Mathematics. — *Zur Mass- und Integrationstheorie in Strukturen.* I. By J. RIDDER. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of January 26, 1946.)

Die im folgenden behandelten Mass- und Integrationstheorien in Strukturen, bei welchen die Werte der auftretenden Masse nicht immer von einerlei Verzeichen zu sein brauchen, lassen sich in die von uns in Acta math. **73** (1941) behandelten Mass- und Integrationstheorien einbetten.

I. *Beschränkt additives Mass.*

§ 1. Alle hier vorkommenden *Strukturen* genügen den Axiomen 1°, 2°, 3°, 4°, 6° und 7°; jede Struktur ist aufgebaut aus Elementen, *Somen* genannt, die mit kleinen Buchstaben angedeutet werden. Der Grundbegriff „Teil von" wird durch das Zeichen $\subset$ angedeutet. Eine Struktur, welche ausserdem Axiom 5° genügt, ist *eine Boolesche Struktur* oder *eine Boolesche Algebra.*

Axiom 1°: α) $a \subset a$; β) aus $a \subset b$ und $b \subset c$ folgt $a \subset c$.

Definition. $a = b$, falls $a \subset b$ und $b \subset a$.

Satz 1. $a = a$; $a = b \rightarrow b = a$; $a = b$ und $b = c \rightarrow a = c$.

Definition. Ein Soma ab oder $a \, . \, b$ wird *Produkt* des Somenpaares a, b genannt, falls: α) $ab \subset a$; β) $ab \subset b$; γ) aus $c \subset a$ und $c \subset b$ immer folgt $c \subset ab$.

Satz 2. Hat das Somenpaar a, b ein Produkt, so ist dieses eindeutig bestimmt, d.h. zwischen zwei Somen, deren jedes, gemäss letzter Definition, als Produkt von a und b betrachtet werden kann, gilt immer die Relation der Gleichheit.

Axiom 2°. Für jedes Somenpaar a, b gibt es ein Produkt ab.

Definition. Ein Soma $a + b$ wird Summe des Somenpaares a, b genannt, falls: α) $a \subset a + b$; β) $b \subset a + b$; γ) aus $a \subset c$ und $b \subset c$ immer folgt $a + b \subset c$.

Satz 2′. Hat ein Somenpaar eine Summe, so ist diese eindeutig bestimmt.

Axiom 3°. Für jedes Somenpaar a, b gibt es eine Summe $a + b$.

Satz 3, 3′. Aus $a \subset b$ folgt $ab = a$, und umgekehrt; aus $b \subset a$ folgt $a + b = a$, und umgekehrt.

Definition. Eine Struktur S besitzt ein kleinstes Soma, *leeres Soma* genannt, und angedeutet durch 0, falls $0 \subset a$ für jedes Soma a von S.

Satz 4. Gibt es ein leeres Soma, so ist dieses eindeutig bestimmt.

Axiom 4°. Es gibt ein kleinstes (leeres) Soma 0.

Definition. Zwei Somen a, b heissen *einander fremd,* falls $ab = 0$.

Satz 5. Ist $a \subset b$ und sind a und b einander fremd, so ist $a = 0$.

Satz 6. Ist $c \subset b$ und sind a und b einander fremd, so sind auch a und c einander fremd.

Definition. Eine Struktur S besitzt *ein grösstes Soma*, angedeutet durch 1, falls $a \subset 1$ für jedes Soma a von S.

Satz 4'. Gibt es ein grösstes Soma, so ist dieses eindeutig bestimmt.

Axiom 5°. Es gibt ein grösstes Soma 1.

Definition. Ist $a \subset b$, so wird *komplementäres Soma erster Art* genannt und angedeutet durch $b - a$ jedes zu a fremde Element x mit

$$a + x = b.$$

Definition. Ein Soma $1 - c$ wird *Komplement von* c genannt und durch c' angedeutet.

Axiom 6°. $ac + bc = (a + b)c$.

Axiom 7°. Zu jedem Paar von Somen a und b, mit $a \subset b$, gibt es ein komplementäres Soma erster Art, $b - a$.

Satz 7. Unter der Annahme $a \subset b$ ist $b - a$ in einer den Axiomen 1° — 4°, 6°, 7° genügenden Struktur eindeutig bestimmt; in einer Booleschen Algebra ist sodann $b - a = a'b$.

Satz 8. Aus $c \subset a + b$ und c und b einander fremd folgt, unter Annahme der Axiome 1° — 4°, 6°, 7°, $c \subset a$.

Satz 9, 9'. In einer Booleschen Struktur ist

$$(a + b)' = a'\,b' \quad \text{und} \quad (ab)' = a' + b'.$$

In einer Booleschen Struktur gilt folgendes Dualitätsprinzip: zu jedem in ihr ableitbaren Satz gibt es einen dualen, welchen man erhält, wenn im ursprünglichen Theorem überall: α) $x \subset y$ durch $y \subset x$, und somit: β) xy durch $x + y$, und umgekehrt, ersetzt wird, daneben: γ) 0 durch 1, und umgekehrt, ersetzt wird; lässt man γ) fort, so erhält man ein in einer den Axiomen 1° — 4°, 6°, 7° genügenden Struktur gültiges Dualitätsprinzip.

§ 2. In diesem Paragraphen betrachten wir eine Struktur S, welche Axiom 5° nicht zu erfüllen braucht. K sei eine Klasse von Somen von S, welche folgende Eigenschaften hat:

I. es gibt eine nicht leere (echte oder unechte) Teilklasse K_1 von K derart, dass ein Soma x zu K gehört, falls aus $a \in K_1$ immer folgt $a - ax \in K$; umgekehrt soll aus $x \in K$, $a \in K_1$ immer folgen $a - ax \in K$;

II. aus $x \in K$, $y \in K$ folgt $x + y \in K$; und:

III. aus $a \in K_1$, $b \in K_1$ folgt $a + b \in K_1$.

Aus I. folgt $0 \in K$, und, falls Axiom 5° erfüllt wird, auch $1 \in K$.

Satz 10. Aus $x \in K$, $y \in K$ folgt $xy \in K$ und $x - xy \in K$; die Somen von K bilden eine den Axiomen 1° — 4°, 6°, 7° genügende Teilstruktur $S(K)$ von S [1]).

Umgekehrt bilden die Somen einer den Axiomen 1° — 4°, 5°, 6°, 7° genügenden Teilstruktur eine die Bedingungen I., II., III. erfüllende Klasse K; als Teilklasse K_1 kann man dabei K selbst nehmen, oder auch die aus dem grössten Soma von $S(K)$ allein bestehenden Klasse.

---

1) Beim Beweise wird die Bedingung III. nicht benutzt.

Definition. $f(x)$ sei eine reellwertige Somenfunktion, definiert für alle und n u r alle diejenigen Somen $(x) \in K$, zu deren jedem ein Soma $a(x) \in K_1$ gehört mit $x \subset a(x)$, und nicht identisch Null. Sie soll *beschränkt additiv* heissen, falls:

1°. für je zwei einander fremde Somen x, y, für die f definiert ist,

$$f(x) + f(y) = f(x + y)$$

ist; und:

2°. für jedes Soma $a \in K_1$ die obere Schranke aller $|f(x)|$-Werte, mit $x \subset a$ und $x \in K$, endlich ist.

Ist f definiert für das Soma x, so sei *ihre positive Variation* $G(x)$ die (endliche) obere Schranke aller $f(e)$-Werte mit $e \subset x$ und $e \in K$; *ihre negative Variation* $g(x)$ sei die (endliche) untere Schranke dieser $f(e)$-Werte; *ihre Totalvariation* $T(x)$ sei definiert durch die Summe $G(x) + |g(x)|$.

Satz 11. $G(x)$, $g(x)$ und $T(x)$ sind beschränkt additive Somenfunktionen; dabei ist

$$G(x) + g(x) = f(x).$$

Satz 12. Die Somen, für die f, G, g und T definiert sind, bilden eine den Axiomen 1° — 4°, 6° und 7° genügende Teilstruktur $S(K_2)$ von $S(K)$.

Definition. Für jedes Soma x, zu welchem es ein Soma $a \in K_2$ mit $x \subset a$ gibt, definieren wir *die äussere T-Funktion* $T_a(x)$ gleich der unteren Schranke aller $T(a)$-Werte mit $x \subset a$ und $a \in K_2$. Die Klasse dieser Somen sei K_3.

Satz 13. Die Somen der Klasse K_3 bilden eine den Axiomen 1° — 4°, 6°, 7° genügende Teilstruktur $S(K_3)$ von S.

Satz 14. Für je zwei Somen x, y der Klasse K_3 ist

$$T_a(x + y) \leqq T_a(x) + T_a(y).$$

Satz 15. Für die zu K_2 gehörenden Somen (x) von K_3 fallen $T_a(x)$ und $T(x)$ zusammen.

Definition. Ein Soma a heisse *$T_a(x)$-messbar oder messbar in bezug auf* $T_a(x)$, wenn für jedes Soma $w \in K_3$

$$T_a(w) = T_a(wa) + T_a(w - wa)$$

ist.

In analoger Weise definiert man *die $G_a(x)$- und die $|g|_a(x)$-Messbarkeit* von Somen.

Satz 16. Fügt man $T_a(x)$ für die nicht zur Klasse K_3 gehörenden Somen den Wert $+\infty$ zu, so genügt die sodann für jedes Soma definierte äussere T-Funktion den Bedingungen: I*b*. es gibt ein Soma w mit $T_a(w)$ endlich und $\neq 0$; III. aus $a \subset b$ folgt immer $T_a(a) \leqq T_a(b)$; *V*. für jedes Soma a mit $T_a(a)$ endlich ist $T_a(a)$ gleich der unteren Schranke der Werte $T_a(\bar{x})$ für alle $T_a(x)$-messbaren Somen $(\bar{x})$ mit $a \subset \bar{x}$.

Beweis. Es genügt V. zu beweisen.

Aus $a \epsilon K_2$, $w \epsilon K_2$ folgt, mit den Sätzen 11, 12 und 15,

$$T_a(w) = T_a(wa) + T_a(w - w_a).$$

Zu $w \epsilon K_3$ und willkürlich positivem ε gibt es ein $\overline{w} \epsilon K_2$ mit $w \subset \overline{w}$ und

$$T(\overline{w}) < T_a(w) + \varepsilon.$$

Nun ist $wa \subset \overline{w}a$ und $w - wa \subset \overline{w} - \overline{w}a$; folglich

$$T_a(w) > T(\overline{w}) - \varepsilon = T_a(a\overline{w}) + T_a(\overline{w} - a\overline{w}) - \varepsilon \geqq T_a(aw) + T_a(w - aw) - \varepsilon,$$

also auch

$$T_a(w) \geqq T_a(aw) + T_a(w - aw).$$

Mit den Sätzen 13 und 14 liefert dies

$$T_a(w) = T_a(aw) + T_a(w - aw).$$

Jedes Soma $a \epsilon K_2$ ist somit $T_a(x)$-messbar. Daraus folgt V.

Aus Satz 16 folgt, dass alle in den Paragraphen 2—6 unserer Arbeit: *Mass- und Integrationstheorie in Strukturen* [2]) erhaltenen Eigenschaften der Somenfunktion $m^\circ(x)$ sich ohnemehr auf die (erweiterte) Funktion $T_a(x)$ übertragen lassen.

Definition. Zu jedem Soma a, mit $T_a(a)$ endlich, wähle man ein $T_a(x)$-messbares Soma b mit $a \subset b$; man lege *der zu $T_a(x)$ adjungierten Massfunktion $T_i(x)$* den Wert

$$T_a(b) - T_a(b - a)$$

bei. Für jedes Soma a mit $T_a(a) = \infty$ sei auch $T_i(a) = \infty$.

Durch obige Definition ist $T_i(a)$ eindeutig bestimmt.

Die in den Paragraphen 2—6 der eben zitierten Arbeit erhaltenen Eigenschaften der Somenfunktion $m_0(x)$ gelten nun ohnemehr für die Funktion $T_i(x)$. Daraus folgt u.a.:

Satz 17. $T_i(x)$ hat die Eigenschaften: I*b*. es gibt ein Soma w mit $T_i(w)$ endlich und $\neq 0$; III. aus $a \subset b$ folgt immer $T_i(a) \leqq T_i(b)$; IV. zu jedem Soma a mit $T_i(a)$ endlich gibt es ein $T_i(x)$-messbares Soma b mit $a \subset b$ und $T_i(b)$ ebenfalls endlich; V′. für jedes Soma a mit $T_i(a)$ endlich ist $T_i(a)$ gleich der oberen Schranke der Werte $T_i(\overline{x})$ für alle $T_i(x)$-messbaren Somen $(\overline{x})$ mit $\overline{x} \subset a$.

Die T_a- und die T_i-messbaren Somen fallen zusammen. Notwendig und hinreichend zur T_a- und T_i-Messbarkeit eines Somas a mit $T_a(a)$ oder $T_i(a)$ endlich ist die Relation $T_a(a) = T_i(a)$.

Die T_a- und T_i-messbaren Somen bilden eine den Axiomen 1° — 4°, 6°,

---

[2]) Siehe Acta math. **73** (1941), S. 131—173.

7° genügende Struktur $S(K_5)$, welche $S(K)$ und $S(K_2)$ als Teilstrukturen enthält [3]); ebenso enthält $S(K_5)$ eine die gleichen Axiome erfüllende Teilstruktur $S(K_4)$, die alle und nur alle diejenigen T_a-messbaren Somen umfasst, welche in einem Soma der Klasse K_2 enthalten sind. —

Ist die Funktion $G(x)$ nicht immer Null, so hat $G_a(x)$ dieselben Eigenschaften wie $T_a(x)$; das gleiche gilt für $|g(x)|$ und $|g|_a(x)$; für die nicht zur Klasse K_3 gehörenden Somen werde dabei einer jeden dieser Funktionen der Wert $+\infty$ beigelegt. Ist $G(x)=0$ für jedes Soma $x \in K_2$ so ist $G_a(a)=0$ für jedes $a \in K_3$, und jedes Soma von S ist $G_a(x)$-messbar; eine analoge Bemerkung gilt für $|g(x)|$.

Satz 18. Jedes $T_a(x)$-messbare Soma ist auch $G_a(x)$- und $|g|_a(x)$-messbar.

Definition. Für jedes Soma $a \in K_5$ und mit $T_a(a)$ endlich (also $\in K_4$) sei *das f-Mass* $m_f(a)$ definiert durch:

$$m_f(a) = G_a(a) - |g|_a(a).$$

Dann ist für jedes solche Soma a

$$m_G(a) = G_a(a), \quad m_g(a) = -|g|_a(a),$$

wodurch

$$m_f(a) = m_G(a) + m_g(a)$$

ist; ausserdem gilt

$$m_T(a) = m_G(a) - m_g(a).$$

Satz 19. Für $a \in K_2$ ist

$$m_f(a) = f(a), \quad m_T(a) = T(a), \quad m_G(a) = G(a) \text{ und } m_g(a) = g(a).$$

Definition. Für jedes Soma $a \in K_5$ mit $T_a(a)$ unendlich sei

$$m_G(a) = \text{obere Schranke aller } m_G(a\,.\,w)\text{-Werte mit } w \in K_2,$$

$$m_g(a) = \text{untere Schranke aller } m_g(a\,.\,w)\text{-Werte mit } w \in K_2,$$

$$m_f(a) = m_G(a) + m_g(a),$$

und

$$m_T(a) = m_G(a) - m_g(a),$$

wobei zu beachten ist, dass $m_f(a)$ als unbestimmt betrachtet werden soll, wenn $m_G(a)$ und $m_g(a)$ beide unendlich sind.

Satz 20. Für $a \in K_5$, $b \in K_5$, $ab = 0$ wird immer

$$m_T(a+b) = m_T(a) + m_T(b)$$

---

[3]) Zum Beweise der behauptung, dass $S(K)$ eine Teilstruktur von $S(K_5)$ ist, vergleiche man J. RIDDER, Fund. math. **24** (1935), S. 82 (Beweis von Satz XVI).

sein; es ist

$$m_f(a) + m_f(b) = m_f(a+b),$$

sobald bekannt ist, dass einer der beiden Glieder einen endlichen oder bestimmt unendlichen Wert hat.

§ 3. *Bildung einer Produktstruktur.*

Definition. $S^{(1)}$ und $S^{(2)}$ seien den Axiomen 1° — 4°, 6°, 7° genügende Strukturen. Unter *der Produktstruktur* $S^{(1)} \times S^{(2)}$ verstehen wir eine Struktur, deren Somen „Summen" endlich vieler „Produkte" $a_j^{(1)} \times a_j^{(2)}$ sind, mit $a_j^{(1)} \in S^{(1)}$, $a_j^{(2)} \in S^{(2)}$; dabei soll die „Summe" $\{ a_j^{(1)} \times a_j^{(2)} \}$ $(j = 1, \ldots, m) \subset$ die „Summe" $\{ b_k^{(1)} \times b_k^{(2)} \}$ $(k = 1, \ldots, n)$ sein, falls zu jedem „Produkt" $a_j^{(1)} \times a_j^{(2)}$ mit $a_j^{(1)} \neq 0$ und $a_j^{(2)} \neq 0$ endlich viele Somen $0 \neq a_{j;p}^{(1)} \in S^{(1)}$ $(p = 1, \ldots, P_j)$, $0 \neq a_{j;q}^{(2)} \in S^{(2)}$ $(q = 1, \ldots, Q_j)$ gehören, mit

$$a_{j;p}^{(1)} \cdot a_{j;\bar{p}}^{(1)} = 0 \text{ für } p \neq \bar{p}, \quad a_{j;q}^{(2)} \cdot a_{j;\bar{q}}^{(2)} = 0 \text{ für } q \neq \bar{q},$$

$$\sum_{p=1}^{P_j} a_{j;p}^{(1)} = a_j^{(1)}, \quad \sum_{q=1}^{Q_j} a_{j;q}^{(2)} = a_j^{(2)},$$

und der weiteren Eigenschaft, dass sich zu jedem Paar $a_{j;p}^{(1)}$, $a_{j;q}^{(2)}$ ein „Produkt" $b_k^{(1)} \times b_k^{(2)}$ angeben lässt mit

$$a_{j;p}^{(1)} \subset b_k^{(1)} \text{ und } a_{j;q}^{(2)} \subset b_k^{(2)}.$$

Satz 21. Die Produktstruktur $S^{(1)} \times S^{(2)}$ genügt den Axiomen 1° — 4°, 6°, 7°, und, falls Axiom 5° in $S^{(1)}$ und in $S^{(2)}$ gilt, auch Axiom 5°. Dabei ist das Produkt

$$\{ a_j^{(1)} \times a_j^{(2)} \}_{(j=1,\ldots,m)} \cdot \{ b_k^{(1)} \times b_k^{(2)} \}_{(k=1,\ldots,n)}$$

gleich

$$\{ (a_j^{(1)} \cdot b_k^{(1)}) \times (a_j^{(2)} \cdot b_k^{(2)}) \}_{(j=1,\ldots,m;\ k=1,\ldots,n)},$$

und die Summe

$$\{ a_j^{(1)} \times a_j^{(2)} \}_{(j=1,\ldots,m)} + \{ b_k^{(1)} \times b_k^{(2)} \}_{(k=1,\ldots,n)}$$

gleich

$$\{ a_j^{(1)} \times a_j^{(2)},\ b_k^{(1)} \times b_k^{(2)} \}_{(j),(k)},$$

also gleich der „Summe" aller „Produkte" $a_j^{(1)} \times a_j^{(2)}$ und aller „Produkte" $b_k^{(1)} \times b_k^{(2)}$. Das leere Soma ist „Summe" von „Produkten" $a^{(1)} \times a^{(2)}$ mit entweder $a^{(1)}$ oder $a^{(2)}$ oder beide gleich dem leeren Soma in der zugehörigen Struktur; falls Axiom 5° in $S^{(1)}$ und in $S^{(2)}$ gilt, ist das grösste Soma der Produktstruktur gleich $\{ 1^{(1)} \times 1^{(2)} \}$; hierbei deuten $1^{(1)}$ und $1^{(2)}$ die grössten Somen von $S^{(1)}$ bzw. $S^{(2)}$ an.

Definition. *Elementares Soma* von $S^{(1)} \times S^{(2)}$ sei jedes Soma, das nur ein einzelnes „Produkt" $a^{(1)} \times a^{(2)}$, mit $a^{(1)} \in S^{(1)}$, $a^{(2)} \in S^{(2)}$ enthält.

Satz 22*a*. Jede Differenz

$$\{a^{(1)} \times a^{(2)}\} - \{a^{(1)} \times a^{(2)}\} \,.\, \{b^{(1)} \times b^{(2)}\}$$

lässt sich als Summe von zwei einander fremden elementaren Somen darstellen [4]).

Satz 22*b*. Jede Differenz

$$\{a^{(1)} \times a^{(2)}\} - \{a^{(1)} \times a^{(2)}\} \,.\, \sum_{j=1}^{n} \{b_j^{(1)} \times b_j^{(2)}\}$$

ist Summe von höchstens 2^n, einander fremden, vom leeren Soma verschiedenen elementaren Somen [5]).

Satz 23. Jedes Soma $\{a_j^{(1)} \times a_j^{(2)}\}_{(j=1,\ldots,m)}$ ist gleich einem Soma $\{b_j^{(1)} \times b_j^{(2)}\}_{(j=1,\ldots,n)}$, das „Summe" von einander fremden, elementaren Somen ist [6]).

§ 4. $\mathfrak{S}$ sei eine den Axiomen 1°—4°, 6°, 7° genügende Struktur, welche eine mit der im vorigen Par. definierten Struktur $S^{(1)} \times S^{(2)}$ isomorphe Teilstruktur $\mathfrak{S}^{(1,2)}$ enthält.

Ausgehend von Teilstrukturen $S(K_2^{(1)})$ von $S^{(1)}$ und $S(K_2^{(2)})$ von $S^{(2)}$, welche ebenfalls die Axiome 1°—4°, 6°, 7° erfüllen, und von für die Somen dieser Strukturen definierten, beschränkt additiven Somenfunktionen $f^{(1)}(a)$ bzw. $f^{(2)}(a)$ [vgl. § 2; die Klassen $K_1^{(1)}$ und $K_1^{(2)}$ sollen dabei mit $K_2^{(1)}$ bzw. $K_2^{(2)}$ zusammenfallend gedacht werden; die Existenz von Klassen $K^{(1)}$ und $K^{(2)}$ braucht nicht vorausgesetzt zu werden], kann man, wie in § 2, $S(K_2^{(1)})$ und $S(K_2^{(2)})$ erweitern zu die gleichen Axiome erfüllenden Strukturen $S(K_4^{(1)})$, $S(K_5^{(1)})$ bzw. $S(K_4^{(2)})$, $S(K_5^{(2)})$, für deren Somen die Sätze 18—20 gelten. Ein eventuelles grösstes Soma von $S^{(1)}$ oder $S^{(2)}$ ist ein Soma von $S(K_5^{(1)})$ bzw. $S(K_5^{(2)})$.

$\mathfrak{S}(\mathfrak{K}_2)$ sei die den Axiomen 1°—4°, 6°, 7° genügende Teilstruktur von $\mathfrak{S}^{(1,2)}$, welche bei der Isomorphie von $\mathfrak{S}^{(1,2)}$ und $S^{(1)} \times S^{(2)}$ sich auf die Teilstruktur $S(K_2^{(1)}) \times S(K_2^{(2)})$ von $S^{(1)} \times S^{(2)}$ abbildet.

Wenn ein Soma $\mathfrak{a} \in \mathfrak{K}_2$ sich bei der Isomorphie auf ein Soma $\bar{\mathfrak{a}}$ von $S(K_2^{(1)}) \times S(K_2^{(2)})$ abbildet [also $\bar{\mathfrak{a}} \in K_2^{(1)} \times K_2^{(2)}$], welche gleich ist einer „Summe"

$$\left.\begin{array}{c} \{a_j^{(1)} \times a_j^{(2)}\}_{(j=1,\ldots,n)}, \text{ mit } a_j^{(1)} \in K_2^{(1)},\ a_j^{(2)} \in K_2^{(2)} \text{ und} \\ a_j^{(1)} \times a_j^{(2)},\ a_k^{(1)} \times a_k^{(2)} \text{ einander fremd } (j \neq k), \end{array}\right\} \quad . \; . \quad (1)$$

sei

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{a}) = \sum_{j=1}^{n} f^{(1)}(a_j^{(1)}) \times f^{(2)}(a_j^{(2)}).$$

---

[4]) Vergleiche loc. cit. 3), S. 87 (Satz XIX).

[5]) Vergleiche loc. cit. 3), S. 88 (Satz XIX*a*).

[6]) Vergleiche loc. cit. 3), S. 88 (Satz XX).

Man sieht unschwer ein, dass der Wert von $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ unabhängig von der unter den angegebenen Bedingungen gewählten Darstellung (1) ist; $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ *ist eine für die Somen von* $\mathfrak{K}_2$ *beschränkt additive Funktion* (im Sinne von § 2).

Es ist nun möglich zu $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ gehörende positive und negative Variationen, $\mathfrak{G}(\mathfrak{a})$ bzw. $\mathfrak{g}(\mathfrak{a})$, und eine Totalvariation $\mathfrak{T}(\mathfrak{a})$ mit den in § 2 behandelten Eigenschaften einzuführen. Wie dort führt die Totalvariation zur äusseren $\mathfrak{T}$-Funktion, $\mathfrak{T}_a(\mathfrak{a})$, für die Somen einer ($\mathfrak{K}_2$ umfassenden) Teilklasse $\mathfrak{K}_3$ der Klasse aller Somen von $\mathfrak{S}$; nach einer Erweiterung von $\mathfrak{T}_a(\mathfrak{a})$ zu allen Somen von $\mathfrak{S}$ (vgl. Satz 16) gelangt man zur inneren $\mathfrak{T}$-Funktion, $\mathfrak{T}_i(\mathfrak{a})$, und zu der (die Axiome 1°—4°, 6°, 7° erfüllende) Struktur $\mathfrak{S}(\mathfrak{K}_5)$ der $\mathfrak{T}_a$- und $\mathfrak{T}_i$-messbaren Somen [$\mathfrak{K}_2 \subset \mathfrak{K}_5$].

Satz 24. $\mathfrak{S}(\mathfrak{K}_5)$ enthält eine zur Produktstruktur $S(K_5^{(1)}) \times S(K_5^{(2)})$ isomorphe Teilstruktur [7]).

[7]) Vgl. loc. cit. 3), S. 89 (Satz XXII), 91 (Satz XXIII). — Zur Ableitung von weiteren Eigenschaften vergleiche J. RIDDER, Nieuw Archief (2) **19** : 1 (1936), S. 31—33.