Mathematics. — *Extension d'une série des fonctions de* BESSEL, *due à* LOMMEL, *et de quelques séries des fonctions de* BESSEL *analogues*. II. By J. G. RUTGERS. (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN.)

(Communicated at the meeting of November 28, 1942.)

Pour $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$ on obtient de *Va*, *VIa*, *Vb* et *VIb* les formules particulières:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+\tfrac{1}{2}) I_{2n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \cos x, \quad \ldots \quad (12)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+\tfrac{3}{2}) I_{2n+\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \sin x, \quad \ldots \quad (13)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+\tfrac{1}{2})^3 I_{2n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{x}{2\pi}} (\tfrac{1}{4} \cos x - 2x \sin x), \quad \ldots \quad (14)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+\tfrac{3}{2})^3 I_{2n+\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{x}{2\pi}} (\tfrac{1}{4} \sin x + 2x \cos x), \quad \ldots \quad (15)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+\tfrac{1}{2})^5 I_{2n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \{ \tfrac{1}{16} (1-128x^2) \cos x - 5x \sin x \}, \quad (16)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+\tfrac{3}{2})^5 I_{2n+\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \{ \tfrac{1}{16} (1-128x^2) \sin x + 5x \cos x \}, \quad (17)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+\tfrac{1}{2})^7 I_{2n+\frac{1}{2}}(x) = \\ &\quad = \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \{ \tfrac{1}{64} (1-4480x^2) \cos x - \tfrac{1}{8} x (91-384x^2) \sin x \}, \end{aligned}\right\} (18)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+\tfrac{3}{2})^7 I_{2n+\frac{3}{2}}(x) = \\ &\quad = \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \{ \tfrac{1}{64} (1-4480x^2) \sin x + \tfrac{1}{8} x (91-384x^2) \cos x \}, \end{aligned}\right\} (19)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+\tfrac{1}{2})^9 I_{2n+\frac{1}{2}}(x) = \\ &= \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \{ \tfrac{1}{256} (1-123648x^2+98304x^4) \cos x - \tfrac{1}{8} x (205-8064x^2) \sin x \}, \end{aligned}\right\} (20)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+\tfrac{3}{2})^9 I_{2n+\frac{3}{2}}(x) = \\ &= \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \{ \tfrac{1}{256} (1-123648x^2+98304x^4) \sin x + \tfrac{1}{8} x (205-8064x^2) \cos x \}, \end{aligned}\right\} (21)$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,(2n+\tfrac{1}{2})^{11}\,I_{2n+\frac{1}{2}}(x) &= \\ = \sqrt{\frac{x}{2\pi}}\,\Big\{\tfrac{1}{1024}\,(1-3196160\,x^2+16220160\,x^4)\cos x&- \\ -\tfrac{1}{128}\,x\,(7381-1951488\,x^2+491520\,x^4)\sin x\Big\}&,\end{aligned}\right\}\quad(22)$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,(2n+\tfrac{3}{2})^{11}\,I_{2n+\frac{3}{2}}(x) &= \\ = \sqrt{\frac{x}{2\pi}}\,\Big\{\tfrac{1}{1024}\,(1-3196160\,x^2+16220160\,x^4)\sin x&+ \\ +\tfrac{1}{128}\,x\,(7381-1951488\,x^2+491520\,x^4)\cos x\Big\}&,\end{aligned}\right\}\quad(23)$$

5. Examinons maintenant pour ν arbitraire et k entier $\geqq 0$ la série:

$$S_{\nu,2k+2}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,(\nu+2n)^{2k+2}\,I_{\nu+2n}(x)\quad .\;.\;.\;.\quad(24)$$

En appliquant des réductions analogues à celles des §§ 1, 2 et 3, nous trouvons successivement les formules:

$$S_{\nu,2k+2}(x)=\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,(\nu+2n)^{2k+1}\,\{I_{\nu+2n-1}(x)+I_{\nu+2n+1}(x)\}=$$

$$=\nu^{2k+1}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)-\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\{(\nu+2n+2)^{2k+1}-(\nu+2n)^{2k+1}\}\,I_{\nu+2n+1}(x)=$$

$$=\nu^{2k+1}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)-\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{\nu+2n+1}(x)\sum_{p=0}^{2k+1}\binom{2k+1}{p}(\nu+2n+1)^p\{1+(-1)^p\}=$$

$$=\nu^{2k+1}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)-x\sum_{p_1=0}^{k}\binom{2k+1}{2p_1}S_{\nu+1,2p_1}(x),$$

resp.

$$S_{\nu,2k+2}(x)=(\nu-2)^{2k+1}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)+\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\{(\nu+2n)^{2k+1}-(\nu+2n-2)^{2k+1}\}\,I_{\nu+2n-1}(x)=$$

$$=(\nu-2)^{2k+1}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)+\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{\nu+2n-1}(x)\sum_{p=0}^{2k+1}\binom{2k+1}{p}(\nu+2n-1)^p\{1+(-1)^p\}=$$

$$=(\nu-2)^{2k+1}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)+x\sum_{p_1=0}^{k}\binom{2k+1}{2p_1}S_{\nu-1,2p_1}(x).$$

Sous la forme suivante on peut les regarder comme des formules récurrentes:

$$S_{\nu,2k+2}(x)=\nu^{2k+1}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)-x\,S_{\nu+1,0}(x)-x\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k+1}{2p_1+2}S_{\nu+1,2p_1+2}(x),\quad .\;.\;.\quad(25)$$

$$S_{\nu,2k+2}(x)=(\nu-2)^{2k+1}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)+x\,S_{\nu-1,0}(x)+x\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k+1}{2p_1+2}S_{\nu-1,2p_1+2}(x).\quad .\;.\quad(25')$$

Chacune d'elles peut servir pour la construction d'une formule générale, qui représente la somme de la série $S_{\nu,2k+2}(x)$ à l'aide des séries

$$S_{\nu+1,0}(x),\ S_{\nu+2,0}(x),\ \ldots\ S_{\nu+k+1,0}(x) \text{ resp. } S_{\nu-1,0}(x),\ S_{\nu-2,0}(x),\ \ldots\ S_{\nu-k-1,0}(x).$$

Nous les supprimons, car pour μ arbitraire il n'est pas possible de représenter la somme de la série $S_{\mu,0}(x)$ par une forme finie.

En combinant les formules (25) et (25'), comme (9) et (9') dans le paragraphe 3, nous trouvons les autres formules récurrentes:

$$\left.\begin{aligned} S_{\nu,2k+2}(x) &= \nu^{2k+1}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x) - x\,S_{\nu+1,0}(x) - \frac{x^2}{2}I_\nu(x)\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k+1}{2p_1+2}(\nu-1)^{2p_1+1} - \\ &- x^2 S_{\nu,0}(x)\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k+1}{2p_1+2} - x^2\sum_{p_1=0}^{k-2}\binom{2k+1}{2p_1+4}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+3}{2p_2+2}S_{\nu,2p_2+2}(x), \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

$$\left.\begin{aligned} S_{\nu,2k+2}(x) &= (\nu-2)^{2k+1}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x) + x\,S_{\nu-1,0}(x) + \frac{x^2}{2}I_{\nu-2}(x)\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k+1}{2p_1+2}(\nu-1)^{2p_1+1} - \\ &- x^2 S_{\nu,0}(x)\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k+1}{2p_1+2} - x^2\sum_{p_1=0}^{k-2}\binom{2k+1}{2p_1+4}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+3}{2p_2+2}S_{\nu,2p_2+2}(x) \end{aligned}\right\} \quad (26')$$

De chacune de ces formules on peut déduire une formule générale qui représente la somme de la série $S_{\nu,2k+2}(x)$ seulement à l'aide des séries $S_{\nu+1,0}(x)$ et $S_{\nu,0}(x)$ resp. $S_{\nu-1,0}(x)$ et $S_{\nu,0}(x)$; aussi celles-ci nous supprimons pour le même motif.

Il est bien possible de représenter la somme de la série $S_{\mu,0}(x)$ pour μ entier par une forme finie en vertu des formules connues:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{2n}(x) = \tfrac{1}{2}\{\cos x + I_0(x)\} \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{2n+1}(x) = \tfrac{1}{2}\sin x,$$

des quelles on déduit entre autres:

$$S_{1,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{2n+1}(x) = \tfrac{1}{2}\sin x$$

et

$$S_{2,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{2n+2}(x) = I_0(x) - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{2n}(x) = \tfrac{1}{2}\{I_0(x) - \cos x\}.$$

Au moyen de celles-ci suivent de (26) pour $\nu = 1$ et de (26') pour $\nu = 2$ après une légère réduction les formules récurrentes spéciales:

$$S_{1,2k+2}(x) = \frac{x}{2}\cos x - \frac{x^2}{2}\sin x\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k+1}{2p_1+2} - x^2\sum_{p_1=0}^{k-2}\binom{2k+1}{2p_1+4}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+3}{2p_2+2}S_{1,2p_2+2}(x), \quad (27)$$

$$S_{2,2k+2}(x) = \frac{x}{2}\sin x + \frac{x^2}{2}\cos x\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k+1}{2p_1+2} - x^2\sum_{p_1=0}^{k-2}\binom{2k+1}{2p_1+4}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+3}{2p_2+2}S_{2,2p_2+2}(x), \quad (27')$$

des quelles nous déduisons, en faisant différence entre k pair et k impair, les formules générales:

$$\left.\begin{aligned} &S_{1,4k+2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^{4k+2}I_{2n+1}(x) = \\ &= \frac{x}{2}\Bigg[\cos x\Bigg\{1 + \sum_{r=1}^{k}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r}\binom{4k+1}{2p_1+4r}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r-1}{2p_2+4r-2}\cdots\sum_{p_{2r}=0}^{p_{2r-1}}\binom{2p_{2r-1}+3}{2p_{2r}+2}\Bigg\} - \\ &- x\sin x\sum_{r=0}^{k-1}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r-1}\binom{4k+1}{2p_1+4r+2}\sum_{p_1=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r+1}{2p_2+4r}\cdots\sum_{p_{2r+1}=0}^{p_{2r}}\binom{2p_{2r}+3}{2p_{2r+1}+2}\Bigg] \end{aligned}\right\} \quad VIIa$$

$$\left.\begin{aligned}
&S_{1,4k+4}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^{4k+4}I_{2n+1}(x)=\\
&=\frac{x}{2}\left[\cos x\left\{1+\sum_{r=1}^{k}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r+1}\binom{4k+3}{2p_1+4r}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r-1}{2p_2+4r-2}\cdots\sum_{p_{2r}=0}^{p_{2r-1}}\binom{2p_{2r-1}+3}{2p_{2r}+2}\right\}-\right.\\
&\left.-x\sin x\sum_{r=0}^{k}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r}\binom{4k+3}{2p_1+4r+2}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r+1}{2p_2+4r}\cdots\sum_{p_{2r+1}=0}^{p_{2r}}\binom{2p_{2r}+3}{2p_{2r+1}+2}\right]
\end{aligned}\right\}\ VIIb$$

$$\left.\begin{aligned}
&S_{2,4k+2}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n)\,2n+2)^{4k+2}I_{2n+2}(x)=\\
&=\frac{x}{2}\left[\sin x\left\{1+\sum_{r=1}^{k}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r}\binom{4k+1}{2p_1+4r}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r-1}{2p_2+4r-2}\cdots\sum_{p_{2r}=0}^{p_{2r-1}}\binom{2p_{2r-1}+3}{2p_{2r}+2}\right\}+\right.\\
&\left.+x\cos x\sum_{r=0}^{k-1}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r-1}\binom{4k+1}{2p_1+4r+2}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r+1}{2p_2+4r}\cdots\sum_{p_{2r+1}=0}^{p_{2r}}\binom{2p_{2r}+3}{2p_{2r+1}+2}\right]
\end{aligned}\right\}\ VIIIa$$

$$\left.\begin{aligned}
&S_{2,4k+4}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+2)^{4k+4}I_{2n+2}(x)=\\
&=\frac{x}{2}\left[\sin x\left\{1+\sum_{r=1}^{k}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r+1}\binom{4k+3}{2p_1+4r}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r-1}{2p_2+4r-2}\cdots\sum_{p_{2r}=0}^{p_{2r-1}}\binom{2p_{2r-1}+3}{2p_{2r}+2}\right\}+\right.\\
&\left.+x\cos x\sum_{r=0}^{k}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r}\binom{4k+3}{2p_1+4r+2}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r+1}{2p_2+4r}\cdots\sum_{p_{2r+1}=0}^{p_{2r}}\binom{2p_{2r}+3}{2p_{2r+1}+2}\right]
\end{aligned}\right\}\ VIIIb$$

Pour $k=0$, $k=1$ et $k=2$ on obtient les formules particulières:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^2I_{2n+1}(x)=\frac{x}{2}\cos x,\quad\ldots\ldots\quad(28)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+2)^2I_{2n+2}(x)=\frac{x}{2}\sin x,\quad\ldots\ldots\quad(29)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^4I_{2n+1}(x)=\frac{x}{2}(\cos x-3x\sin x),\quad\ldots\ldots\quad(30)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+2)^4I_{2n+2}(x)=\frac{x}{2}(\sin x+3x\cos x),\quad\ldots\ldots\quad(31)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^6I_{2n+1}(x)=\frac{x}{2}\{(1-15x^2)\cos x-15x\sin x\},\quad\ldots\quad(32)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+2)^6I_{2n+2}(x)=\frac{x}{2}\{(1-15x^2)\sin x+15x\cos x\},\quad\ldots\quad(33)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^8I_{2n+1}(x)=\frac{x}{2}\{(1-210x^2)\cos x-x(63-105x^2)\sin x\},\quad(34)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+2)^8I_{2n+2}(x)=\frac{x}{2}\{(1-210x^2)\sin x+x(63-105x^2)\cos x\},\quad(35)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^{10}I_{2n+1}(x)=$$

$$=\frac{x}{2}\{(1-2205x^2+945x^4)\cos x-x(255-3150x^2)\sin x\}. \quad (36)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+2)^{10}I_{2n+2}(x)=$$

$$=\frac{x}{2}\{(1-2205x^2+945x^4)\sin x+x(255-3150x^2)\cos x\}. \quad (37)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^{12}I_{2n+1}(x)=$$

$$=\frac{x}{2}\{(1-21120x^2+51975x^4)\cos x-x(1023-41580x^2+10395x^4)\sin x\}. \quad (38)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+2)^{12}I_{2n+2}(x)=$$

$$=\frac{x}{2}\{(1-21120x^2+51975x^4)\sin x+x(1023-41580x^2+10395x^4)\cos x\}. \quad (39)$$

6. Ensuite nous examinons pour ν arbitraire et k entier $\geqq 0$ la série:

$$S'_{\nu,k}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(\nu+2n)^k I_{\nu+2n}(x). \quad \ldots\ldots \quad (40)$$

En faisant différence entre k pair et k impair nous trouvons, en appliquant la méthode des paragraphes précédents, les formules:

$$S'_{\nu,2k+1}(x)=\nu^{2k}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)+xS'_{\nu+1,0}(x)+x\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+2}S'_{\nu+1,2p_1+2}(x), \quad (41)$$

$$S'_{\nu,2k+2}(x)=-(\nu-2)^{2k+1}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)+x\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k+1}{2p_1+1}S'_{\nu-1,2p_1+1}(x), \quad . \quad (41')$$

qui combinées conduisent aux formules récurrentes, que nous supprimons, parce que pour μ arbitraire la somme de la série $S_{\mu,0}(x)$ ne peut pas être représentée par une forme finie. Cela est bien possible dans le cas où μ est entier en vertu de la formule connue:

$$\sum_{n=0}^{\infty}I_{2n}(x)=\tfrac{1}{2}\{1+I_0(x)\},$$

de laquelle on déduit entre autres:

$$S'_{2,0}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}I_{2n+2}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}I_{2n}(x)-I_0(x)=\tfrac{1}{2}\{1-I_0(x)\}. \quad . \quad (42)$$

Posons dans (41) $\nu=1$ et dans (41′) $\nu=2$, nous trouvons selon (42) les formules spéciales:

$$S'_{1,2k+1}(x)=\frac{x}{2}\left\{1+2\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+2}S'_{2,2p_1+2}(x)\right., \quad \ldots \quad (43)$$

$$S'_{2,2k+2}(x)=x\sum_{p_1=0}^{k}\binom{2k+1}{2p_1+1}S'_{1,2p_1+1}(x). \quad \ldots\ldots \quad (43')$$

En combinant ces deux formules à la méthode analogue à celle des paragraphes précédents, on obtient les formules récurrentes:

$$S'_{1,2k+1}(x)=\frac{x}{2}\left\{1+2x\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+2}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+1}{2p_2+1}S'_{1,2p_2+1}(x)\right\}, \quad (44)$$

$$S'_{2,2k+2}(x)=\frac{x^2}{2}\left\{\sum_{p_1=0}^{k}\binom{2k+1}{2p_1+1}+2\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k+1}{2p_1+3}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+2}{2p_2+2}S'_{2,2p_2+2}(x)\right\}. \quad (44')$$

De ces formules on déduit ensuite les formules générales:

$$\left.\begin{aligned}S'_{1,2k+1}(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^{2k+1}I_{2n+1}(x)=\\&=\frac{x}{2}\left\{1+\sum_{r=1}^{k}x^{2r}\sum_{p_1=0}^{k-r}\binom{2k}{2p_1+2r}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+2r-1}{2p_2+2r-1}\cdots\sum_{p_{2r}=0}^{p_{2r-1}}\binom{2p_{2r-1}+1}{2p_{2r}+1}\right\}\end{aligned}\right\} IX$$

$$\left.\begin{aligned}S'_{2,2k+2}(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+2)^{2k+2}I_{2n+2}(x)=\\&=\frac{x^2}{2}\sum_{r=0}^{k}x^{2r}\sum_{p_1=0}^{k-r}\binom{2k+1}{2p_1+2r+1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+2r}{2p_2+2r}\cdots\sum_{p_{2r+1}=0}^{p_{2r}}\binom{2p_{2r}+1}{2p_{2r+1}+1}\end{aligned}\right\} X$$

Il est évident que les formules IX et X représentent la somme des séries

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^{2k+1}I_{2n+1}(x) \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty}(2n+2)^{2k+2}(x)$$

par une forme finie et bien par une polynôme de x du degré $2k+1$ resp. $2k+2$, dont les puissances de x sont impaires resp. paires.

On peut aussi, d'après un théorème de CAUCHY, développer en séries de puissances de x les membres gauches de IX et X, ainsi:

$$\left.\begin{aligned}S'_{1,2k+1}(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^{2k+1}I_{2n+1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^{2k+1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+2n+1}}{m!\,(m+2n+1)!}=\\&=\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+1}\sum_{p=0}^{r}\frac{(-1)^p(2r-2p+1)^{2k+1}}{p!\,(2r-p+1)!},\end{aligned}\right\} (45)$$

et

$$\left.\begin{aligned}S'_{2,2k+2}(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+2)^{2k+2}I_{2n+2}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+2)^{2k+2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+2n+2}}{m!\,(m+2n+2)!}=\\&=\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+2}\sum_{p=0}^{r}\frac{(-1)^p(2r-2p+2)^{2k+2}}{p!\,(2r-p+2)!}.\end{aligned}\right\} (46)$$

L'égalisation des coëfficients de puissances homologues de x dans les deux membres de IX et X conduit aux identités importantes:

$$\sum_{p=0}^{r}\frac{(-1)^p(2r-2p+1)^{2k+1}}{p!\,(2r-p+1)!}=2^{2r}\sum_{p_1=0}^{k-r}\binom{2k}{2p_1+2r}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+2r-1}{2p_2+2r-1}\cdots\sum_{p_{2r}=0}^{p_{2r-1}}\binom{2p_{2r-1}+1}{2p_{2r}+1}, \quad (47)$$

donc en particulier $= 0$ pour $r > k$;

$$\sum_{p=0}^{r} \frac{(-1)^p (2r-2p+2)^{2k+2}}{p!(2r-p+2)!} = 2^{2r+1} \sum_{p_1=0}^{k-r} \binom{2k+1}{2p_1+2r+1} \sum_{p_2=0}^{p_1} \binom{2p_1+2r}{2p_2+2r} \cdots \sum_{p_{2r+1}=0}^{p_{2r}} \binom{2p_{2r}+1}{2p_{2r+1}+1}, \tag{48}$$

donc en particulier $= 0$ pour $r > k$.

De plus il est évident qu'on peut remplacer les formules IX et X par les autres:

$$S'_{1,2k+1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{2k+1} I_{2n+1}(x) = \sum_{r=0}^{k} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+1} \sum_{p=0}^{r} \frac{(-1)^p (2r-2p+1)^{2k+1}}{p!(2r-p+1)!}, \qquad IX'$$

$$S'_{2,2k+2}(x) = \sum_{n-0}^{\infty} (2n+2)^{2k+2} I_{2n+2}(x) = \sum_{r=0}^{k} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+2} \sum_{p=0}^{r} \frac{(-1)^p (2r-2p+2)^{2k+2}}{p!(2r-p+2)!}. \qquad X'$$

Les substituons $k = 0, 1, 2, \ldots 5$ dans IX et X ou dans IX' et X' donnent les formules particulières:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) I_{2n+1}(x) = \frac{x}{2}, \tag{49}$$

$$\sum_{n-0}^{\infty} (2n+2)^2 I_{2n+2}(x) = \frac{x^2}{2}, \tag{50}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^3 I_{2n+1}(x) = \frac{x}{2}(1+x^2), \tag{51}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+2)^4 I_{2n+2}(x) = \frac{x^2}{2}(4+x^2), \tag{52}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^5 I_{2n+1}(x) = \frac{x}{2}(1+10x^2+x^4), \tag{53}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+2)^6 I_{2n+2}(x) = \frac{x^2}{2}(16+20x^2+x^4), \tag{54}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^7 I_{2n+1}(x) = \frac{x}{2}(1+91x^2+35x^4+x^6), \tag{55}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+2)^8 I_{2n+2}(x) = \frac{x^2}{2}(64+336x^2+56x^4+x^6), \tag{56}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^9 I_{2n+1}(x) = \frac{x}{2}(1+820x^2+966x^4+84x^6+x^8), \tag{57}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+2)^{10} I_{2n+2}(x) = \frac{x^2}{2}(256+5440x^2+23522x^4+120x^6+x^8), \tag{58}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{11} I_{2n+1}(x) = \frac{x}{2}(1+7381x^2+24970x^4+5082x^6+165x^8+x^{10}), \tag{59}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+2)^{12} I_{2n+2}(x) = \frac{x^2}{2}(1024+87296x^2+90112x^4+10032x^6+220x^8+x^{10}). \tag{60}$$
