Mathematics. — *Over het bestaan der oplossing van $\triangle^k u = 0$, die met haar $k-1$ eerste normale afgeleiden gegeven waarden aanneemt in de punten van een gegeven gesloten kromme.* I. By H. BREMEKAMP. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of January 26, 1946.)

In een tweetal vroegere mededeelingen heb ik in de eerste plaats [1]) bewezen, dat de oplossing der vergelijking $\triangle^k u = 0$ ondubbelzinnig bepaald is in het gebied binnen een gesloten kromme, die aan zekere voorwaarden voldoet, als men verlangt, dat u in het gebied binnen de kromme doorloopende partiëele afgeleiden heeft tot inclusief die van de $2k^{\text{de}}$ orde en als is voorgeschreven, dat

$$u, \frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \dots \frac{\partial^{k-1} u}{\partial n^{k-1}}$$

naderen tot in elk punt der kromme gegeven waarden, als het punt, waar men die grootheden bepaalt, op willekeurige wijze van binnen uit tot een punt der kromme nadert, n duidt hierbij de richting van de normaal der kromme aan, wij zullen die steeds positief rekenen in de richting naar buiten.

Verder [2]) heb ik van die oplossing, aannemende dat zij bestaat, eenige eigenschappen afgeleid.

Ik wil nu de existentie bewijzen van een oplossing, die aan de genoemde eischen voldoet.

Wij zullen daarbij aannemen, dat de gesloten kromme C, die het beschouwde gebied begrenst, in ieder van haar punten een ondubbelzinnig bepaalde raaklijn heeft en zoo is, dat wanneer we een coördinatenstelsel aanbrengen met die raaklijn, tot x-as en de normaal tot y-as, de y van een punt der kromme in de omgeving van den oorsprong een analytische functie is van x,

$$y = c\,x^2 + \dots$$

Het gebied binnen de kromme zal dan door een analytische substitutie $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ conform kunnen worden afgebeeld op het halfvlak $\eta < 0$.

Van de gegeven waarden voor u, $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ enz. zullen wij aannemen, dat zij analytische functies zijn van den parameter, die de plaats op de kromme vast legt.

---

[1]) Over de bepaaldheid der oplossingen van $\triangle^k u = 0$. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **48**, 222 (1945).

[2]) Eigenschappen der oplossingen van $\triangle^k u = 0$. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **48**, 229 (1945).

Het is nauwelijks twijfelachtig, of de hier geformuleerde voorwaarden, belangrijk kunnen worden verzwakt. Wij laten dat echter voor nader onderzoek over.

Wij zullen bewijzen, dat er onder de genoemde voorwaarden, steeds een analytische functie te vinden is, die aan de gestelde eischen voldoet.

Wat de vergelijking $\triangle^2 u = 0$ betreft (onder $\triangle$ verstaan wij steeds den operator van LAPLACE, onder $\triangle^2 u$ dus $\triangle\triangle u$ enz.) zijn er verschillende existentiebewijzen gegeven, waarbij drie typen zijn te onderscheiden 1⁰ met behulp van achtereenvolgende benaderingen (zie b.v. A. KORN, Sur l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Ann. de l'Ecole Normale 25 (1908)). 2⁰ Met behulp van integraalvergelijkingen (zie b.v. G. LAURICELLA. Sur l'intégration de l'équation relative à l'équilibre des plaques encastrées. Acta Math. 32 (1909) en voor het analoge probleem in drie afmetingen K. SCHRÖDER, Zur Theorie der Randwertaufgaben der Differentialgleichung $\triangle\triangle u = 0$. Math. Zeitschrift 48 (1943), waar men vrij uitvoerige verdere litteratuur-opgaven vindt). 3⁰ Met behulp van de directe methoden der variatierekening (zie b.v. K. FRIEDRICHS, Die Randwert- und Eigenwertprobleme der Theorie der elastischen Platten. Math. Ann. 98 (1928)).

In een vroegere meededeeling (Sur l'existence et la construction des solutions de certaines équations aux dérivées partielles du quatriéme ordre, Nederl. Akad. v. Wetensch. Proc. vol. XLV (1942)) heb ik zeer kort een bewijsmethode geschetst, die daarop neerkomt, dat de oplossing wordt teruggebracht tot het bepalen van een tweetal binnen C harmonische functies, wier waarden aan den rand door integraalvergelijkingen bepaald zijn [3]. Daar deze methode mij het meest geschikt voorkomt voor de uitbreiding op het onderhavige probleem, begin ik thans met een iets uitvoeriger uiteenzetting daarvan.

§ 1. Wij willen bewijzen, dat we een functie u kunnen bepalen, die binnen C voldoet aan $\triangle^2 u = 0$, terwijl aan C $u = f_1$, $\frac{\partial u}{\partial n} = f_2$ gegeven analytische functies van de plaats op de kromme zijn. Wij bedoelen daarmee, dat u en $\frac{\partial u}{\partial n}$ tot de gegeven waarden naderen, als het punt, waar we die functies berekenen, op willekeurige wijze naar een punt van C gaat. Voor punten in de nabijheid van C verstaan we onder $\frac{\partial u}{\partial n}$ de afgeleide in de richting van de normaal der door dat punt gaande kromme $\eta = c$, bij de in de inleiding genoemde afbeelding.

---

[3]) Vergelijk in dit verband ook H. BREMEKAMP, Construction of the solution of $\triangle\triangle u = 0$, satisfying given boundary conditions in the case that the boundary is an Ellipse. Nieuw Archief voor Wiskunde, Bnd XXII.

Wij maken daarbij gebruik van de eigenschap, dat

$$u = r^2 u_1 + u_0, \qquad (1)$$

waarbij r den afstand aanwijst tot een willekeurig punt O, dat wij binnen C zullen kiezen, en waarbij binnen C $\triangle u_1 = \triangle u_0 = 0$, voldoet aan $\triangle^2 u = 0$.

Wij trachten nu de harmonische functies u_0 en u_1 zoo te bepalen, dat aan C

$$r^2 u_1 + u_0 = f_1, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial n}(r^2 u_1 + u_0) = f_2. \qquad (3)$$

Met behulp hiervan zoeken wij de waarden u_0 en u_1 aan den rand, $u_{0,c}$ en $u_{1,c}$, waardoor we volgens het theorema van DIRICHLET u_0 en u_1 kunnen vinden. Wij hebben

$$u_0(P) = -\frac{1}{2\pi}\int_C u_{0,c}(Q)\,\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n}\,ds, \qquad (4)$$

en

$$u_1(P) = -\frac{1}{2\pi}\int_C u_{1,c}(Q)\,\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n}\,ds, \qquad (5)$$

waarbij P een willekeurig punt binnen C is, Q de kromme C doorloopt en $G(P, Q)$ de gewone functie van GREEN voor de kromme C is.

Wij willen nu deze uitdrukkingen in (3) en (2) substitueeren. Daarbij stellen we vast, dat we onder de integralen, die ontstaan, als we in (4) en (5) (en in dergelijke integralen) P door een punt P_1, der kromme C vervangen, verstaan de limiet, waartoe de betrokken integraal nadert, als P van binnen uit naar P_1 gaat. Deze nadere omschrijving van de beteekenis der integraal is noodig, want als P en Q beide in P_1 vallen is $G(P, Q)$ niet gedefiniëerd en als eerst P en vervolgens Q naar P_1 naderen, wordt $\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n}$ oneindig van de eerste orde. Wanneer we dus P zonder meer door P_1 vervangen, hebben de integralen geen beteekenis. Die beteekenis wordt nu door de bovenstaande definitie vastgelegd. Dat de daarbij genoemde limieten bestaan, is uit de theorie der vergelijking van LAPLACE welbekend. In de vergelijkingen (2) en (3) is het eerste lid ook op te vatten als de limiet, waartoe de daar geschreven uitdrukking nadert, als P van binnen uit naar het punt P_1 der kromme gaat. Dat is dus in overeenstemming met de boven omschreven opvatting der integralen. Wij vinden dus

$$2r\frac{\partial r}{\partial n_{P_1}}u_{1,c}(P_1) - \frac{r^2}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_{P_1}}\int_C u_{1,c}(Q)\,\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_Q}\,ds -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_{P_1}}\int_C u_{0,c}(Q)\,\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_Q}\,ds = f_2.$$

Door hieruit met behulp van (2) $u_{0,c}$ (Q) te elimineeren, vinden we

$$2r\frac{\partial r}{\partial n_{P_1}}u_{1,c}(P_1)-\frac{r^2}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_{P_1}}\int\limits_C u_{1,c}(Q)\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_Q}ds+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_{P_1}}\int\limits_C r_Q^2 u_{1,c}(Q)\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_Q}ds-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_{P_1}}\int\limits_C f_1(Q)\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_Q}ds=f_2.$$

Hierin stelt

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_C f_1(Q)\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_Q}ds$$

de harmonische functie $F_1(P)$ voor, die aan C de waarden $f_1(Q)$ aanneemt. Deze is bekend. We merken nog eens op, dat ook als P binnen de kromme ligt, de richting n_P volgens het voorgaande bekend is. Na de differentiatie is overeenkomstig het zooeven gezegde de limietovergang $P\to P_1$ uit te voeren. Wij kunnen nu deze vergelijking brengen in den vorm

$$2r_{P_1}\frac{\partial r_{P_1}}{\partial n_{P_1}}u_{1,c}(P_1)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_C(r_Q^2-r_P^2)u_{1,c}(Q)\frac{\partial^2 G(P,Q)}{\partial n_P\,\partial n_Q}ds=f_2-\frac{\partial F_1}{\partial n_{P_1}}. \qquad (6)$$

Ook hier ontstaat, als we P zonder meer door P_1 vervangen, een divergente integraal, de functie

$$(r_Q^2-r_P^2)\frac{\partial^2 G(P,Q)}{\partial n_P\,\partial n_Q}$$

wordt enkelvoudig oneindig, als P en Q beide naar P_1 gaan. Wij moeten echter weer onder de integraal de bovenomschreven limiet verstaan. Wij zullen nu bewijzen, dat wij even goed de hoofdwaarde van

$$\int\limits_C(r_Q^2-r_P^2)\,u_{1,c}(Q)\frac{\partial^2 G(P,Q)}{\partial n_P\,\partial n_Q}ds$$

in den zin van CAUCHY kunnen nemen. Wij zetten dus van P_1 ter weerszijden gelijke bogen $P_1Q_1 = P_1R_1 = \varepsilon$ uit en zoeken de limiet voor $\varepsilon\to 0$ van de integraal langs den boog van Q_1 niet over P_1 naar R_1 en willen bewijzen

$$\lim_{P\to P_1}\int\limits_C(r_Q^2-r_P^2)\,u_{1,c}(Q)\frac{\partial^2 G(P,Q)}{\partial n_P\,\partial n_Q}ds=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{Q_1}^{R_1}(r_Q^2-r_{P_1}^2)\,u_{1,c}(Q)\frac{\partial^2 G(P,Q)}{\partial n_{P_1}\partial n_Q}ds.$$

Wij brengen daarbij het coördinatenstelsel aan met de raaklijn in P_1, als x-as en de (naar buiten wijzende) normaal als y-as. De coördinaten van Q noemen we (x, y). In verband met onze onderstellingen over de kromme en omdat we voor U_1 een analytische functie zoeken, kunnen wij dan stellen

$$(r_Q^2 - r_P^2)\, u_{1,c}(Q) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

waarbij de coëfficienten $a_0, a_1, \ldots$ van de ligging van P afhangen en $a_0 \to 0$, als $P \to P_1$. Wij hebben dus

$$\lim_{P \to P_1} \int_C (r_Q^2 - r_P^2)\, u_{1,c}(Q) \frac{\partial^2 G(P,Q)}{\partial n_P \partial n_Q} ds =$$

$$= \lim_{P \to P_1} \int_C (a_0 + a_1 x + \ldots) \frac{\partial^2 G(P,Q)}{\partial n_P \partial n_Q} ds.$$

Nu is

$$\int_C a_0 \frac{\partial^2 G(P,Q)}{\partial n_P \partial n_Q} ds = a_0 \frac{\partial}{\partial n_P} \int_C \frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_Q} ds = 0,$$

voor ieder punt P binnen C, dus is ook de limiet als $P \to P_1$ nul.

Verder is, met gemakkelijk te begrijpen notatie,

$$\left.\begin{aligned} \lim_{P \to P_1} \int_C (a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) \frac{\partial^2 G(P,Q)}{\partial n_P \partial n_Q} ds = \lim_{P \to P_1} \int_{Q_1}^{R_1} (a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) \\ \frac{\partial^2 G(P,Q)}{\partial n_P \partial n_Q} ds + \lim_{P \to P_1} \int_{2\varepsilon} (a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) \frac{\partial^2 G(P,Q)}{\partial n_P \partial n_Q} ds. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

De eerste term in het tweede lid is

$$\int_{Q_1}^{R_1} (a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) \frac{\partial^2 G(P,Q)}{\partial n_{P_1} \partial n_Q} ds$$

en levert dus, als $\varepsilon \to 0$ de hoofdwaarde van

$$\int_C (a_0 + a_1 x \ldots) \frac{\partial^2 G(P_1,Q)}{\partial n_{P_1} \partial n_{Q_1}} ds,$$

den term met a_0 kunnen wij hier zonder bezwaar toevoegen, die is voor P in P_1 immers nul. Het komt er dus nog op aan, te bewijzen, dat de laatste term in (7) met ε onbepaald afneemt. Voeren we daarbij x als integratieveranderlijke in, dan komt dat daarop neer, dat wij bewijzen, dat uniform naar P_1

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_1} (b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) \frac{\partial^2 G(P,Q)}{\partial n_P \partial n_Q} dx = 0$$

en het is duidelijk ,dat wij daarbij alleen te letten hebben op het deel van $G(P, Q)$ dat oneindig wordt, als P en Q naar P_1 gaan, dat is op een term die zich gedraagt als $\ln PQ$. Beschouwen wij nu het geval, dat P langs de normaal naar P_1 gaat en noemen we $P_1P = -y_1$, dan is wegens onze onderstellingen over de kromme C

$$PQ^2 = (y_1 - y)^2 + x^2 = y_1^2 + c_1x^2 + \ldots, \tag{8}$$

waarin, als $|y_1|$ beneden zekere grens ligt, c_1 positief is.

Verder is

$$\frac{\partial \ln PQ}{\partial n_Q} = \frac{1}{PQ} \cos(PQ, n_Q) = \frac{1}{PQ} \{ \cos QPP_1 \cos(n_Q, y) +$$
$$+ \sin QPP_1 \sin(n_Q, y) \}$$

en daar

$$tg\,(n_Q, y) = 2cx + \ldots, \text{ dus } \sin(n_Q, y) = 2cx(1 + 4c^2x^2 + \ldots)^{-\frac{1}{2}},$$
$$\cos(n_Q, y) = (1 + 4c^2x^2 \ldots)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\partial \ln PQ}{\partial n_Q} = \frac{(y_1 - cx^2 \ldots)(1 - 2c^2x^2 \ldots) + 2cx^2(1 - 2c^2x^2 \ldots)}{PQ^2} =$$
$$= \frac{y_1(1 - 2c^2x^2 \ldots) + cx^2(1 - \ldots)}{(y_1^2 + c_1x^2 + \ldots)}$$

en, bedenkende dat differentiëeren naar n_P neerkomt op differentiëeren naar y

$$\frac{\partial^2 \ln PQ}{\partial n_P\, \partial n_Q} = -\frac{y_1^2(1 - 2c^2x^2 \ldots) + y_1(2cx^2 \ldots) - c_1x^2(1 + \ldots)}{(y_1^2 + c_1x^2 + \ldots)^2} \quad \ldots \tag{9}$$

en

$$(b_1x + b_2x^2 + \ldots)\frac{\partial^2 \ln PQ}{\partial n_P\, \partial n_Q} =$$
$$\frac{-y_1^2(b_1x + \beta_2x^2 + \ldots) - y_1(2b_1cx^3 + \gamma_2x^4 \ldots) + (b_1 c_1 x^3 + \ldots)}{(y_1^2 + c_1x^2 + \ldots)^2}.$$

Wij hebben nu

$$\int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_1} \frac{y_1^2 b_1 x}{(y_1^2 + c_1x^2)^2} dx = 0,$$

onafhankelijk van y_1 en van ε_1 en hetzelfde geldt voor alle termen met oneven machten van x. Verder

$$\left| \beta_2 \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_1} \frac{y_1^2 x^2}{(y_1^2 + c_1x^2)^2} dx \right| < |\beta_2| \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_1} \frac{dx}{4|c_1|} = \frac{\varepsilon_1}{2} \left| \frac{\beta_2}{c} \right|,$$

en

$$\left|\gamma_2 \int\limits_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_1} \frac{y_1 x^4}{(y_1^2 + c_1 x^2)^2} dx\right| < |y_1 \gamma_2| \int\limits_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_1} \frac{1}{c_1^2} dx = 2\varepsilon_1 \left|\frac{y_1 \gamma_2}{c_1^2}\right|,$$

waaruit blijkt, dat ook deze termen, uniform naar y_1, met ε_1 tot nul naderen en hetzelfde geldt voor alle termen, die hoogere machten van x bevatten.

Inderdaad komt dus de eerst gegeven definitie van de integraal in vergelijking (6) op hetzelfde neer als het vervangen van P door P_1 en het voorschrijven, dat de hoofdwaarde moet genomen worden. De hoofdwaarde van een oneigenlijke integraal over de kromme C, zooals in (6) voorkomt, zullen wij aanduiden door het teeken $\int\limits_C'$. Brengen wij deze wijziging aan, dan ontstaat een integraalvergelijking, waaruit wij de functie $u_{1,c}$ kunnen bepalen. Integraalvergelijkingen, waarin van de er in voorkomende integraal de hoofdwaarde bedoeld wordt, komen reeds voor bij POINCARÉ in het Traité de Mécanique Céleste (T III p. 251, in het hoofdstuk over eb en vloed.). Zij zijn uitvoerig behandeld door G. BERTRAND (Ann. de l'Ecole Normale T 40. 1923). Om nu tot het bestaan der oplossing te kunnen besluiten, moeten wij ons nog overtuigen, dat de bijbehoorende homogene integraalvergelijking

$$2 r_P \frac{\partial r_{P_1}}{\partial n_{P_1}} u_{1,c}(P_1) + \frac{1}{2\pi} \int\limits_C' (r_Q^2 - r_{P_1}^2)\, u_{1,c}(Q)\, \frac{\partial^2 G(P_1, Q)}{\partial n_P\, \partial n_Q}\, ds = 0. \quad (10)$$

geen oplossing heeft behalve $u_{1,c} = 0$. Was dat wel het geval, m.a.w. was -1 een eigenwaarde van den kern

$$\frac{1}{4\pi} \frac{r_Q^2 - r_{P_1}^2}{r_{P_1} \dfrac{\partial r_{P_1}}{\partial n_{P_1}}} \frac{\partial^2 G(P_1, Q)}{\partial n_{P_1}\, \partial n_Q},$$

dan zou (6) in het algemeen geen oplossing hebben, maar men zou bijzondere functies $f_2 - \frac{\partial F_1}{\partial n}$ kunnen construeeren, namelijk orthogonaal op de bijbehoorende eigenfuncties, waarbij de integraalvergelijking (6) oneindig veel oplossingen zou toelaten. Dan zou ook, zooals zoo dadelijk zal blijken, het vraagstuk, u zoo te bepalen, dat $\Delta^2 u = 0$ en aan C, $u = f_1$, $\frac{\partial u}{\partial n} = f_2$ oneindig veel oplossingen toelaten en wij hebben bewezen [4]), dat dat onmogelijk is.

Als op deze wijze $u_{1,c}$ bepaald is, geeft (1) $u_{0,c}$ waardoor volgens het theorema van DIRICHLET de functies u_1 en u_0 en dus ook u gevonden worden.

---

[4]) Zie l.c. noot [1]).

Uit de onoplosbaarheid van de vergelijking (10) kunnen wij nog een gevolgtrekking maken. Schrijven wij die vergelijking in den vorm

$$2\, r_{P_1} \frac{\partial r_{P_1}}{\partial n_{P_1}} u_{1,c}(P_1) - \frac{r_{P_1}^2}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_{P_1}} \int_C' u_{1,c}(Q) \frac{\partial G(P_1, Q)}{\partial n_Q} ds =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_{P_1}} \int_C' r_Q^2\, u_{1,c}(Q) \frac{\partial G(P_1, Q)}{\partial n_Q} ds$$

of

$$\frac{\partial}{\partial n_{P_1}} \{ r_{P_1}^2\, u_{1,c}(P_1) \} = \frac{\partial \Psi(P_1)}{\partial n_{P_1}},$$

waarbij $\Psi(P)$ de harmonische functie voorstelt, die aan de kromme C de waarden $r^2 u_{1,c}$ aanneemt, dan blijkt, dat wij het gevondene ook kunnen uitspreken in den vorm van de volgende stelling.

Er bestaat, behalve de constante 0, geen harmonische functie u, zoodanig dat aan de gesloten kromme C de functie $r^2 u$ overal dezelfde normale afgeleide heeft als de functie, die binnen C harmonisch is en aan C overal gelijk is aan $r^2 u$.

§ **2.** Wij kunnen nu de functie u, die binnen C voldoet aan $\triangle^2 u = 0$, terwijl aan C $u = f_1, \frac{\partial u}{\partial n} = f_2$, voorstellen door een integraal, wanneer we een op dat vraagstuk betrekking hebbende functie van GREEN $H_2(P,Q)$ invoeren. Dat geschiedt door de volgende definitie.

Voor willekeurige punten P en Q binnen C geldt:

1⁰ $\triangle^2 H_2(P,Q) = 0$, als $P \neq Q$, (de differentiaties hebben betrekking op de coördinaten van P)

2⁰ als $H_2(P,Q) = \varrho^2 ln \varrho + h_2(P,Q)$, waarbij ϱ den afstand van P tot het willekeurige maar vaste punt Q binnen C voorstelt, heeft h_2 doorloopende partieële afgeleiden tot die van de vierde orde inclusief, als $P \to Q$.

3⁰ $H_2(P,Q)$ en $\frac{\partial H_2(P,Q)}{\partial n}$ gaan naar nul, als P naar eenig punt van C gaat.

Het is duidelijk, dat wij om H_2 te bepalen, slechts h_2 hebben te bepalen, zoodanig dat binnen C $\triangle^2 h_2 = 0$ en aan C $h_2 = -\varrho^2 ln\, \varrho$.

$$\frac{\partial h_2}{\partial n} = -(2\, ln\, \varrho + 1) \frac{\partial \varrho}{\partial n},$$

hetgeen volgens het voorgaande mogelijk is.

Om nu de functie u, waarvan in het vorige sprake was, uit te drukken met behulp van H_2 leiden we vooreerst uit het theorema van GREEN

$$\int (U \triangle V - V \triangle U)\, d\sigma = \int \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds \qquad (11)$$

een hulpstelling af. Vervangen we V door $\triangle U'$, dan komt er

$$\int (U \triangle^2 U' - \triangle U \triangle U')\, d\sigma = \int \left(U \frac{\partial \triangle U'}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial n} \triangle U' \right) ds,$$

waaruit, door verwisseling van U en U',

$$\int (\triangle U \triangle U' - U' \triangle^2 U)\, d\sigma = \int \left(\triangle U \frac{\partial U'}{\partial n} - \frac{\partial \triangle U}{\partial n} U' \right) ds,$$

en nu door optelling

$$\int (U \triangle^2 U' - U' \triangle^2 U)\, d\sigma =$$

$$= \int \left(U \frac{\partial \triangle U'}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} \triangle U' + \triangle U \frac{\partial U'}{\partial n} - \frac{\partial \triangle U}{\partial n} U' \right) ds. \quad (12)$$

Nemen wij hierin nu voor U de gevraagde functie u, voor U' de functie $H_2(P, Q)$ en voor het integratiegebied het gebied tusschen C en een cirkel om Q met een zoo kleinen straal δ, dat die geheel binnen C valt, dan wordt het linkerlid nul. De integraal rechts moet genomen worden langs C in positieven, langs den cirkel in negatieven zin. Voor de integraal langs C leveren de twee laatste termen van de integrand niets op wegens de definitie van H_2. Om de integraal over den cirkel te vinden, merken we vooreerst op, dat die onafhankelijk van δ is. Stellen we verder $H_2 = \varrho^2 ln\varrho + h_2$, dan zien we, dat de bijdrage van de termen, die van h afkomstig zijn, met δ tot nul nadert. Aan den cirkel is verder, als wij nu weer de normaal naar buiten trekken en daarbij den omloopszin van de integratie omkeeren,

$$\frac{\partial \varrho^2 \ln \varrho}{\partial n} = \delta\, (2 \ln \delta + 1), \quad \triangle \varrho^2 \ln \varrho = 4 \ln \delta + 4, \quad \frac{\partial}{\partial n} \triangle \varrho^2 \ln \varrho = \frac{4}{\delta},$$

waaruit blijkt, dat ook daarbij alleen de eerste term van de integrand iets oplevert en wel $8\pi u(Q)$. Wij vinden dus

$$8\pi u\,(Q) = - \int_C \left(u \frac{\partial \triangle H_2}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} \triangle H_2 \right) ds. \quad (13)$$

Uit de formule (12) kunnen wij ook op bekende wijze de wederkeerigheidseigenschap $H_2(P, Q) = H_2(Q, P)$ afleiden.