Mathematics. — *Zur Mass- und Integrationstheorie in Strukturen.* II. By J. RIDDER. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of January 26, 1946.)

II. RIEMANN–STIELTJESsche *Integrale.*

§ 5. $S^{(1)}$ sei die von den Teilmengen der Menge aller reellen Zahlen gebildete Struktur, bei der $a \subset b$ bedeutet soll: a ist Teilmenge von b; $S^{(2)}$ sei eine weitere, die Axiome 1° — 4°, 6°, 7° erfüllende Struktur, in welcher wir Teilklassen von Somen, $[K^{(2)}, K_1^{(2)}]$, $K_2^{(2)}$ — $K_5^{(2)}$, von der in § 2 besprochenen Art nebst beschränkt additiven Somenfunktionen $f^{(2)}(a)$, $G^{(2)}(a)$, $g^{(2)}(a)$, $T^{(2)}(a)$ und zugehörigen Massfunktionen $m_{f(2)}(a)$ u.s.w. betrachten wollen (vgl. § 4). In $S^{(1)}$ nehmen wir als $S(K^{(1)})$ die kleinste, die Axiome 1° — 4°, 6°, 7° erfüllende Teilstruktur, welche die Menge aller reellen Zahlen und diejenigen ihrer Teilmengen umfasst, deren Durchschnitte mit den offenen Intervallen I $(a < x < b)$ immer als Summe von endlich vielen offenen Intervallen aufgefasst werden können, und für die $K_1^{(1)}$ die Teilklasse von $K^{(1)}$ ist, deren jedes Soma aus endlich vielen offenen Intervallen aufgebaut ist (siehe § 2). $S(K^{(1)})$ enthält eine Struktur $S(K_2^{(1)})$ von der in § 2 angegebenen Art. Definiert man schliesslich die Funktion $f^{(1)}(a)$ für die Somen $a \in K_2^{(1)}$, ausgehend von dem elementargeometrischen Mass der offenen Intervalle, so lässt sich $S(K_2^{(1)})$ erweitern zu einer Struktur $S(K_5^{(1)})$, wobei man für die Somen dieser Struktur eine (nicht-negative) Massfunktion $m_{f(1)}(a)$ mit den in § 2 behandelten Eigenschaften erhält.

Wie im vorigen Paragraphen, gibt es eine Produktstruktur $S^{(1)} \times S^{(2)}$, welche wir hier mit $\mathfrak{S}$ zusammenfallend annehmen; aus den $K_j^{(i)}$-Klassen gehen Klassen $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$, $\mathfrak{K}_5$ von Somen von $S^{(1)} \times S^{(2)}$ nebst zu diesen gehörenden Somenfunktionen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{T}$ und Massfunktionen $m_{\mathfrak{F}}$, u.s.w. hervor [1]).

Satz 25. Wenn ein zur eben eingeführten Klasse $\mathfrak{K}_2$ gehörendes Soma $\mathfrak{a}$ sich darstellen lässt:

$$\mathfrak{a}_1^{(1)} \times \mathfrak{b}_1^{(2)} + \mathfrak{a}_2^{(1)} \times \mathfrak{b}_2^{(2)} + \ldots + \mathfrak{a}_n^{(1)} \times \mathfrak{b}_n^{(2)},$$

mit $\mathfrak{a}_j^{(1)} \in K_2^{(1)}$, $\mathfrak{b}_j^{(2)} \in K_2^{(2)}$ $(j = 1, \ldots, n)$, **und** $\mathfrak{a}_j^{(1)} \times \mathfrak{b}_j^{(2)}$ **und** $\mathfrak{a}_k^{(1)} \times \mathfrak{b}_k^{(2)}$ **einander fremd** $(j \neq k)$, **so wird**

$$\mathfrak{G}(\mathfrak{a}) = \sum_{j=1}^{n} f^{(1)}(\mathfrak{a}_j^{(1)}) \times G^{(2)}(\mathfrak{b}_j^{(2)}); \quad \mathfrak{g}(\mathfrak{a}) = \sum_{j=1}^{n} f^{(1)}(\mathfrak{a}_j^{(1)}) \times g^{(2)}(\mathfrak{b}_j^{(2)})$$

---

1) $\mathfrak{S}$ $(\mathfrak{K}_5)$ und $S(K_5^{(1)}) \times S(K_5^{(2)})$ fallen hier zusammen.

und

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{a}) = \sum_{j=1}^{n} f^{(1)}(a_j^{(1)}) \times T^{(2)}(b_j^{(2)})$$

sein [2]).

Definition. Die Struktur $S^{(2)}$ genüge den Axiomen 1° — 4°, 6°, 7°; sie enthalte das Soma $a^{(2)} \neq 0$. Dann wird *eine auf* $a^{(2)}$ *definierte abstrakte Ortsfunktion* F durch zwei Somenfunktionen $\alpha(x^{(2)})$ und $\beta(x^{(2)})$ gegeben, die beide auf jedem vom leeren Soma verschiedenen Soma $x^{(2)} \subset a^{(2)}$ definiert sind und folgende Eigenschaften haben:

1. es gibt zwei endliche oder unendliche Zahlen λ_1, λ_2, so dass für jedes Soma $x^{(2)} \subset a^{(2)}$ und $\neq 0$

$$\lambda_1 \leqq \alpha(x^{(2)}) \leqq \beta(x^{(2)}) \leqq \lambda_2$$

ist;

2. $\alpha(x^{(2)})$ ist monoton abnehmend, $\beta(x^{(2)})$ monoton zunehmend;

3. ist $\lambda_1 < \lambda_2$, so gibt es mindestens eine im offenen Intervall (λ_1, λ_2) überall dicht liegende Folge von Zahlen $\{y_k\}$, denen die Somen $\{x_k^{(2)}\}$, mit jedem $x_k^{(2)} \subset a^{(2)}$, eindeutig zugeordnet sind, so dass erstens $\alpha(x_k^{(2)}) \geqq y_k$ und dass zweitens $\beta(a^{(2)} - x_k^{(2)}) \leqq y_k$ ist.

Definition A. Die in der vorigen Definition betrachtete Ortsfunktion F sei *nicht-negativ*; das soll heissen:

$$\alpha(a^{(2)}) \geqq 0.$$

Sie sei ausserdem *auf* $a^{(2)}$ *beschränkt*, m.a.W.: $\beta(a^{(2)})$ und $\alpha(a^{(2)})$ seien endlich. Schliesslich sei $a^{(2)} \in K_4^{(2)}$.

Dann betrachten wir als *Pseudo-Soma* $[a^{(2)}; F]$ eine Kombination von zwei Klassen L und R von zu $\mathfrak{K}_2$ gehörenden Somen, bei der:

1°. L alle und nur alle diejenigen Somen $(\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{K}_2$ umfasst, deren jedes „Summe" ist von endlich vielen „Produkten" $a_j^{(1)} \times a_j^{(2)}$ mit: $a_j^{(2)} \subset a^{(2)}$, $a_j^{(2)} \in K_2^{(2)}$; zu jedem $a_j^{(2)}$ ein Soma $b_j^{(2)} \in S^{(2)}$, $a_j^{(2)} \subset b_j^{(2)} \subset a^{(2)}$, so dass das Intervall $0 \leqq x < \alpha(b_j^{(2)})$ [3]) das zugehörige Soma $a_j^{(1)} \in K_2^{(1)}$ enthält;

2°. R alle und nur alle diejenigen Somen $(\bar{\mathfrak{a}})$ von $\mathfrak{K}_2$ umfasst, deren jedes „Summe" von endlich vielen „Produkten" $\bar{a}_j^{(1)} \times \bar{a}_j^{(2)}$ ist, und folgende Eigenschaft hat: $a^{(2)}$ lässt sich in endlich viele, einander fremde Somen $(\bar{b}_k^{(2)})$, $\bar{b}_k^{(2)} \in S^{(2)}$, zerlegen, so dass bei jedem $\bar{b}_k^{(2)}$ diejenigen Somen $\bar{a}_j^{(2)}$ mit

$$\bar{b}_k^{(2)} \subset \bar{a}_j^{(2)}$$

eine Menge $\{\bar{a}_j^{(2)}\}_k$ bilden, für welche die zugehörige Somenmenge $\{\bar{a}_j^{(1)}\}_k$ eine Summe hat, die das Intervall $0 \leqq x \leqq \beta(\bar{b}_k^{(2)})$ enthält.

---

[2]) Vgl. Mitt. I., loc. cit. 3), S. 95, 96 (Satz XXIV nebst Beweis).

[3]) Ist $\alpha(b_j^{(2)}) = 0$, so lese man: $0 \leqq x \leqq \alpha(b_j^{(2)})$.

Die unteren Schranken der $\mathfrak{T}$- und $\mathfrak{G}$- und die obere Schranke der $\mathfrak{g}$-Masse der Somen von R seien *das äussere* $\mathfrak{T}$-, *bzw.* $\mathfrak{G}$-, *bzw.* $\mathfrak{g}$-*Mass von* $[a^{(2)}; F]$, zugleich *das obere* RIEMANN–STIELTJES*sche* $T^{(2)}$-, *bzw.* $G^{(2)}$-, *bzw.* $g^{(2)}$-*Integral von* F *über* $a^{(2)}$; die oeberen Schanken der $\mathfrak{T}$- und $\mathfrak{G}$- und die untere Schranke der $\mathfrak{g}$-Masse der Somen von L seien *das innere* $\mathfrak{T}$-, *bzw.* $\mathfrak{G}$-, *bzw.* $\mathfrak{g}$-*Mass von* $[a^{(2)}; F]$, zugleich *das untere* RIEMANN-STIELTJES*sche* $T^{(2)}$-, *bzw.* $G^{(2)}$-, *bzw.* $g^{(2)}$-*Integral von* F *über* $a^{(2)}$. Sind äusseres und inneres $\mathfrak{T}$-, und dadurch auch äusseres und inneres $\mathfrak{G}$-Mass, und ebenso äusseres und inneres $\mathfrak{g}$-Mass, einander gleich, so seien diese gemeinsamen Werte bzw. *das* $\mathfrak{T}$-, $\mathfrak{G}$- *und* $\mathfrak{g}$-*Mass von* $[a^{(2)}; F]$ [4]; F heisse dann $T^{(2)}$-, $G^{(2)}$- *und* $g^{(2)}$-*integrierbar* (RS) *über* $a^{(2)}$, und es sei

$$\int_{a^{(2)}} (RS)\, F\, dm_{T^{(2)}}(x^{(2)}) = \text{das } \mathfrak{T}\text{-Mass von } [a^{(2)}; F],$$

$$\int_{a^{(2)}} (RS)\, F\, dm_{G^{(2)}}(x^{(2)}) = \text{das } \mathfrak{G}\text{-Mass von } [a^{(2)}; F],$$

$$\int_{a^{(2)}} (RS)\, F\, dm_{g^{(2)}}(x^{(2)}) = \text{das } \mathfrak{g}\text{-Mass von } [a^{(2)}; F];$$

jede derartige $T^{(2)}$-integrierbare Funktion F betrachten wir auch als $f^{(2)}$-*integrierbar* (RS) mit

$$\int_{a^{(2)}} (RS)\, F\, dm_{f^{(2)}}(x^{(2)}) = \int_{a^{(2)}} (RS)\, F\, dm_{G^{(2)}}(x^{(2)}) + \int_{a^{(2)}} (RS)\, F\, dm_{g^{(2)}}(x^{(2)}).$$

Definition A*. Wenn F *auf* $a^{(2)} \in K_4^{(2)}$ *beschränkt* ist, lassen sich zwei Ortsfunktionen F^+ (zugehörige Somenfunktionen α^+, β^+) und F^- (zugehörige Somenf. α^-, β^-) in folgender Weise einführen:

auf jedem Soma $p^{(2)} \subset a^{(2)}$ mit $\alpha(p^{(2)}) \geqq 0$ sei $\alpha^+(p^{(2)}) = \alpha(p^{(2)})$, $\beta^+(p^{(2)}) = \beta(p^{(2)})$, und $\alpha^-(p^{(2)}) = 0$, $\beta^-(p^{(2)}) = 0$,

---

[4]) Läßt $S^{(1)} \times S^{(2)}$ sich in eine Struktur $\mathfrak{S}^*$ einbetten, in welcher dieselben Strukturaxiome wie in $S^{(1)} \times S^{(2)}$ gelten, Axiom 3^0 sogar in der umfassenderen Form $\overline{\overline{3}}^0$: „jede Klasse von Somen hat eine Summe" (dies hat zur Folge, dass auch Axiom 5^0 erfüllt wird), und ist dabei für die zu einem Pseudo-Soma $[a^{(2)}; F]$ gehörenden Klassen L und R die Summe der Somen von L immer gleich dem Produkte der Somen von R: $\sum_{(L)} \mathfrak{a} = \prod_{(R)} \bar{\mathfrak{a}}$, so ist dieses letzte Soma als das zu F über $a^{(2)}$ gehörende *Ordinatensoma* zu betrachten. *Für eine* $T^{(2)}$-*integrierbare Funktion* F *ist dann das Ordinatensoma* $\mathfrak{T}$-*meßbar, und ihr* $\mathfrak{T}$-*Mass ist gleich dem* $T^{(2)}$-*Integral von* F *über* $a^{(2)}$; dabei sei das äussere und innere $\mathfrak{T}$-Mass in $\mathfrak{S}^*$ in derselben Weise aus $\mathfrak{T}(\mathfrak{a})$ abgeleitet zu denken wie (in den §§ 5 und 6) in $S^{(1)} \times S^{(2)}$; in $S^{(1)} \times S^{(2)}$ bleiben alle Messbarkeitsrelationen ungeändert erhalten. — Für die Eigenschaften einer Struktur mit den Axiomen 1^0, 2^0, $\overline{\overline{3}}^0$, 4^0—7^0 siehe unsere Arbeit: *Über topologische Eigenschaften von Strukturen*, Verhand. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, Sect. 1, **18**, Nr. 4, S. 1—43 (1944).

auf jedem Soma $q^{(2)} \subset a^{(2)}$ mit $\alpha\,(q^{(2)}) < 0$, $\beta\,(q^{(2)}) > 0$ sei $\alpha^+\,(q^{(2)}) = 0$, $\beta^+\,(q^{(2)}) = \beta\,(q^{(2)})$, und $\alpha^-\,(q^{(2)}) = 0$, $\beta^-\,(q^{(2)}) = -\alpha\,(q^{(2)})$,
auf jedem Soma $r^{(2)} \subset a^{(2)}$ mit $\beta\,(r^{(2)}) \leqq 0$ sei $\alpha^+\,(r^{(2)}) = 0$, $\beta^+\,(r^{(2)}) = 0$, und $\alpha^-\,(r^{(2)}) = -\beta\,(r^{(2)})$, $\beta^-\,(r^{(2)}) = -\alpha\,(r^{(2)})$.

Sind nun F^+ und F^- über $a^{(2)}$ $T^{(2)}$-integrierbar (RS), so betrachten wir F als $T^{(2)}$- *und* als $f^{(2)}$-*integrierbar* (RS) *über* $a^{(2)}$, und es sei:

$$\int\limits_{a^{(2)}} (RS)\, F\, dm_{f^{(2)}}\,(x^{(2)}) = \int\limits_{a^{(2)}} (RS)\, F^+\, dm_{f^{(2)}} - \int\limits_{a^{(2)}} (RS)\, F^-\, dm_{f^{(2)}},$$

und

$$\int\limits_{a^{(2)}} (RS)\, F\, dm_{T^{(2)}}\,(x^{(2)}) = \int\limits_{a^{(2)}} (RS)\, F^+\, dm_{T^{(2)}} - \int\limits_{a^{(2)}} (RS)\, F^-\, dm_{T^{(2)}}.$$

(*Geometrische* Definition des RIEMANN–STIELTJESschen Integrals.)

Satz 26. Zur Existenz des in der vorigen Definition eingeführten Integrals $\int\limits_{a^{(2)}} (RS)\; F\, dm_{f^{(2)}}$ ist notwendig und hinreichend, dass es bei willkürlich positiven Zahlen ε, δ eine Überdeckung von $a^{(2)}$ durch endlich viele, einander fremde Somen $(x_j^{(2)}) \in K_2^{(2)}$ gebe, bei der von denjenigen Somen unter den $(x_j^{(2)})$ mit $\beta\,(x_j^{(2)}.\, a^{(2)}) - \alpha\,(x_j^{(2)}.\, a^{(2)}) > \varepsilon$ die Summe ihrer $T^{(2)}$-Masse $< \delta$ sei.

§ 6. **Definition.** Ein Soma $\sum\limits_{j \in K} a_j$ wird *Summe der Somenklasse* $\{a_j\}$ **mit** $j \in K$ genannt, falls: α) jedes $a_j \subset \sum\limits_{j \in K} a_j$; β) aus $a_j \subset b\,(j \in K)$ folgt $\sum\limits_{j \in K} a_j \subset b$.

Satz 27. Hat die abzählbar unendliche Klasse: $a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots$ eine Summe, so ist diese eindeutig bestimmt.

Axiom $\bar{3}$°. Zu jedem Somenpaar gibt es eine Summe; für jede abzählbar unendliche Klasse von Somen: $a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots$ gibt es eine Summe $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$.

Definition. Ein Soma $\prod\limits_{j \in K} a_j$ wird *Produkt der Somenklasse* $\{a_j\}$ mit $j \in K$ genannt, falls: α) für jedes $j \in K$ $\prod\limits_{j \in K} a_j \subset a_j$; β) aus $b \subset a_j\,(j \in K)$ folgt $b \subset \prod\limits_{j \in K} a_j$.

In diesem Paragraphen betrachten wir eine den Axiomen 1°, 2°, $\bar{3}$°, 4°, 6°, 7° genügende Struktur $S^{(2)}$. Dann gilt:

Satz 28. Jede abzählbar unendliche Klasse von Somen: $a_1, a_2, \ldots$ hat ein eindeutig bestimmtes Produkt.

Auch hier gilt das Dualitätsprinzip von § 1, Ende, falls ausserdem Axiom 5° erfüllt wird, und bei Fortlassung von γ) auch wieder ohne dieses Axiom.

Auf dem Soma $a^{(2)}$ sei eine abstrakte Ortsfunktion F definiert. Dann kann man, ähnlich wie bei Punktfunktionen [5]), für reelles λ Teilsomen

---

[5]) Vergleiche C. CARATHÉODORY, *Vorles. ü. reelle Funkt.*, 2e Aufl. (1927), S. 372 u.f. Angenommen wird, dass das leere Soma immer die Ungleichungen $\alpha \geqq \lambda$ und $\beta \leqq \lambda$ erfüllt.

$x^{(2)}(F \leqq \lambda)$ und $x^{(2)}(F \geqq \lambda)$ bestimmen; $x^{(2)}(F \geqq \lambda)$ ist das (immer existierende) grösste Teilsoma [6]) von $a^{(2)}$ mit $\alpha \geqq \lambda$, und ebenso $x^{(2)}(F \leqq \lambda)$ das (immer existierende) grösste Teilsoma [6]) von $a^{(2)}$ mit $\beta \leqq \lambda$ [7]).

Lemma [8]). In der (den Axiomen 1°, 2°, $\bar{3}$°, 4°, 6°, 7° genügenden) Struktur $S^{(2)}$ sollen F, $a^{(2)}$, $f^{(2)}$, $T^{(2)}$ die gleichen Eigenschaften wie in Definition A haben. Dann ist das obere R.–S. $T^{(2)}$-Integral von F über $a^{(2)}$ gleich

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{j=1}^{n} T_a^{(2)} [a^{(2)} - x^{(2)}(F \leqq y_{j-1})] \times \{y_j - y_{j-1}\},$$

während das untere R.–S. $T^{(2)}$-Integral von F über $a^{(2)}$ gleich

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{j=1}^{n} T_i^{(2)} [x^{(2)}(F \geqq y_j)] \times \{y_j - y_{j-1}\}$$

ist; hierbei ist δ das Maximum der Differenzen $(y_j - y_{j-1})$, gehörend zu einer Zerlegung $0 = y_0 < y_1 \ldots < y_n = M$ des Intervalles $[0, M]$, wobei die $\alpha^{(2)}$- und $\beta^{(2)}$-Werte für alle Teilsomen von $a^{(2)}$ kleiner als die (übrigens willkürliche) fest gewählte Konstante M sind.

Definition. F, $a^{(2)}$, $f^{(2)}$, $T^{(2)}$ sollen die gleichen Eigenschaften wie in Definition A haben. Dann heisse F *$T_a^{(2)}$-messber auf dem Soma $a^{(2)}$*, wenn für alle reellen y-Werte, eine höchstens abzählbar unendliche Menge E ausgenommen, die Somen $x^{(2)}(F \leqq y)$ und $x^{(2)}(F \geqq y)$ $T_a^{(2)}$-messbar sind, und wenn daneben für diese y-Werte

$$T_a^{(2)} \{a^{(2)} - x^{(2)}(F \leqq y)\} = T_a^{(2)} \{x^{(2)}(F \geqq y)\}$$

ist [9]).

Satz 29 [10]). Haben F, $a^{(2)}$, $f^{(2)}$, $T^{(2)}$ die gleichen Eigenschaften wie am Anfang der Definition A*, so ist es zur $T^{(2)}$- und $f^{(2)}$-Integrierbarkeit (RS) von F über $a^{(2)}$ notwendig und hinreichend, dass F auf $a^{(2)}$ $T_a^{(2)}$-messbar sei.

Sind für die Teilsomen $x^{(2)}$ von $a^{(2)}$ die zu F gehörigen Somenfunktionen α, β beschränkt, mit $m < \alpha \leqq \beta < M$, und wählt man die y_j-Werte $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ der Zerlegung $m = y_0 < y_1 < y_2 \ldots < y_n = M$ immer derartig, dass die zugehörigen Somen $x^{(2)}(F \geqq y_j)$ $T_a^{(2)}$-messbar sind, so ist

$$\int_{a^{(2)}} (RS)\, F\, dm_{T^{(2)}}(x^{(2)}) = \lim_{\delta \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} y_j \cdot m_T [x^{(2)}(F \geqq y_j) - x^{(2)}(F \geqq y_{j+1})]$$

---

[6]) Das soll heissen: alle Somen mit derselben Eigenschaft werden von diesem Soma umfasst.

[7]) Für das komplementäre Soma $a^{(2)} - x^{(2)}(F \geqq \lambda)$ ist $\beta \leqq \lambda$; ebenso ist für $a^{(2)} - x^{(2)}(F \leqq \lambda)$ $\alpha \geqq \lambda$.

[8]) Vergleiche Mitt. I., loc. cit. 3), S. 99 (Lemma *B*) und I., loc. cit. 2), S. 171, 172 (Lemma).

[9]) *Aus der $T_a^{(2)}$-Messbarkeit von $x^{(2)}(F \geqq y)$ für alle y, abzählbar viele Werte ausgenomen, lassen sich die übrigen, in dieser Definition enthaltenen Bedingungen ableiten.*

[10]) Zum Beweise vergleiche man I., loc. cit. 3), S. 101—103; auch I., loc. cit. 2), S. 172.

und

$$\int_{a^{(2)}} (RS)\, F\, d\, m_{f^{(2)}}(x^{(2)}) = \lim_{\delta \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} y_j \cdot m_f\, [x^{(2)}(F \geqq y_j) - x^{(2)}(F \geqq y_{j+1})]\,;$$

hierbei ist δ das Maximum der Differenzen $(y_j - y_{j-1})$ der Zerlegung von $[m, M]$.

Das bekannte Verfahren von DE LA VALLÉE POUSSIN führt zu (absolut konvergenten) uneigentlichen RIEMANN–STIELTJESschen $f^{(2)}$- und $T^{(2)}$-Integralen über Somen.

Die Integrale besitzen die gewöhnlichen elementaren Integraleigenschaften.

III. *Total-additives Mass.*

§ 7. In den drei letzten Kapiteln betrachten wir nur Strukturen, die den Axiomen 1°, 2°, $\bar{3}$°, 4°, 6°, 7° genügen.

Die in § 2 enthaltene Theorie eines *beschränkt* additiven Masses lässt sich in einer derartigen Struktur in leicht ersichtlicher Weise in eine Theorie eines *total*-additiven Masses abändern. Wir geben hier kurz die dazu notwendigen Änderungen in den Definitionen und Sätzen an.

K genüge in der Struktur S den gleichen Bedingungen wie in § 2; nur soll unter II. auch die Summe von abzählbar vielen Somen zugelassen werden.

Dann genügt auch $S\,(K)$ den Axiomen 1°, 2°, $\bar{3}$°, 4°, 6°, 7° und, falls S Axiom 5° erfüllt, daneben Axiom 5°.

Die Somenfunktion $f(x)$ soll *total-additiv* sein, d.h. in der Definition soll unter 1° die Additivität für abzählbar viele, paarweise fremde Somen gefordert werden, für deren jedes und für deren Summe f definiert ist [11].

$G\,(x)$, $g\,(x)$, $T\,(x)$ werden nun ebenfalls total-additiv sein. Die Definitionen von $T_a\,(x)$ und $T_i\,(x)$ behalten den gleichen Wortlaut. $S\,(K_2)$ *und* $S\,(K_3)$ *sind den Axiomen 1°, 2°, 3°, 4°, 6°, 7° genügende, in bezug auf* K_1 *σ-beschränkte Strukturen;* mit „σ-beschränkt in bezug auf K_1" meinen wir, dass die Summe von je *abzählbar* vielen zu einer solchen Struktur gehörenden Somen auch zur Struktur gehört immer dann, wenn es ein Soma $a \in K_1$ gibt, welches die Summe als Teilsoma umfasst.

Satz 14′. Für abzählbar viele Somen (x_j), welche ebenso wie ihre Summe zur Klasse K_3 gehören, ist immer

$$T_a\,(x_1 + x_2 + \ldots) \leqq \sum_{(j)} T_a\,(x_j). \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Der Wortlaut des Satzes 15 bleibt ungeändert; auch die der Definitionen der T_a-, G_a- und $|\,g\,|_a$-Messbarkeit von Somen und der Definition der adjungierten Funktion $T_i\,(x)$.

---

11) Die Bedingung 2° folgt nun aus 1°, und kann somit fortgelassen werden. Vergleiche S. SAKS, *Théorie de l'intégrale*, Warszawa 1933, p. 248, 249.

Satz 16'. Fügt man $T_a(x)$ für die nicht zur Klasse K_3 gehörenden Somen den Wert $+\infty$ zu, so genügt die sodann für jedes Soma definierte äussere T-Funktion den Bedingungen: I^b. es gibt ein Soma w mit $T_a(w)$ endlich und $\neq 0$; III. aus $a \subset b$ folgt immer $T_a(a) \leqq T_a(b)$; V. für jedes Soma a mit $T_a(a)$ endlich ist $T_a(a)$ gleich der unteren Schranke der Werte $T_a(\bar{x})$ für alle $T_a(x)$-messbaren Somen $(\bar{x})$ mit $a \subset \bar{x}$; VI. die Summe von abzählbar vielen, $T_a(x)$-messbaren Somen ist $T_a(x)$-messbar; VII. für jede Folge von Somen $b_1 \subset b_2 \ldots \subset b_n \ldots$ mit $b = \sum_{j=1}^{\infty} b_j$ und $T_a(b)$ endlich ist

$$\lim_{j \to \infty} T_a(b_j) = T_a(b).$$

Beweis. Es genügt VI. und VII. zu beweisen.

Die I., loc. cit. 2), §§ 2—6 behandelten Eigenschaften der Somenfunktion $m_0(x)$ gelten ohnemehr für die Funktion $T_i(x)$. Ist insbes. $T_i(a+b)$ endlich und $ab = 0$, so gilt

$$T_i(a+b) \geqq T_i(a) + T_i(b).$$

Daraus folgt für abzählbar unendlich viele paarweise fremde Somen $a_1, a_2, \ldots$ mit $T_i(a_1 + a_2 + \ldots)$ endlich:

$$T_i(a_1 + a_2 + \ldots) \geqq \sum_{j=1}^{\infty} T_i(a_j).$$

Sind die einzelnen Somen $a_1, a_2, \ldots$ T_a-messbar, so ergibt sich aus dieser Ungleichung in Verbindung mit (2):

$$T_a(a_1 + a_2 + \ldots) \leqq \sum_{(j)} m_T(a_j) \leqq T_i(a_1 + a_2 + \ldots),$$

also, da immer $T_i \leqq T_a$ ist [12]).

$$m_T(a_1 + a_2 + \ldots) = T_a(\sum_{(j)} a_j) = T_i(\sum_{(j)} a_j) = \sum_{(j)} m_T(a_j). \quad . \quad . \quad (3)$$

Fordern wir nicht mehr die Endlichkeit von $T_i(a_1 + a_2 + \ldots)$, so folgt doch aus dem Vorigen, dass bei willkürlich gewähltem T_a-mesbarem Soma w, mit $T_a(w)$ endlich, auch $w(a_1 + a_2 + \ldots) = wa_1 + wa_2 + \ldots$ und $w - w(a_1 + a_2 + \ldots)$ T_a-messbar sind. Es ist somit

$$T_a(w) = T_a[w(a_1 + a_2 + \ldots)] + T_a[w - w(a_1 + a_2 + \ldots)]. \quad . \quad (4)$$

Daraus folgt jedoch [13]) die T_a-Messbarkeit der Summe $a_1 + a_2 + \ldots$ Nun leitet man auch leicht die Relation (4) für den Fall ab, in welchem die a_j nur T_a-messbar vorausgesetzt werden; das liefert dann Eigenschaft VI.

Mit (3) folgt VII. in den Fällen, in welchen jedes Soma b_j T_a-messbar ist.

Jedes Produkt von abzählbar vielen, T_a-messbaren Somen ist auch T_a-messbar [14]). Mit V. folgt daraus für jedes Soma w mit $T_a(w)$ endlich

---

[12]) Siehe I., loc. cit. 2), S. 151 (Satz 35).

[13]) Siehe I., loc. cit. 2), S. 153 (Satz 39).

[14]) Siehe I., loc. cit. 2), S. 161, 162 (Satz 49).

die Existenz eines T_a-messbaren Somas $\overline{w} \supset w$ mit $m_T(\overline{w}) = T_a(w)$. Dies ermöglicht den allgemeinen Fall von VII. in bekannter Weise auf den eben behandelten besonderen Fall zurückzuführen. —

Die I., loc. cit. 2), §§ 9—11 erhaltenen Eigenschaften der Somenfunktionen m^0, m_0 gelten nun ohnemehr für die Funktionen T_a, T_i [15]).

Die T_a- und T_i-messbaren Somen bilden eine den Axiomen 1°, 2°, $\overline{3}$°, 4°, 6°, 7° genügende Struktur $S(K_5)$, welche $S(K)$ und $S(K_2)$ als Teilstrukturen enthält. $S(K_5)$ enthält ebenfalls eine die Axiome 1°, 2°, 3°, 4°, 6°, 7° erfüllende Teilstruktur $S(K_4)$, die alle und nur alle diejenigen T_a-messbaren Somen enthält, die in einem Soma der Klasse K_2 enthalten sind; $S(K_4)$ ist in bezug auf K_1 σ-beschränkt.

Der den Satz 18 vorangehende Absatz behält den gleichen Wortlaut. Satz 18 bleibt ungeändert; ebenso Satz 19, wenn das f-Mass wie in § 2 definiert bleibt. Lässt man auch die den Satz 20 vorangehende Definition ungeändert, so lässt sich dieser Satz erweitern zu

Satz 20′. Für eine abzählbar unendliche Klasse $\{a_j\}$ von paarweise fremden, zu K_5 gehörenden Somen ist immer

$$m_T(\sum_{(j)} a_j) = \sum_{(j)} m_T(a_j);$$

ausserdem ist für diese Somen

$$m_f(\sum_{(j)} a_j) = \sum_{(j)} m_f(a_j)$$

immer dann, wenn das linke Glied einen endlichen oder bestimmt unendlichen Wert hat.

IV. LEBESGUE–STIELTJESsche *Integrale.*

§ 8. Geringfügige Abänderungen in den Überlegungen der §§ 5 und 6 genügen um zum LEBESGUE–STIELTJESschen Integral in einer die Axiome 1°, 2°, $\overline{3}$°, 4°, 6°, 7° erfüllende Struktur $S^{(2)}$ zu gelangen.

$S(K_2^{(2)})$ sei eine die Axiome 1°, 2°, 3°, 4°, 6°, 7° erfüllende und in bezug auf $K_2^{(2)}$ selbst σ-beschränkte Teilstruktur von $S^{(2)}$; $f^{(2)}$ sei eine für die Somen von $K_2^{(2)}$ definierte, total-additive Somenfunktion, d.h. aus $a_j \in K_2^{(2)}$ $(j = 1, 2, \ldots)$, $a_{j_1} \cdot a_{j_2} = 0$ $(j_1 \neq j_2)$, $\sum_{(j)} a_j \in K_2^{(2)}$ soll folgen: $f^{(2)}(\sum_{(j)} a_j) = \sum_{(j)} f^{(2)}(a_j)$. Dann lassen sich Somenklassen $K_3^{(2)}$, $K_4^{(2)}$, $K_5^{(2)}$ und Massfunktionen $m_{f^{(2)}}$, $m_{T^{(2)}}$ einführen, welche die im vorigen Paragraphen behandelten Eigenschaften haben. $S^{(1)}$ sei die von den Teilmengen der Menge aller reellen Zahlen gebildete Struktur; zu ihr seien Somenklassen und Massfunktionen in gleicher Weise gewählt wie in § 5.

Die Betrachtungen von §§ 3 und 4 führen nun, ebenso wie in dem in § 5 betrachteten Fall, zu Somenklassen $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$, $\mathfrak{K}_5$ in $S^{(1)} \times S^{(2)}$ und zu diesen

---

[15]) Axiom VIII der zitierten Arbeit braucht hier nicht zu gelten, somit auch nicht die wenigen, sich auf diesem Axiom stützenden Masseigenschaften.

gehörenden, *beschränkt*-additiven Somenfunktionen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{T}$ und *beschränkt*-additiven Massfunktionen $m_{\mathfrak{F}}$ u.s.w.

Satz 25 behält seine Gültigkeit.

Lässt man den Wortlaut der in §§ 5 und 6 weiter folgenden Definitionen ungeändert (nur lese man „L.–S." statt „R.–S.)", so bleiben auch alle weiteren Sätze dieser Paragraphen gültig.

Wir bemerken, dass zufolge der Eigenschaft von $S\,(K_1^{(2)})$ in bezug auf $K_2^{(2)}$ σ-beschränkt zu sein *die* in der Definition der $T^{(2)}$-Messbarkeit einer abstrakten Ortsfunktion F, welche auf einem Soma $a^{(2)} \in K_1^{(2)}$ beschränkt ist, *zugelassene Ausnahmemenge immer leer sein wird.* Dadurch ist es möglich diese Definition die in der Theorie der gewöhnlichen LEBESGUEschen und der LEBESGUE–STIELTJESschen Integrale übliche Form zu geben.

V. *Erweiterung eines beschränkt-additiven Masses zu einem total-additiven Masse.*

§ 9. **Satz 30.** S genüge den Axiomen 1°, 2°, $\bar{3}$°, 4°, 6°, 7°. $S\,(K_2)$ sei, wie in § 2, eine die Axiome 1°, 2°, 3°, 4°, 6°, 7° erfüllende Teilstruktur [16]), für deren Somen eine beschränkt additive Somenfunktion $f(x)$ definiert sei. Ihre Totalvariation $T\,(x)$ sei *in* $S\,(K_2)$ *total-additiv* *, was heissen soll: ist $a = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$, $a_j \in K_2$, $a_{j_1} \cdot a_{j_2} = 0$ $(j_1 \neq j_2)$ und *gehört auch* a *zur Klasse* K_2, so ist

$$T(a) = \sum_{j=1}^{\infty} T(a_j). \quad ^{17)}$$

Dann gibt es eine kleinste, in bezug auf K_1 σ-beschränkte und $S\,(K_2)$ umfassende Teilstruktur $S\,(\bar{K}_2)$ von S, welche die Axiome 1°, 2°, 3°, 4°, 6°, 7° erfüllt; auf dieser lassen sich T, G, g und f zu im Sinne von § 7 total-additiven Somenfunktionen $\bar{T}$, $\bar{G}$, $\bar{g}$ und $\bar{f}$ erweitern; dabei ist für $x \in S\,(\bar{K}_2)$

$$\bar{f}(x) = \bar{G}(x) + \bar{g}(x), \quad \bar{T}(x) = \bar{G}(x) - \bar{g}(x),$$

und sind $\bar{G}$ und $\bar{g}$ in bezug auf die Klasse $\bar{K}_2$ positive und negative Variation von $\bar{f}$. Durch diese Eigenschaften werden die Erweiterungen $\bar{f}$, $\bar{G}$, $\bar{g}$ und $\bar{T}$ auch eindeutig festgelegt [18]). —

---

[16]) Auch hier ist es möglich sich K_1 und K_2 zusammenfallend zu denken, wobei dann die Klasse K fehlen darf.

[17]) Dann ist ebenso

$$G(a) = \sum_{(j)} G(a_j), \quad g(a) = \sum_{(j)} g(a_j) \text{ und } f(a) = \sum_{(j)} f(a_j).$$

[18]) Für den Beweis vergleiche man O. HAUPT u. G. AUMANN, *Differential- und Integralrechnung,* Band III, Berlin 1938, S. 16—20, wo ein gleichartiger Satz für Mengen eines abstrakten Raumes abgeleitet wird. Vgl. auch I., loc. cit. 2), S. 160, 161 (Satz 48) und A. KOLMOGOROFF, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung,* Behlin 1933, S. 15 u. 16.

Die Methoden von § 7 sind darauf wieder anwendbar um, von $\bar{f}$ auf $S(\bar{K}_2)$ ausgehend, zu einem total-additiven Masse $m_{\bar{f}}$ zu gelangen.

§ 10. Das im vorigen Paragraphen angewandte Erweiterungsverfahren ist wesentlich an die Existenz der Struktur S gebunden, in welcher $S(K_2)$ eingebettet ist. Hat $S(K_2)$ zwar die in Satz 30 geforderten Eigenschaften, steht jedoch daneben die Existenz einer Struktur S nicht fest, so wird ein anderes Verfahren notwendig um zu einer total-additiven Somenfunktion zu gelangen. Dies gelang bisher nur in besonderen Strukturen unter Anwendung eines von MAC NEILLE herrührenden Verfahrens [19]).

---

[19]) Siehe F. WECKEN, Math. Ztschr. **45** (1939), S. 377—404, insbes. S. 391—393; M. H. MAC NEILLE, Proc. Nat. Acad. sci. USA **24** (1938), S. 188—193, insbes. S. 191—193.