Mathematics. — *Ueber die Existenz der Eigenfunktionen eines symmetrisierbaren Kernes.* Von A. C. ZAANEN. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of November 28, 1942.)

1. Einleitung.

Herr O. D. KELLOGG hat einen eleganten Beweis dafür gegeben, dass jeder symmetrische Kern $K(s,t)$ $(a \leq s, t \leq b)$ mindestens einen Eigenwert besitzt [1]). Es wurde dabei von $K(s,t)$ ausser der Symmetrie noch vorausgesetzt, dass $\int K^2(s,t)dt \neq 0$ [2]) und $\leq B^2$ und dass bei jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ zu finden sei, sodass

$$\left| \int [K(s_1, t) - K(s_2, t)]\, \psi(t)\, dt \right| < \varepsilon$$

gilt für $|s_1 - s_2| < \delta$, wenn $\psi(t)$ eine normierte, aber übrigens willkürliche kwadratisch integrierbare Funktion ist.

Nehmen wir an, dass $K(s,t)$ in s (und also auch in t) kwadratisch integrierbar ist und dass

$$\lim_{s_1 \to s_2} \int [K(s_1, t) - K(s_2, t)]^2\, dt = 0$$

ist, so genügt dieser Kern den obengenannten Bedingungen.

Wir werden jetzt zeigen, dass die Beweismethode sich ausbreiten lässt auf einige Kerne, die nicht länger symmetrisch zu sein brauchen, sondern gehören zur Klasse der sog. symmetrisierbaren Kerne. Um zu definieren, was ein symmetrisierbarer Kern ist, erinnern wir daran, dass ein symmetrischer Kern $H(s,t)$ positiv-definit genannt wird, wenn

$$\iint H(s,t)\, f(s)\, f(t)\, ds\, dt \geq 0$$

ist für jedes kwadratisch integrierbare $f(s)$. Gibt es nun ein symmetrisches und positiv-definites $H(s,t)$, sodass

$$P(s,t) = \int H(s,\tau)\, K(\tau, t)\, d\tau \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

symmetrisch ist, so heisst $K(s,t)$ (links-) symmetrisierbar.

Zu den wichtigsten Beispielen gehören

$$1^0. \qquad K(s,t) = A(s)\, H(s,t), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

wobei $A(s)$ messbar und beschränkt, $H(s,t)$ symmetrisch und positiv-definit ist. Dieser Kern gibt Anlass zu einer sog. Integralgleichung dritter Art.

$$2^0. \qquad K(s,t) = \int A(s,\tau)\, H(\tau, t)\, d\tau, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

wobei $A(s,t)$ symmetrisch, $H(s,t)$ wieder symmetrisch und positiv-definit ist.

Man sieht sofort ein, dass in beiden Fällen die durch (1) definierte Funktion $P(s,t)$ wirklich symmetrisch ist.

---

1) O. D. KELLOGG, On the existence and closure of sets of characteristic functions, Math. Annalen 86 (1922), S. 14—17.

2) Jedes Integral, bei dem keine Grenzen angeschrieben sind, ist als $\int_a^b$ zu lesen.

Im Folgenden werden wir noch die Voraussetzung machen, dass aus

$$\int H(s,t)\, f(t)\, dt \equiv 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

für ein stetiges $f(t)$ folgt

$$\int K(s,t)\, f(t)\, dt \equiv 0.$$

Ist $H(s,t)$ abgeschlossen, d.h. hat (4) $f(t) \equiv 0$ zur Folge, so genügt $K(s,t)$ automatisch dieser Bedingung. Dasselbe gilt, wenn $K(s,t)$ durch (2) oder (3) definiert ist. Wir werden beweisen, dass nun $K(s,t)$ immer einen Eigenwert besitzt, d.h. also, dass es eine (reelle) Zahl λ gibt, wofür

$$\varphi(s) = \lambda \int K(s,t)\, \varphi(t)\, dt$$

eine nicht identisch verschwindende Lösung $\varphi(s)$ hat.

Wir verwenden die Bezeichnungen

$$(f,g) = \int f(s)\, g(s)\, ds$$

$$H f = \int H(s,t)\, f(t)\, dt, \qquad K f = \int K(s,t)\, f(t)\, dt,$$

$$P f = \int P(s,t)\, f(t)\, dt, \qquad K^* f = \int K(t,s)\, f(t)\, dt,$$

$$\| f \|^2 = (Hf, f) \quad , \qquad ||| f |||^2 = (f, f) \quad .$$

Die Symmetrie von H und P wird dadurch zum Ausdruck gebracht, dass $(Hf, g) = (f, Hg)$ und $(Pf, g) = (f, Pg)$. Die gemachte Voraussetzung über H und K lässt sich jetzt so formulieren: Aus $Hf = 0$ für ein stetiges f folgt $Kf = 0$.

2. Vorbereitungen.

Um den Beweis nicht zu unterbrechen, lassen wir einige Bemerkungen vorangehen.

1°. Eine abzählbar unendliche Folge $\{f_n(s)\}$ heisst gleichgradig stetig, wenn bei jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ zu finden ist, sodass $| f_n(s_1) - f_n(s_2) | < \varepsilon$ gilt für alle n, wenn nur s_1 und s_2 im Intervall $a \leq s \leq b$ liegen und $| s_1 - s_2 | < \delta$ ist. Ist die Folge auch noch gleichmässig beschränkt, so enthält sie eine gleichmässig konvergente Teilfolge (Satz von ARZELÀ).

2°. Von den Kernen $H(s,t)$ und $K(s,t)$ wollen wir (abgesehen von dem Fall, wo $K(s,t)$ durch (2) definiert ist) voraussetzen, dass sie in s und t kwadratisch integrierbar sind und dass

$$\int K^2(t,s)\, dt \leq B^2,$$

$$\lim_{s_1 \to s_2} \int [H(s_1,t) - H(s_2,t)]^2\, dt = 0, \qquad \lim_{s_1 \to s_2} \int [K(s_1,t) - K(s_2,t)]^2\, dt = 0$$

ist. Es ist leicht einzusehen, dass dann $\int H^2(s,t)dt$ und $\int K^2(s,t)dt$ stetig, also beschränkt sind. Sind für die Folge $\{f_n(s)\}$ die Normen $||| f_n ||| = (f_n, f_n)^{\frac{1}{2}}$ beschränkt, so ist die Folge $\{g_n(s)\}$, wobei $g_n = Hf_n$, gleichmässig beschränkt und gleichgradig stetig, wie eine Anwendung der SCHWARZschen Ungleichung sofort erkennen lässt; sie enthält also nach dem Satz von ARZELÀ eine gleichmässig konvergente Teilfolge $\{g_j(s)\}$ $(j = n_1, n_2, \ldots)$. Wenn $K(s,t)$ statt $H(s,t)$ eingesetzt wird, so gilt dasselbe, auch noch in dem Sonderfall $K(s,t) = A(s)\, H(s,t)$. Ist nämlich $\{g_j(s)\}$ die Teilfolge aus $\{g_n(s)\}$, worüber schon gesprochen wurde, so konvergiert auch $\{A(s) g_j(s) = Kf_j\}$ wegen der Beschränktheit von $A(s)$ gleichmässig.

3°. Ist $\{\lambda_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ die Folge der Eigenwerte eines symmetrischen, positiv-definiten Kernes $H(s, t)$, $\{\varphi_n(s)\}$ die Folge der zugehörigen normierten Eigenfunktionen, $f(s)$ eine kwadratisch integrierbare Funktion und $a_n = (f, \varphi_n)$ für alle n, so ist, wie bekannt

$$Hf = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^{-1} \varphi_n(s) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

und diese Reihe konvergiert gleichmässig. Also gilt

$$\| f \|^2 = (Hf, f) = \Sigma a_n^2 \lambda_n^{-1}.$$

Hieraus erkennt man, dass alle Eigenwerte positiv sind. Wir nehmen an, dass $0 < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots$.

4°. Ist $H_2(s, t) = \int H(s, \tau) H(\tau, t) d\tau$, so hat bekanntlich $H_2(s, t)$ die Eigenwerte λ_n^2 und dieselben Eigenfunktionen wie $H(s, t)$. Also ist

$$(H_2 f, f) = \Sigma a_n^2 \lambda_n^{-2} = \Sigma \lambda_n^{-1} a_n^2 \lambda_n^{-1} \leqq \lambda_1^{-1} \Sigma a_n^2 \lambda_n^{-1} = \lambda_1^{-1} \| f \|^2 \quad . \quad (6)$$

Weiter weisen wir daraufhin, dass aus $\| f \| \neq 0$ folgt $Hf \not\equiv 0$ und umgekehrt (denn $Hf \not\equiv 0$ hat wegen (5) zur Folge, dass nicht alle $a_n = 0$ sein können).

5°. Zum Schluss sei noch erwähnt, dass aus $\| f + \lambda g \| \leqq 0$ für jedes λ ein Analogon der SCHWARZschen Ungleichung folgt, nämlich

$$|(Hf, g)| \leqq \| f \| \cdot \| g \| \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

3. Der Beweis.

Wir nehmen an, dass für die in (1) definierte Funktion $P(s, t)$ gilt $\int P^2(s, t) dt \not\equiv 0$. Es gibt also ein s_0 mit $\int P(s_0, t) P(t, s_0) dt \neq 0$. Wenn s in einer Umgebung von s_0 liegt, ist mithin auch $\int P(s, t) P(t, s_0) dt \neq 0$. Setzen wir $P(t, s_0) = f_0(t)$, so haben wir damit eine kwadratisch integrierbare Funktion gefunden, wofür $Pf_0 \not\equiv 0$ ist. Aus $Pf_0 = HKf_0 = K^* Hf_0 \not\equiv 0$ folgt $Hf_0 \not\equiv 0$, also $\| f_0 \| \neq 0$ nach Bemerkung 4°.

Für $n = 0, 1, 2, \ldots$ setzen wir nun $f_{n+1} = K\bar{f}_n$, wobei $\bar{f}_n(s) = \| f_n \|^{-1} f_n(s)$. Soll diese Definition einen Sinn haben, so müssen wir zeigen, dass alle $\| f_n \| \neq 0$ sind. Für $\| f_0 \|$ ist das geschehen und $\| f_1 \| \neq 0$ ist eine Folge von $Hf_1 = HK\bar{f}_0 = P\bar{f}_0 \not\equiv 0$. Es sei also schon bewiesen, dass $\| f_i \| \neq 0$ sei für $i \leqq n$. Dann ist wegen der Symmetrie von $P(s, t)$ und (7)

$$\| f_n \| = (Hf_n, \bar{f}_n) = (HK\bar{f}_{n-1}, \bar{f}_n) = (P\bar{f}_{n-1}, \bar{f}_n) = (\bar{f}_{n-1}, P\bar{f}_n) = (\bar{f}_{n-1}, HK\bar{f}_n) =$$
$$= (\bar{f}_{n-1}, Hf_{n+1}) = (H\bar{f}_{n-1}, f_{n+1}) \leqq \| \bar{f}_{n-1} \| \cdot \| f_{n+1} \| = \| f_{n+1} \|.$$

Die Folge $\{\| f_n \|\}$ ist also nicht-abnehmend, sodass $\| f_n \| \neq 0$ allgemein gilt. Wir bemerken noch, dass sich

$$(Hf_{n-1}, f_{n+1}) = \| f_{n-1} \| \cdot \| f_n \| \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

ergibt aus der Gleichheit $\| f_n \| = (H\bar{f}_{n-1}, f_{n+1})$, die bei der soeben ausgeführten Berechnung auftrat.

Jetzt wollen wir zeigen, dass die Folge $\{\bar{f}_n(s)\}$ eine Teilfolge $\{\bar{f}_i(s)\}$ $(i = n_1, n_2, \ldots)$ von beschränkter Norm $|||\bar{f}_i|||$ enthält. Es ist nach (6)

$$||| H\bar{f}_n |||^2 = (H\bar{f}_n, H\bar{f}_n) = (H_2 \bar{f}_n, \bar{f}_n) \leqq \lambda_1^{-1} \| \bar{f}_n \|^2 = \lambda_1^{-1},$$

also

$$|g_{n+1}(s)|=|Hf_{n+1}|=|HK\bar{f}_n|=|K^*H\bar{f}_n|\leqq[\int K^2(t,s)\,dt]^{\frac{1}{2}}\,.\,|||H\bar{f}_n|||\leqq B\lambda_1^{-\frac{1}{2}}.$$

Die Folge $\{g_n(s)\}$ ist mithin gleichmässig beschränkt.

Nehmen wir nun an, dass jede Teilfolge aus $\{|||\bar{f}_n|||\}$ unbeschränkt sei, also $\lim\limits_{n\to\infty}|||\bar{f}_n|||=\infty$. Es gibt dann unendlich viele n, wofür $|||\bar{f}_{n+2}|||\geqq|||\bar{f}_n|||$; sonst gäbe es nämlich ein N, sodass für $n\geqq N$

$$|||\bar{f}_n|||<max\{|||\bar{f}_N|||,|||\bar{f}_{N+1}|||\},$$

also wäre $\{|||\bar{f}_n|||\}$ beschränkt.

Es sei also $\{|||\bar{f}_j|||\}$ eine Teilfolge mit $|||\bar{f}_{j+2}|||\geqq|||\bar{f}_j|||$. Nach Bemerkung 2°. enthält $\{|||\bar{f}_j|||^{-1}f_{j+1}(s)=K|||\bar{f}_j|||^{-1}\bar{f}_j\}$ eine Teilfolge $\{|||\bar{f}_k|||^{-1}f_{k+1}(s)\}$, die gleichmässig konvergiert gegen eine stetige Funktion $f(s)$. Es gilt

$$|||\bar{f}_k|||^{-1}g_{k+1}(s)=H|||\bar{f}_k|||^{-1}f_{k+1}$$

und aus der Beschränktheit der $g_{k+1}(s)$, zusammen mit $\lim\limits_{k\to\infty}|||\bar{f}_k|||=\infty$ folgt nun

$$0=Hf.$$

Weiter ist

$$|||\bar{f}_k|||^{-1}\,.\,||f_{k+1}||\,f_{k+2}(s)=K|||\bar{f}_k|||^{-1}f_{k+1},$$

also konvergiert $|||\bar{f}_k|||^{-1}\,.\,||f_{k+1}||\,f_{k+2}(s)$ gleichmässig gegen $g(s)=Kf$. Es ist $|||g|||\geqq||f_1||^2$ wegen $||f_n||\geqq||f_1||$ und $|||\bar{f}_{k+2}|||\geqq|||\bar{f}_k|||$, mithin $g(s)\neq 0$ entgegen unsrer Annahme, dass aus $Hf=0$ folgen würde $Kf=0$.

Es gibt also eine Teilfolge $\{\bar{f}_i(s)\}$ von beschränkter Norm $|||\bar{f}_i|||$. Wie Bemerkung 2°. lehrt, enthält dann $\{f_{i+1}(s)=K\bar{f}_i\}$ eine gleichmässig gegen eine Funktion $\alpha(s)$ konvergierende Teilfolge $\{f_l(s)\}$. Weiter ist die nicht abnehmende Folge $\{||f_n||\}$ nun gleichfalls beschränkt, also besteht

$$\lim_{n\to\infty}||f_n||=\lambda^{-1}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\qquad(9)$$

Man sieht leicht ein, dass wegen $\lim\limits_{l\to\infty}\bar{f}_l(s)=\lambda\alpha(s)$ auch die Teilfolgen $f_{l+1}(s)$ und $f_{l+2}(s)$ gleichmässig konvergieren. Es sei demzufolge

$$\lim_{l\to\infty}f_l(s)=\alpha(s),\quad\lim_{l\to\infty}f_{l+1}(s)=\beta(s),\quad\lim_{l\to\infty}f_{l+2}(s)=\gamma(s)\;.\;.\qquad(10)$$

Wir finden dann, unter Benutzung von (8) und (9)

$$||\alpha-\gamma||^2=\lim_{l\to\infty}||f_l-f_{l+2}||^2=\lim_{l\to\infty}[||f_l||^2-2(Hf_l,f_{l+2})+||f_{l+2}||^2]=$$

$$=\lim_{l\to\infty}[||f_l||^2-2\,||f_l||\,.\,||f_{l+1}||+||f_{l+2}||^2]=0,$$

also ist

$$H(\alpha-\gamma)=0,$$

mithin nach unsrer Annahme auch

$$K(\alpha-\gamma)=0.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\qquad(11)$$

Aus (9), (10) und (11) folgt jetzt

$$\beta(s) = \lambda K \gamma,$$
$$\gamma(s) = \lambda K \beta.$$

Hieraus ist aber sofort zu ersehen, dass $\beta(s) + \gamma(s)$ und $\beta(s) - \gamma(s)$ Eigenfunktionen von $K(s, t)$ sind, gehörend zu den Eigenwerten λ bezw. $-\lambda$. Wären beide $\equiv 0$, so wäre auch $\beta(s) \equiv 0$, entgegen $\| \beta \| = \lim\limits_{l \to \infty} \| f_{l+1} \| = \lambda^{-1}$.

Mindestens eine der Gleichungen

$$\varphi(s) = \lambda \int K(s, t)\, \varphi(t)\, dt,$$
$$\varphi(s) = -\lambda \int K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

hat also eine nicht identisch verschwindende Lösung $\varphi(s)$.

Wenn wir die so gefundende Eigenfunktion $\varphi_1(s)$ nennen, können wir uns die Frage vorlegen, ob ausser $\varphi_1(s)$ noch weitere Eigenfunktionen bestehen. Gibt es nun eine Funktion $g(s)$, wofür $Pg \not\equiv 0$ und $(H\varphi_1, g) = 0$ ist, so können wir, von dieser $g(s)$ ausgehend (sie übernimmt die Rolle von $f_0(s)$) in der schon gezeigten Weise eine zweite Eigenfunktion $\varphi_2(s)$ bekommen. $\varphi_2(s)$ ist von $\varphi_1(s)$ verschieden, denn $(H\varphi_1, \varphi_2) = 0$, wovon man sich leicht überzeugt. Gibt es dann noch eine $h(s)$ mit $Ph \not\equiv 0$, $(H\varphi_1, h) = (H\varphi_2, h) = 0$, so besteht eine dritte Eigenfunktion $\varphi_3(s)$. In dieser Weise können wir weitergehen.

Ist $\{\varphi_n(s)\}$ das vollständige System der Eigenfunktionen und ist $(H\varphi_n, \psi) = 0$ für eine Funktion $\psi(s)$ und alle n, so muss $P\psi \equiv 0$ sein, denn wäre $P\psi \not\equiv 0$, so gäbe es ausser den $\{\varphi_n(s)\}$ noch eine Eigenfunktion.