Mathematics. — *Over de oplossingen van de vergelijking $\triangle^{\nu} u = 0$, die aan zekere randvoorwaarden voldoen.* I. By O. BOTTEMA and H. BREMEKAMP. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of March 30, 1946.)

In een vroegere mededeeling [1]) heeft de tweede van ons de oplossing der vergelijking $\triangle\triangle u = 0$, waarbij, als $\triangle$ een symbool in twee veranderlijke voorstelt, in de punten van een gegeven gesloten kromme, of als $\triangle$ een symbool in drie veranderlijken voorstelt, in de punten van een gegeven gesloten oppervlak, u en $\frac{\partial u}{\partial n}$ gegeven waarden aannemen, behandeld met behulp van functies van GREEN, waarbij in het gebied binnen die kromme of binnen dat oppervlak die oplossing wordt voorgesteld door een integraal over die gegeven kromme of dat gegeven oppervlak en voor de gevallen, dat de gegeven kromme een cirkel of het gegeven oppervlak een bol is, de uitdrukking van die functies van GREEN gegeven en zoo voor u integralen afgeleid, die men kan opvatten als uitbreidingen van de uit de potentiaaltheorie bekende integraal van POISSON. Tevens werd het bewijs geleverd, dat deze integralen aan alle eischen van het gestelde vraagstuk voldoen.

Wij stellen ons thans voor, aan die uitkomsten in twee richtingen een uitbreiding te geven. In de eerste plaats willen we voor willekeurige waarden van ν de functie van GREEN H_{ν}, behoorende bij de vergelijking $\triangle^{\nu} u = 0$, zoodanig dat

$$\left.\begin{aligned} 2^{2\nu-1}(\nu-1)!^2 \pi u = \int \Bigg(u \frac{\partial \triangle^{\nu-1} H_{\nu}}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} \triangle^{\nu-1} H_{\nu} + \\ + \triangle u \frac{\partial \triangle^{\nu-2} H_{\nu}}{\partial n} \dots \Bigg) ds \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

de oplossing levert, waarbij aan de gegeven gesloten kromme $u, \frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \dots \frac{\partial^{\nu} u}{\partial n^{\nu}}$ gegeven waarden aannemen, opstellen voor het geval, dat die kromme een cirkel is. Opgemerkt zij nog, dat in de formule (1) voor het geval, dat ν een even getal is, $\nu = 2\mu$, de laatste term binnen de haakjes in de integrand in het tweede lid is $-\frac{\partial \triangle^{\mu-1} u}{\partial n} \triangle^{\mu} H_{\nu}$ en voor het geval, dat ν oneven is, $\nu = 2\mu + 1$, $\triangle^{\mu} u \frac{\partial \triangle^{\mu} H_{\nu}}{\partial n}$ en dat de formule onveranderd doorgaat voor het analoge probleem in drie afmetingen, als men de integraal in het tweede lid opvat als een integraal over het oppervlak, dat in dat

[1]) H. BREMEKAMP, Over de oplossingen der vergelijking $\triangle\triangle u = 0$ die aan zekere randvoorwaarden voldoen. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **49**, 319 (1946).

Vgl. ook E. ALMANSI, Sull' integrazione dell' Equazione $\triangle^{2n} = 0$. Annali di Matematica, Serie IIa, Tomo II°, 1899.

geval de gegevens draagt. Voor het geval, dat dat oppervlak een bol is, willen we ook bij die opvatting van het symbool $\triangle$ de uitdrukking voor H_ν voor willekeurige waarden van ν opstellen.

In de tweede plaats willen we de analoge problemen behandelen voor het geval, dat $\triangle$ een symbool in k veranderlijken beteekent en de figuur, die de gegevens draagt, een hyperspheer is.

In al die gevallen is de functie $H_\nu(P, Q)$, waarbij P en Q willekeurige punten zijn binnen de figuur, die de gegevens draagt, door de volgende eischen gedefinieerd:

1. als $P \neq Q$, geldt $\triangle^\nu H_\nu = 0$.
2. als P gaat naar eenig punt van de figuur, die de gegevens draagt, gaan
$$H_\nu, \frac{\partial H_\nu}{\partial n}, \frac{\partial^2 H_\nu}{\partial n^2} \cdots \frac{\partial^\nu H_\nu}{\partial n^\nu}$$
naar nul,
3. als men stelt $H_\nu(P, Q) = \varphi_\nu(\varrho) + h_\nu(P, Q)$, waarbij ϱ den afstand PQ voorstelt en $u = \varphi_\nu(\varrho)$ een nog nader te bespreken oplossing der vergelijking $\triangle^\nu u = 0$ is, die niet aan een vergelijking van denzelfden vorm van lagere orde voldoet, dan heeft $h_\nu(P, Q)$ doorloopende partieele afgeleiden tot inclusief die van de orde 2ν en voldoet dus in het geheele gebied binnen de gegeven figuur aan $\triangle^\nu h_\nu = 0$.

De functie $H_\nu(P, Q)$ heeft een singulariteit voor $P = Q$, de functie wordt oneindig groot of althans haar afgeleiden van een bepaalde orde af. De aard van die singulariteit is bepaald door de functie $\varphi_\nu(\varrho)$. Als $\triangle$ het symbool in k onafhankelijk veranderlijken voorstelt, geldt voor een functie v, die alleen van ϱ afhangt $\triangle v = \dfrac{\triangle^2 v}{d\varrho^2} + \dfrac{k-1}{\varrho} \dfrac{dv}{d\varrho}$, als dus $\triangle v = 0$, kunnen wij, voor $k > 2$, voor v nemen $v = \dfrac{C}{\varrho^{k-2}}$ en voor $k = 2$, $v = C \ln \varrho$. Hieruit leiden we af, dat we, als k oneven is, kunnen nemen $\varphi_\nu = \dfrac{1}{\varrho^{k-2\nu}}$ en de zelfde formule geldt, als k even is en $2\nu < k$, voor $2\nu = k$ wordt $\varphi_\nu = \ln \varrho$, voor $2\nu > k$, $\varphi_\nu = \varrho^{2\nu-k} \ln \varrho$.

In verband met het logarithmisch karakter der singulariteit zijn verschillende problemen eenvoudiger voor een ruimte van een oneven aantal afmetingen, m.a.w. als $\triangle$ een symbool voor een oneven aantal onafhankelijk veranderlijken beteekent, dan voor een ruimte van een even aantal afmetingen. Wij zullen de functies H_3, H_4 enz. dan ook vooreerst bepalen in de ruimte van drie afmetingen voor het geval van den bol, vervolgens in het platte vlak voor het geval van den cirkel.

§ 1. De functie H_3 voor den bol (en evenzoo de verdere functies van GREEN) zullen we eenigszins probeerenderwijs opstellen. Wij steunen daarbij op de stelling [2]), dat de functie door de in de inleiding genoemde eischen

[2]) H. BREMEKAMP, Over de bepaaldheid der oplossingen van $\triangle^k u = 0$. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **48**, 222 (1945).

ondubbelzinnig bepaald is. Dat brengt mee, dat, wanneer we een functie verkregen hebben, van welke wij op de een of andere manier, b.v. eenvoudig door narekenen, kunnen vaststellen, dat zij aan die eischen voldoet, wij ook verzekerd zijn, dat dat *de* bedoelde functie van GREEN is. Verder maken wij gebruik van de eigenschap [3]), dat iedere functie u, die in zeker gebied aan de vergelijking $\triangle^3 u = 0$ voldoet, geschreven kan worden in de gedaante $u = u_0 + r^2 v_0$, waarbij in het beschouwde gebied $\triangle u_0 = 0$ en $\triangle^2 v_0 = 0$ en dat evenzoo iedere functie v_0, die in zeker gebied voldoet aan $\triangle^2 v_0 = 0$ geschreven kan worden in de gedaante $v_0 = u_1 + r^2 u_2$, waarbij in dat gebied $\triangle u_1 = \triangle u_2 = 0$; r beteekent hierbij den afstand tot een willekeurig punt; wij zullen deze stelling telkens toepassen voor het geval, dat voor dat punt de oorsprong van coördinaten wordt gekozen en dien leggen we in het middelpunt O van den bol. Ook geldt het omgekeerde van die stelling en daarop zullen we ons voor het bewijs, dat de opgestelde functie aan de eischen voldoet, moeten beroepen. Wij kunnen de stelling, die wij dan toepassen, als volgt formuleeren: „als $\triangle u_0 = \triangle u_1 = \triangle u_2 = 0$, en $u = u_0 + r^2 u_1 + r^4 u_2$, dan is $\triangle^3 u = 0$". Om nu de functie $H_3(P, Q)$ uit te drukken, noemen we $OP = r$, $OQ = a$, $\angle POQ = \vartheta$. Den straal van den bol noemen wij R. Wij bepalen het punt Q op de lijn OQ gelegen zoodanig, dat $OQ_1 = a_1 = \dfrac{R^2}{a}$. Den afstand PQ noemen we ϱ, den afstand PQ_1, ϱ_1. Voor punten P op den bol is, zooals welbekend, $a\varrho_1 = R\varrho$. Als oplossing van $\triangle u_2 = 0$, geldend binnen den bol, komt dan in de eerste plaats in aanmerking de functie $u_2 = \dfrac{1}{\varrho}$, als oplossing van $\triangle^2 v_1 = 0$, $v_1 = \varrho_1$, als oplossing van $\triangle^3 v = 0$, $v = \varrho_1^3$.

De bekende reciprociteitseigenschap der functie van GREEN $H_3(P, Q) = H_3(Q, P)$, die men bewijst met behulp van de formule (1), voert, als wij H_3 uitdrukken in r, a en ϑ, tot $H_3(r, a) = H_3(a, r)$. Ook daardoor zullen wij ons bij het opstellen der functie H_3 laten leiden. Wij merken daartoe nog op, dat ϱ in a en r symmetrisch is, want $\varrho^2 = a^2 + r^2 - 2\,a\,r \cos\vartheta$ en evenzoo $a\varrho_1$, want $\varrho_1^2 = a_1^2 + r^2 - 2\,a_1 r \cos\vartheta$ dus $a^2\varrho_1^2 = R^4 + a^2 r^2 - 2\,R^2 a\,r \cos\vartheta$.

De singulariteit der functie H_3 wordt gegeven door $\varphi_3 = \varrho^3$. Wij tellen hierbij vooreerst op $-\dfrac{a^3\varrho_1^3}{R^3}$, die binnen den bol voldoet aan $\triangle^3 u = 0$, en die maakt, dat $H_{3,1} = \varrho^3 - \dfrac{a^3\varrho_1^3}{R^3}$ aan den bol nul wordt. Vervolgens tellen wij een term op, die aan $\triangle^3 u = 0$ voldoet en aan den bol nul wordt en waarmee we willen bereiken, dat aan de voorwaarde $\dfrac{\partial H_3}{\partial r} = 0$ aan den bol voldaan wordt. Dat de bij te voegen term aan den bol nul wordt, bereiken we door dien een factor $R^2 - r^2$ te geven; om aan de symmetrie-eigenschap te blijven voldoen voegen we dan ook een factor $R^2 - a^2$ toe. De zoo

[3]) H. BREMEKAMP, Eigenschappen der oplossingen van $\triangle^k u = 0$. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 48, 229 (1945).

ontstaande term zal aan $\Delta^3 u = 0$ voldoen, ook nog als we vermenigvuldigen met een factor, die aan $\Delta^2 u = 0$ voldoet, waarvoor we kiezen $a\,\varrho_1$, waardoor ook de symmetrie in a en r gehandhaafd blijft; om een homogenen veelterm te krijgen, voegen we nog een factor R^{-3} toe. De functie

$$H_{3,2} = \varrho^3 - \frac{a^3 \varrho_1^3}{R^3} + C_1 \frac{(R^2-a^2)(R^2-r^2)}{R^3}\, a\,\varrho_1$$

voldoet dan aan $\Delta^3 H_{3,2} = 0$, aan den bol is $H_{3,2} = 0$ en wij trachten de constante C_1 zoo te bepalen, dat daar ook $\dfrac{\partial H_{3,2}}{\partial r} = 0$. Nu is

$$\varrho \frac{\partial \varrho}{\partial r} = r - a \cos \vartheta, \qquad \varrho \frac{\partial^2 \varrho}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial \varrho}{\partial r}\right)^2 = 1, \text{ dus}$$

$$\varrho^3 \frac{\partial^2 \varrho}{\partial r^2} = \varrho^2 - \varrho^2 \left(\frac{\partial \varrho}{\partial r}\right)^2 = \varrho^2 - (r - a\cos\vartheta)^2 = a^2 \sin^2 \vartheta,$$

$$\varrho_1 \frac{\partial \varrho_1}{\partial r} = r - a_1 \cos\vartheta = \frac{1}{a}(a r - R^2 \cos\vartheta), \qquad \varrho_1^3 \frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial r^2} = \frac{R^4}{a^2} \sin^2 \vartheta.$$

De voorwaarde $\dfrac{\partial H_{3,2}}{\partial r} = 0$ aan den bol geeft nu

$$3\varrho\,(R - a\cos\vartheta) - \frac{3a^2}{R^2}\varrho_1\,(a - R\cos\vartheta) = 2C_1 \frac{(R^2-a^2)}{R^2}\, a\varrho_1, \tag{2}$$

dus $C_1 = \frac{3}{2}$.

Om nu te bereiken, dat $\dfrac{\partial^2 H_3}{\partial r^2} = 0$ aan den bol, voegen we op gronden, geheel overeenkomende met die in de vorige alinea aangevoerd, nog een term toe $C_2 \dfrac{(R^2-a^2)^2 (R^2-r^2)^2}{R^3} \dfrac{1}{a\varrho_1}$.

Wij vinden dan aan den bol

$$\left.\begin{aligned} &3\varrho^2 \frac{\partial^2 \varrho}{\partial r^2} + 6\varrho \left(\frac{\partial \varrho}{\partial r}\right)^2 - \frac{3a^3}{R^3}\varrho_1^2 \frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial r^2} - \frac{6a^3}{R^3}\varrho_1 \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial r}\right)^2 - \\ &- \frac{4C_1 (R^2-a^2)}{R^2} a \frac{\partial \varrho_1}{\partial r} - \frac{2C_1(R^2-a^2)}{R^3} a\varrho_1 + 8C_2 \frac{(R^2-a^2)^2}{R}\frac{1}{a\varrho_1} = 0, \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

waaruit wij vinden $C_2 = -\frac{3}{8}$.

De gezochte functie van GREEN wordt dus

$$H_3 = \varrho^3 - \frac{a^3}{R^3}\varrho_1^3 + \frac{3}{2}\frac{(R^2-a^2)(R^2-r^2)}{R^3} a\varrho_1 - \frac{3}{8}\frac{(R^2-a^2)^2 (R^2-r^2)^2}{R^3}\frac{1}{a\varrho_1}. \tag{4}$$

Wanneer het alleen er om te doen is, de getallenwaarden der coëfficiënten C_1 en C_2 te vinden, kunnen wij volstaan met de vergelijking (3). Daarin bepalen we vooreerst C_1 zóó, dat het eerste lid deelbaar wordt door $(R^2 - a^2)^2$, waarna C_2 volgt evenals in het voorgaande. Voor het bewijs, dat de zoo geconstrueerde functie aan alle eischen voldoet, moet dan echter toch nog geverifiëerd worden, dat aan den bol ook $\frac{\partial H_3}{\partial r}=0$.

Wij zullen van de laatste opmerking gebruik maken bij het opstellen van de functie H_4 voor den bol. Op de zelfde manier als in het vorige komen we tot

$$H_4=\varrho^5-\frac{a^5}{R^5}\varrho_1^5+C_1\frac{(R^2-a^2)(R^2-r^2)}{R^5}a^3\varrho_1^3+$$

$$C_2\frac{(R^2-a^2)^2(R^2-r^2)^2}{R^5}a\varrho_1+C_3\frac{(R^2-a^2)^3(R^2-r^2)^3}{R^5}\frac{1}{a\varrho_1}.$$

Voor het berekenen van $\frac{\partial^3 H_4}{\partial r^3}$ hebben wij nog noodig de volgende uitkomsten:

$$\varrho^3\frac{\partial^2\varrho}{\partial r^2}=a^2\sin^2\vartheta, \qquad \varrho^3\frac{\partial^3\varrho}{\partial r^3}+3\varrho^2\frac{\partial\varrho}{\partial r}\frac{\partial^2\varrho}{\partial r^2}=0,$$

dus

$$\varrho^5\frac{\partial^3\varrho}{\partial r^3}=-3\varrho\frac{\partial\varrho}{\partial r}\varrho^3\frac{\partial^2\varrho}{\partial r^2}.$$

Dus aan den bol

$$\varrho^5\frac{\partial^3\varrho}{\partial r^3}=-3(R-a\cos\vartheta)a^2\sin^2\vartheta.$$

en

$$\varrho_1^5\frac{\partial^3\varrho_1}{\partial r^3}=-3\frac{R^5}{a^3}(a-R\cos\vartheta)\sin^2\vartheta.$$

Wij vinden dan aan het boloppervlak

$$\frac{\partial^3 H_4}{\partial r^3}=45\varrho^3\frac{\partial\varrho}{\partial r}\frac{\partial^2\varrho}{\partial r^2}+60\varrho^2\left(\frac{\partial\varrho}{\partial r}\right)^3-45\frac{a^5}{R^5}\varrho_1^3\frac{\partial\varrho_1}{\partial r}\frac{\partial^2\varrho_1}{\partial r^2}-60\frac{a^5}{R^5}\varrho_1^2\left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial r}\right)^3$$

$$-18C_1\frac{R^2-a^2}{R^4}a^3\left\{\varrho_1^2\frac{\partial^2\varrho_1}{\partial r^2}+2\varrho_1\left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial r}\right)^2\right\}-18C_1\frac{R^2-a^2}{R^5}a^3\varrho_1^2\frac{\partial\varrho_1}{\partial r}$$

$$+24C_2\frac{(R^2-a^2)^2}{R^3}a\frac{\partial\varrho_1}{\partial r}+24C_2\frac{(R^2-a^2)^2}{R^4}a\varrho_1-48C_3\frac{(R^2-a^2)^3}{R^2}\frac{1}{a\varrho_1}=0.$$

Dat geeft

$$\frac{15(R^2-a^2)}{aR^2\varrho_1}\{4R^4+a^2R^2(7+9\cos^2\vartheta)+4a^4-12R^3a\cos\vartheta-12Ra^3\cos\vartheta\}$$

$$-18C_1\frac{R^2-a^2}{aR^2\varrho_1}\{a^2R^2(2+3\cos^2\vartheta)+3a^4-R^3a\cos\vartheta-7Ra^3\cos\vartheta\}$$

$$+24C_2\frac{(R^2-a^2)^2}{aR^2\varrho_1}(R^2-3aR\cos\vartheta+2a^2)-48C_3\frac{(R^2-a^2)^3}{aR^2\varrho_1}=0.$$

Uit het feit, dat de som van de eerste twee termen door $(R^2 - a^2)^2$ deelbaar moet zijn, vindt men $C_1 = \frac{5}{2}$, vervolgens $C_2 = -\frac{15}{8}$ en $C_3 = \frac{5}{16}$ dus

$$\left.\begin{aligned} H_4 = \varrho^5 - \frac{a^5}{R^5}\varrho_1^5 + \frac{5}{2}\frac{(R^2-a^2)(R^2-r^2)}{R^5}a^3\varrho_1^3 - \\ \frac{15}{8}\frac{(R^2-a^2)^2(R^2-r^2)^2}{R^5}a\varrho_1 + \frac{5}{16}\frac{(R^2-a^2)^3(R^2-r^2)^3}{R^5}\frac{1}{a\varrho_1}. \end{aligned}\right\}. \quad (5)$$

Deze functie voldoet inderdaad aan alle gestelde eischen.

§ 2. Algemeen zal men voor den bol vinden

$$\left.\begin{aligned} H_\nu = \varrho^{2\nu-3} - \frac{a^{2\nu-3}}{R^{2\nu-3}}\varrho_1^{2\nu-3} + C_1\frac{(R^2-a^2)(R^2-r^2)}{R^{2\nu-3}}a^{2\nu-5}\varrho_1^{2\nu-5} + \\ + C_2\frac{(R^2-a^2)^2(R^2-r^2)^2}{R^{2\nu-3}}a^{2\nu-7}\varrho_1^{2\nu-7} + \ldots + C_{\nu-2}\frac{(R^2-a^2)^{\nu-2}(R^2-r^2)^{\nu-2}}{R^{2\nu-3}}a\varrho_1 + \\ + C_{\nu-1}\frac{(R^2-a^2)^{\nu-1}(R^2-r^2)^{\nu-1}}{R^{2\nu-3}}\frac{1}{a\varrho_1}, \end{aligned}\right\}. \quad (6)$$

waarbij de constanten $C_i\,(i = 1, \ldots \nu - 1)$ nog nader moeten worden bepaald. Staat eenmaal vast, dat de gevraagde functie inderdaad de gedaante (6) heeft, dan kunnen deze constanten als volgt worden berekend.

Nadert a tot nul, dan nadert ϱ_1 tot oneindig, met dien verstande, dat $a\varrho_1$ nadert tot de eindige limiet R^2, zooals uit de betrekking

$$a^2\varrho_1^2 = R^4 + a^2r^2 - 2R^2ar\cos\vartheta$$

dadelijk blijkt. Een uitdrukking $a^p\varrho_1^q$ nadert dus voor $a \to 0$ tot nul, als $p > q$ is.

Wij beschouwen nu $\frac{\partial^p H_\nu}{\partial r^p}$ op den bol; voor $p = 1, \ldots \nu - 1$ moet deze uitdrukking gelijk aan nul zijn. In de aldus verkregen vergelijkingen voor C_i stellen wij $a = 0$. Denken wij ons den term

$$\frac{d^p}{dr^p}(R^2-r^2)^q a^m \varrho_1^m,$$

(waarbij $2q + m = 2\nu - 3$ is) ontwikkeld volgens het theorema van LEIBNIZ, dan is hij na den limietovergang $a \to 0$ blijkbaar gelijk aan de uitdrukking $R^{2m}\frac{d^p}{dr^p}(R^2 - r^2)^q$. Hierin is dan $r = R$ te nemen. Nu is $\frac{d^p}{dr^p}(R^2 - r^2)^q$ (voor $r = R$) gelijk aan $a_{p,q}\,R^{2q-p}$, waarin $a_{p,q}$ een constante voorstelt, die blijkbaar voor $p < q$ en voor $p > 2q$ gelijk aan nul is. Men heeft nu

$$\frac{d^p}{dr^p}(R^2-r^2)^{q+1} = (R^2-r^2)\frac{d^p}{dr^p}(R^2-r^2)^q -$$

$$-2pr\frac{d^{p-1}}{dr^{p-1}}(R^2-r^2)^q - p(p-1)\frac{d^{p-2}}{dr^{p-2}}(R^2-r^2)^q\,,$$

waaruit voor $r = R$ volgt

$$a_{p,q+1} = -2p\,a_{p-1,q} - p(p-1)\,a_{p-2,q}. \tag{7}$$

Voor $p = q + 1$ vinden wij dus

$$a_{q+1,q+1} = -2(q+1)\,a_{q,q}.$$

en daar $a_{0,0} = 1$, hebben wij

$$a_{q,q} = (-1)^q\, 2^q\, q!$$

Neemt men nu in de recursieformule (7) $p = q + 2$, dan vindt men een recurrente betrekking tusschen $a_{q+2,\,q+1}$ en $a_{q+1,\,q}$, die in staat stelt de constanten van de gedaante $a_{m+1,\,m}$ achtereenvolgens uitgaande van de beginwaarde $a_{2,2}$ te berekenen. Zoo voortgaande blijkt dat door (7) de getallen $a_{p,\,q}$ geheel bepaald zijn. Slagen wij er dus in een stelsel getallen te vinden, dat voor elke waarde van p en q aan (7) voldoet, terwijl $a_{0,0} = 1$ is, dan zijn daarmee de gevraagde constanten verkregen. Het blijkt nu, dat de getallen

$$a_{p,q} = (-1)^q\, p!\, 2^{2q-p}\, \frac{q!}{(p-q)!\,(2q-p)!} \tag{8}$$

aan (7) voldoen, zooals substitutie doet zien.

De randvoorwaarde $\dfrac{\partial^p H_\nu}{\partial r^p} = 0$, op de beschreven wijze toegepast, voert tot de volgende vergelijking voor de constanten C_i van (6):

$$(2\nu-3)(2\nu-4)\ldots(2\nu-p-2) + \sum_{i=\left[\frac{p+1}{2}\right]}^{i=p} C_i\, a_{p,i} = 0, \tag{9}$$

waarin $\left[\dfrac{p}{2}\right]$ het grootste geheele getal voorstelt dat $\leqq \dfrac{p}{2}$ is.

Uit de vergelijkingen voor $p = 1, 2, \ldots (\nu - 1)$, kan men achtereenvolgens $C_1, C_2, \ldots C_{\nu-1}$ bepalen. Men vindt

$$C_1 = \frac{2\nu-3}{2},\quad C_2 = -\frac{(2\nu-3)(2\nu-5)}{8},\quad C_3 = \frac{(2\nu-3)(2\nu-5)(2\nu-7)}{48}\ldots,$$

zoodat vermoed kan worden dat men heeft:

$$C_i = (-1)^{i+1}\frac{(2\nu-3)(2\nu-5)\ldots(2\nu-2i-1)}{2^i\, i!} = (-1)^{i+1}\binom{\nu-\frac{3}{2}}{i}. \tag{10}$$

Dat vermoeden wordt als volgt bewezen.

Substitutie van deze uitdrukkingen in (9) geeft voor even waarden van p

$$\left.\begin{aligned}&(2\nu-3)(2\nu-4)\ldots(2\nu-p-2)=\\&=\sum_{i=\frac{p}{2}}^{i=p} 2^{i-p}\,\frac{p(p-1)\ldots(p-i+1).(2\nu-3)(2\nu-5)\ldots(2\nu-2i-1)}{(2i-p)!}\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

en wij zullen bewijzen, dat dit een identiteit is. Daartoe merken wij op, dat het rechterlid geschreven kan worden, als (wij stellen nog $p=2m$)

$$\sum_{i=m}^{i=2m} 2^{i-2m}\,\frac{2m(2m-1)\ldots(2m-i+1).(2\nu-3)(2\nu-5)\ldots(2\nu-2i-1)}{(2i-2m)!}=$$

$$=\frac{1}{2m}\,2m(2m-1)\ldots(m+1).(2\nu-3)(2\nu-5)\ldots(2\nu-2m-1)$$

$$\times\sum_{r=0}^{m} 2^r\,\frac{m!(2\nu-2m-3)\ldots(2\nu-2m-2r-1)}{(2r)!(m-r)!}$$

Voor de laatste som kan men schrijven, als nog $2\nu-2m-3=n$ wordt gesteld:

$$1+2\frac{m.n}{2!}+2^2\frac{m(m-1).n(n-2)}{4!}+\ldots$$

$$\ldots+2^m\,\frac{m(m-1)\ldots2.1.n(n-2)\ldots(n-2m+2)}{(2m)!}=$$

$$=1+\frac{m.\frac{n}{2}}{1.\frac{1}{2}}+\frac{m(m-1).\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}{1.2.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{m(m-1)\ldots2.1.\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{n}{2}-m+1\right)}{1.2\ldots m.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}\ldots\frac{2m-1}{2}}$$

$$=F\left(-m,-\frac{n}{2},\tfrac{1}{2},1\right).$$

Nu is volgens een bekende formule uit de theorie der hypergeometrische functie

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1)=\frac{\Gamma(\gamma).\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}$$

voor $\gamma>\alpha+\beta$. Wij hebben dus

$$F\left(-m,-\frac{n}{2},\tfrac{1}{2},1\right)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}).\Gamma\left(m+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m+\frac{1}{2}).\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}).\Gamma(\nu-1)}{\Gamma(m+\frac{1}{2}).\Gamma(\nu-m-1)}=$$

$$=\frac{(\nu-2)!}{(m-\frac{1}{2})(m-\frac{3}{2})\ldots\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.(\nu-m-2)!}=\frac{2^m(\nu-2)(\nu-3)\ldots(\nu-m-1)}{(2m-1)(2m-3)\ldots3.1}$$

waaruit volgt:

$$\frac{1}{2^m}\,2m(2m-1)\ldots(m+1)\,.\,(2\nu-3)(2\nu-5)\ldots(2\nu-2m-1)\,F\left(-m,-\frac{n}{2},\tfrac{1}{2},1\right)=$$

$$=\frac{(2\nu-3)(2\nu-5)\ldots(2\nu-2m-1)\,.\,(2\nu-4)(2\nu-6)\ldots(2\nu-2m-2)(2m)!}{2^m(2m-1)(2m-3)\ldots3\,.\,1\,.\,m!}$$

$$=(2\nu-3)(2\nu-4)\ldots(2\nu-2m-2),$$

waarmee de identiteit (11) en daarmee ook de juistheid van (10) bewezen is. Voor oneven p verloopt het bewijs analoog.

Wij hebben daarmee voor de uitdrukking (6) de coëfficiënten bepaald en vinden dus voor *de vergelijking* $\triangle^\nu\varphi=0$ *en de in* § 1 *genoemde randvoorwaarden bij den bol de volgende functie van* GREEN:

$$H_\nu=\varrho^{2\nu-3}+\frac{1}{R^{2\nu-3}}\sum_{m=0}^{m=\nu-1}(-1)^{m+1}\binom{\nu-\frac{3}{2}}{m}R^2-a^2)^m(R^2-r^2)^m(a\varrho_1)^{2\nu-2m-3}. \quad (12)$$

§ 3. Voor het geval, dat $\triangle$ een symbool in twee onafhankelijk veranderlijken is, wordt de singulariteit der functie H_3 gegeven door $\varphi_3=\varrho^4\ln\varrho$. Wij zullen hiermee op een wijze analoog aan die, welke wij bij den bol gevolgd hebben, de functie H_3 voor den cirkel opstellen. Daar

$$\frac{\partial}{\partial r}\varrho^4\,ln\,\varrho=\varrho^3(4\,ln\,\varrho+1)\frac{\partial\varrho}{\partial r}=\varrho^2(4\,ln\,\varrho+1)(r-a\cos\vartheta)$$

moeten wij, om aan $\dfrac{\partial H_3}{\partial r}=0$ te voldoen twee termen toevoegen, n.l. $\varrho^2(A_1\ln\varrho+B_1)$, zoo komen wij door weer den zelfden gedachtengang te volgen als in § 1 tot

$$H_3=\varrho^4\,ln\,\varrho\,\frac{R}{a}-\frac{a^4}{R^4}\varrho_1^4\,ln\,\varrho_1+$$

$$+\frac{(R^2-a^2)(R^2-r^2)}{R^4}a^2\varrho_1^2(A_1\,ln\,\varrho_1+B_1)+\frac{(R^2-a^2)^2(R^2-r^2)^2}{R^4}(A_2\,ln\,\varrho_1+B_2).$$

Een verschil met het voorgaande ligt nog daarin, dat nu niet onmiddellijk is te zien, dat aan de reciprociteitsvoorwaarde voldaan is. Deze geeft ons nu op betrekkelijk eenvoudige wijze de coëfficiënten A_1 en A_2. Wij hebben namelijk

$$H_3(r_1,a)-H_3(a_1,r)=\varrho^4\,ln\,\frac{r}{a}-\frac{a^4}{R^4}\varrho_1^4\,ln\,\frac{r}{a}+$$

$$+A_1\frac{(R^2-a^2)(R^2-r^2)}{R^4}a^2\varrho_1^2\,ln\,\frac{r}{a}+A_2\frac{(R^2-a^2)^2(R^2-r^2)^2}{R^4}\,ln\,\frac{r}{a}$$

dus

$$0=R^4\varrho^4-a^4\varrho_1^4+A_1(R^2-a^2)(R^2-r^2)\,a_2\,\varrho_1^2+A_2(R^2-a^2)^2(R^2-r^2)^2,$$

en daar

$$R^4\varrho^4 - a^4\varrho_1^4 = (R^2\varrho^2 + a^2\varrho_1^2)(R^2\varrho^2 - a^2\varrho_1^2) = -(R^2\varrho^2 + a^2\varrho_1^2)(R^2 - r^2)(R^2 - a^2),$$

$$R^2\varrho^2 + a^2\varrho_1^2 - A_1 a^2 \varrho_1^2 \equiv A_2 (R^2 - a^2)(R^2 - r^2),$$

waaruit $A_1 = 2$, $A_2 = -1$.

De coëfficiënten B_1 en B_2 berekenen wij nu met behulp van de voorwaarde, dat aan den cirkel $\frac{\partial^2 H_3}{\partial r^2} = 0$. Wij vinden aan den cirkel

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H_3}{\partial r^2} = \left(4\, ln\, \varrho \frac{R}{a} + 1\right) a^2 \sin^2\vartheta + \left(12\, ln\, \varrho \frac{R}{a} + 7\right)(R - a\cos\vartheta)^2 - \\ - (4\, ln\, \varrho_1 + 1)\, a^2 \sin^2\vartheta - (12\, ln\, \varrho_1 + 7)(a - R\cos\vartheta)^2 - \\ - 4\frac{R^2 - a^2}{R^3} a^2 (2A_1 ln\varrho_1 + 2B_1 + A_1)\varrho_1 \frac{\partial\varrho_1}{\partial r} - \\ - 2\frac{R^2 - a^2}{R^4} a^2 \varrho_1^2 (A_1\, ln\varrho_1 + B_1) + \frac{8(R^2 - a^2)^2}{R^2}(A_2 ln\varrho_1 + B_2) = 0.\end{aligned}$$

De eerste en derde term vallen hierin tegen elkaar weg. Verder vallen, als wij de voor A_1 en A_2 gevonden waarden invoeren, de termen met ln ϱ_1 weg en wij houden over

$$\begin{aligned}\frac{7}{R^2}\{R^4 - a^4 - 2aR\cos\vartheta(R^2 - a^2)\} - \frac{4}{R^2}(R^2 - a^2)(a^2 - aR\cos\vartheta)(2B_1 + A_1) - \\ - \frac{2}{R^2}(R^2 - a^2)(R^2 + a^2 - 2aR\cos\vartheta) B_1 + \frac{8}{R^2}(R^2 - a^2)^2 B_2 = 0.\end{aligned}$$

dus

$$\begin{aligned}7(R^2 + a^2 - 2aR\cos\vartheta) - 8B_1(a^2 - aR\cos\vartheta) - 8(a^2 - aR\cos\vartheta) - \\ - 2B_1(R^2 + a^2 - 2aR\cos\vartheta) + 8(R^2 - a^2)B_2 = 0,\end{aligned}$$

waaruit $B_1 = \frac{1}{2}$, $B_2 = -\frac{3}{4}$.
en dus

$$\left.\begin{aligned}H_3 = \varrho^4\, ln\, \varrho \frac{R}{a} - \frac{a^4}{R^4}\varrho_1^4\, ln\, \varrho_1 + \frac{(R^2 - a^2)(R^2 - r^2)}{2R^4} a^2 \varrho_1^2 (4\, ln\, \varrho_1 + 1) + \\ + \frac{(R^2 - a^2)^2 (R^2 - r^2)^2}{4R^4}(4\, ln\, \varrho_1 + 3).\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Men verifieert ook nu weer gemakkelijk, dat deze functie aan alle gestelde eischen voldoet.

Op dezelfde wijze vindt men

$$\left.\begin{aligned}H_4 = \varrho^6\, ln\, \varrho \frac{R}{a} - \frac{a^6}{R^6}\varrho_1^6\, ln\, \varrho_1 + \frac{(R^2 - a^2)(R^2 - r^2)}{2R^6} a^4 \varrho_1^4 (6\, ln\, \varrho_1 + 1) - \\ - \frac{(R^2 - a^2)^2 (R^2 - r^2)^2}{4R^6} a^2 \varrho_1^2 (12\, ln\varrho_1 + 5) + \frac{(R^2 - a^2)^3 (R^2 - r^2)^3}{12R^6}(12 ln\varrho_1 + 11).\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

en kunnen ook in de algemeene uitdrukking

$$\left.\begin{aligned} H_\nu = \varrho^{2\nu-2} \ln \varrho \frac{R}{a} - \frac{a^{2\nu-2}}{R^{2\nu-2}} \varrho_1^{2\nu-2} \ln \varrho_1 + & \\ + \frac{(R^2-a^2)(R^2-r^2)}{R^{2\nu-2}} a^{2\nu-4} \varrho_1{}^{2\nu-4} (A_1 \ln \varrho_1 + B_1) + & \\ + \frac{(R^2-a^2)^2 (R^2-r^2)^2}{R^{2\nu-2}} a^{2\nu-6} \varrho^{2\nu-6} (A_2 \ln \varrho_1 + B_2) + \ldots + & \\ + \frac{(R^2-a^2)^{\nu-1} (R^2-r^2)^{\nu-1}}{R^{2\nu-2}} (A_{\nu-1} \ln \varrho_1 + B_{\nu-1}) \ldots & \end{aligned}\right\} . \quad (15)$$

de coëfficiënten A en B gevonden worden.

Ook kan men hier weer dezelfde methode volgen als in § 2 voor den bol werd toegepast. Stelt men aan den cirkel $\frac{\partial H_\nu}{\partial r}$ gelijk aan nul en voert men daarna den limietovergang $a \to 0$ uit, dan ontstaat de volgende vergelijking voor de onbepaalde coëfficiënten A en B:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{d^p}{dr^p} \varrho^{2\nu-2} \ln \varrho \frac{R}{a}\right]_{r=R} + & \\ + R^{2\nu-p-2} \sum_{i=1}^{i=\nu-1} a_{p,i} (A_i \ln \varrho_1 + B_i) = 0 \quad (p = 1, \ldots \nu-1) . & \end{aligned}\right\} . \quad (16)$$

Stelt men in deze betrekkingen den cofactor van ln ϱ_1 gelijk aan nul, dan ontstaat een rij betrekkingen voor A_i. De overige termen geven voorwaarden voor B_i. De eerste luiden

$$(2\nu-2)(2\nu-3)\ldots(2\nu-p-1) + \sum_{i=1}^{\nu-1} a_{p,i} A_i = 0 \qquad (17)$$

en zijn geheel analoog met (9). Men vindt zoo het resultaat

$$A_i = (-1)^{i+1} \binom{\nu-1}{i} . \qquad (18)$$

De betrekkingen voor B_i luiden

$$\sum_{s=1}^{p} (-1)^{s+1} \frac{p!}{(p-s)!\, s} \frac{(2\nu-2)!}{(2\nu-2-p+s)!} + \sum_{i=1}^{\nu-1} a_{p,i} B_i = 0$$

of

$$\sum_{s=1}^{p} \frac{(-1)^{s+1}}{s} \binom{2\nu-2}{p-s} + \sum_{i=1}^{\nu-1} \frac{a_{p,i}}{p!} B_i = 0. \qquad (p = 1, \ldots \nu-1)$$

en door toepassing der formule (8)

$$\sum_{s=1}^{p} \frac{(-1)^{s+1}}{s} \binom{2\nu-2}{p-s} + \sum_{i=1}^{\nu-1} (-1)^i\, 2^{2i-p} \binom{i}{p-i} B_i = 0 \quad p=1,2,\ldots\nu-1). \qquad (19)$$

Om hieruit B_i te bepalen merken we vooreerst op, dat de eerste term den coëfficiënt voorstelt van x^p in de machtreeksontwikkeling van

$$(1 + x)^{2\nu-2} \ln (1 + x).$$

Definiëeren wij nu B_i voor $i > \nu - 1$ door de formule (19) ook voor $p > \nu - 1$ geldig te verklaren, dan volgt hieruit als $|x|$ klein genoeg is

$$(1+x)^{2\nu-2} \ln (1+x) = x \,.\, 2B_1 + x^2 (B_1 - 2B_2) + x^3 \left\{ -2 \binom{2}{1} B_2 + 2^3 B_3 \right\} +$$

$$+ x^4 \left\{ -B_2 + 2^2 \binom{3}{1} B_3 - 2^4 B_4 \right\} + x^5 \left\{ 2 \binom{3}{1} B_3 - 2^3 \binom{4}{1} B_4 + 2^5 B_5 \right\} +$$

$$+ x^6 \left\{ B_3 - 2^2 \binom{4}{2} B_4 + 2^4 \binom{5}{1} B_5 - 2^6 B_6 \right\} + \ldots$$

$$= B_1 x \,.\, (x+2) - B_2 x^2 (x+2)^2 + B_3 x^3 (x+2)^3 - B_4 (x^4 (x+2)^4 + \ldots$$

of als we stellen $x^2 + 2x = y$, dus $(x+1)^2 = y + 1$,

$$\tfrac{1}{2} (1+y)^{\nu-1} \ln (1+y) = B_1 y - B_2 y^2 + B_3 y^3 - \ldots,$$

waaruit

$$B_1 = \tfrac{1}{2},\ B_2 = -\frac{2\nu-3}{2 \,.\, 2!}, \ldots B_i = \tfrac{1}{2} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(-1)^k}{i-k} \binom{\nu-1}{k} - \frac{(-1)^i}{2} \sum_{j=1}^{i} \frac{(-1)^j}{j} \binom{\nu-1}{i-j},$$

welke formule wij slechts hebben toe te passen voor $1 \leqq i \leqq v - 1$.

Wij merken nog op, dat $2B_i$ den coëfficiënt voorstelt van x^i in de machtreeksontwikkeling van $(1-x)^{\nu-1} \ln (1-x)$.