1}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r-1}\binom{4k}{2p_1+4r+1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r}{2p_2+4r-1}\cdots\\
&\qquad\cdots\sum_{p_{2r+1}=0}^{p_{2r}}\binom{2p_{2r}+2}{2p_{2r+1}+1}\frac{1}{2^{2p_{2r+1}}}\Big]
\end{aligned}\right\}\ Va
$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(2n+\tfrac{1}{2}\right)^{4k+3} I_{2n+\frac{1}{2}}(x) = \\
&= \sqrt{\frac{x}{2\pi}}\Bigg[\cos x \Bigg\{\frac{1}{2^{4k+2}} + \sum_{r=1}^{k}(-x^2)^r \sum_{p_1=0}^{2k-2r+1}\binom{4k+2}{2p_1+4r-1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r-2}{2p_2+4r-3}\cdots \\
&\qquad\cdots\sum_{p_{2r}=0}^{p_{2r-1}}\binom{2p_{2r-1}+2}{2p_{2r}+1}\frac{1}{2^{2p_{2r}}}\Bigg\} - \\
&- x\sin x \sum_{r=0}^{k}(-x^2)^r \sum_{p_1=0}^{2k-2r}\binom{4k+2}{2p_1+4r+1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r}{2p_2+4r-1}\cdots \\
&\qquad\cdots\sum_{p_{2r+1}=0}^{p_{2r}}\binom{2p_{2r}+2}{2p_{2r+1}+1}\frac{1}{2^{2p_{2r+1}}}\Bigg]
\end{aligned} \tag{Vb}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(2n+\tfrac{3}{2}\right)^{4k+1} I_{2n+\frac{3}{2}}(x) = \\
&= \sqrt{\frac{x}{2\pi}}\Bigg[\sin x \Bigg\{\frac{1}{2^{4k}} + \sum_{r=1}^{k}(-x^2)^r \sum_{p_1=0}^{2k-2r}\binom{4k}{2p_1+4r-1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r-2}{2p_2+4r-3}\cdots \\
&\qquad\cdots\sum_{p_{2r}=0}^{p_{2r-1}}\binom{2p_{2r-1}+2}{2p_{2r}+1}\frac{1}{2^{2p_{2r}}}\Bigg\} + \\
&+ x\cos x \sum_{r=0}^{k-1}(-x^2)^r \sum_{p_1=0}^{2k-2r-1}\binom{4k}{2p_1+4r+1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r}{2p_2+4r-1}\cdots \\
&\qquad\cdots\sum_{p_{2r+1}=0}^{p_{2r}}\binom{2p_{2r}+2}{2p_{2r+1}+1}\frac{1}{2^{2p_{2r+1}}}\Bigg]
\end{aligned} \tag{VIa}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(2n+\tfrac{3}{2}\right)^{4k+3} I_{2n+\frac{3}{2}}(x) = \\
&= \sqrt{\frac{x}{2\pi}}\Bigg[\sin x \Bigg\{\frac{1}{2^{4k+2}} + \sum_{r=1}^{k}(-x^2)^r \sum_{p_1=0}^{2k-2r+1}\binom{4k+2}{2p_1+4r-1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r-2}{2p_2+4r-3}\cdots \\
&\qquad\cdots\sum_{p_{2r}+0}^{p_{2r-1}}\binom{2p_{2r-1}+2}{2p_{2r}+1}\frac{1}{2^{2p_{2r}}}\Bigg\} + \\
&+ x\cos x \sum_{r=0}^{k}(-x^2)^r \sum_{p_1=0}^{2k-2r}\binom{4k+2}{2p_1+4r+1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r}{2p_2+4r-1}\cdots \\
&\qquad\cdots\sum_{p_{2r+1}=0}^{p_{2r}}\binom{2p_{2r}+2}{2p_{2r+1}+1}\frac{1}{2^{2p_{2r+1}}}\Bigg].
\end{aligned} \tag{VIb}$$