Mathematics. — *Over het bestaan der oplossing van $\Delta^k u = 0$, die met haar $k-1$ eerste normale afgeleiden gegeven waarden aanneemt in de punten van een gegeven gesloten kromme.* III. By H. BREMEKAMP. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of January 26, 1946.)

§ 5. Wij gaan nu over tot het bewijs van het bestaan der oplossing van $\Delta^{\nu+1} u = 0$ waarbij aan C

$$u, \frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}, \ldots, \frac{\partial^\nu u}{\partial n^\nu}$$

gegeven analytische functies zijn. Wij zullen dat bewijs geven voor ν even $\nu = 2\mu$, het geval $\nu = 2\mu + 1$ eischt slechts onbeduidende veranderingen. Omdat $\Delta^{\nu+1} u = 0$, kunnen wij stellen

$$u = r^2 v_0 + u_0,$$

waarbij $\Delta^\nu v_0 = 0$ en $\Delta u_0 = 0$.

Volgens de vorige § is dus (we nemen nu aan, dat wij onze stelling reeds voor de vergelijking $\Delta^\nu u = 0$ bewezen hebben)

$$2^{2\nu-1}(\nu-1)!^2 \pi v_0(Q) = \int_C \Big\{ V_0(P) \frac{\partial \Delta^{\nu-1} H_\nu(P,Q)}{\partial n_P} - \frac{\partial v(P)}{\partial n} \Delta^{\nu-1} H_\nu(P,Q) +$$

$$+ \Delta v_0(P) \frac{\partial \Delta^{\nu-2} H(P,Q)}{\partial n_P} \ldots - \frac{\partial \Delta^{\mu-1} v_0(P)}{\partial n_P} \Delta^\mu H_\nu(P,Q) \Big\} ds.$$

Uit de gegevens aan C leiden we nu af

$$u = r^2 v_0 + u_0 = f_1, \; \frac{\partial u}{\partial n} = 2r \frac{\partial r}{\partial n} v_0 + r^2 \frac{\partial v_0}{\partial n} + \frac{\partial u_0}{\partial n} = f_2, \ldots$$

$$\frac{\partial^\nu u}{\partial n^\nu} = \frac{\partial^\nu (r^2 v_0 + u_0)}{\partial n^\nu} = f_{\nu+1},$$

en dus ook

$$\Delta u = 4 v_0 + 4 a r \frac{\partial v_0}{\partial n} + r^2 \Delta v_0 = \varphi_2,$$

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial n} = 8 \frac{\partial v_0}{\partial n} + 4 a r \frac{\partial^2 v_0}{\partial n^2} + 2 a r \Delta v_0 + r^2 \frac{\partial \Delta v_0}{\partial n} = \varphi_3,$$

waarbij $a = \cos(n, r)$ een in elk punt der kromme bekende functie is,

$$\Delta^2 u = 16 \Delta v_0 + 8ar \frac{\partial \Delta v_0}{\partial n} + r^2 \Delta^2 v_0 = \varphi_4,$$

$$\frac{\partial \Delta^2 u}{\partial n} = 24 \frac{\partial \Delta v_0}{\partial n} + 8ar \frac{\partial^2 \Delta v_0}{\partial n^2} + 2ar \Delta^2 v_0 + r^2 \frac{\partial \Delta^2 v_0}{\partial n} = \varphi_5,$$

. . . .

$$\Delta^k u = 4k^2 \Delta^{k-1} v_0 + 4kar \frac{\partial \Delta^{k-1} v_0}{\partial n} + r^2 \Delta^k v_0 = \varphi_{2k},$$

$$\frac{\partial \Delta^k u}{\partial n} = 4k(k+1) \frac{\partial \Delta^{k-1} v_0}{\partial n} + 4kar \frac{\partial^2 \Delta^{k-1} v_0}{\partial n^2} + 2ar \Delta^{k-1} v_0 + r^2 \frac{\partial \Delta^k v_0}{\partial n} = \varphi_{2k+1},$$

. . . .

$$\Delta^\mu u = 4\mu^2 \Delta^{\mu-1} v_0 + 4\mu ar \frac{\partial \Delta^{\mu-1} v_0}{\partial n} + r^2 \Delta^\mu v_0 = \varphi_\nu,$$

waarbij $f_1, f_2 \ldots f_{\nu+1}$ en ook $\varphi_2, \varphi_3 \ldots \varphi_\nu$ in elk punt der kromme bekende functies zijn. Men toont de juistheid van die formules gemakkelijk aan met behulp van een Bernoulliaansch bewijs. Voegen wij bij de vergelijkingen, waarvan het tweede lid φ_2 en φ_3 is nog $\Delta v_0 = \frac{\partial^2 v_0}{\partial n^2} + \beta \frac{\partial^2 v_0}{\partial s^2} + \gamma \frac{\partial v_0}{\partial s}$, waarbij ook β en γ weer in elk punt der kromme bekende functies zijn, dan kunnen wij uit deze drie vergelijkingen Δv_0, $\frac{\partial \Delta v_0}{\partial n}$ en $\frac{\partial^2 v_0}{\partial n^2}$ lineair uitdrukken in v_0, $\frac{\partial v_0}{\partial n}$, $\frac{\partial v_0}{\partial s}$ en $\frac{\partial^2 v_0}{\partial s^2}$.

Bij de twee volgende vergelijkingen voegen wij

$$\Delta^2 v_0 = \frac{\partial^2 \Delta v_0}{\partial n^2} + \beta \frac{\partial^2 \Delta v_0}{\partial s^2} + \gamma \frac{\partial \Delta v_0}{\partial s},$$

waardoor we drie vergelijkingen krijgen, waaruit we $\Delta^2 v_0$, $\frac{\partial \Delta^2 v_0}{\partial n}$ en $\frac{\partial^2 \Delta v_0}{\partial n^2}$ kunnen oplossen in Δv_0 en $\frac{\partial \Delta v_0}{\partial n}$ dus ook in v_0, $\frac{\partial v_0}{\partial n}$, $\frac{\partial v_0}{\partial s}$ en $\frac{\partial^2 v_0}{\partial s^2}$. Uit de daarop volgende vergelijkingen vinden we evenzoo $\Delta^2 v$ en $\frac{\partial \Delta^2 v_0}{\partial n}$, zoo gaan we door tot het voorlaatste tweetal, dat $\Delta^{\mu-1} v_0$, en $\frac{\partial \Delta^{\mu-1} v_0}{\partial n}$ oplevert. Door dat alles in de integraalvoorstelling voor $v(Q)$ te substitueeren vinden we

$$v_0(Q) = \int_C \left\{ A\, v_0(P) + B \frac{\partial v_0(P)}{\partial n} + C \frac{\partial v_0(P)}{\partial s} + D \frac{\partial^2 v_0(P)}{\partial s^2} \right\} ds, \quad (27)$$

waarin A, B, C, D bekende functies zijn, opgebouwd uit a, β, γ en H_ν en haar afgeleiden, waarbij wij moeten opmerken, dat in A een term voorkomt met $\frac{\partial \Delta^{\nu-1} H_\nu}{\partial n}$, die, wanneer P en Q tot een zelfde punt van de kromme naderen, een enkelvoudige oneindigheid krijgt. In (27) substitueeren wij nu

$$\frac{\partial v_0}{\partial n} = \frac{f_2}{r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\left(f_1 - \frac{u_0}{r^2}\right) - \frac{\partial u_0}{\partial n} = g_1 + \lambda u_0 - \frac{\partial u_0}{\partial n},$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{f_1}{r^2}\right) + \frac{2}{r^3}\frac{\partial r}{\partial s}.u_0 - \frac{1}{r^2}\frac{\partial u_0}{ds} = \psi + \lambda_1 u_0 - \frac{1}{r^2}\frac{\partial u_0}{\partial s},$$

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial s^2} = \qquad \psi + \lambda_2 u_0 + \varkappa_2 \frac{\partial u_0}{\partial s} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial s^2},$$

waarin g_1, ψ_1, ψ_2, λ, λ_1, λ_2 en $\varkappa_2$ bekende functies zijn. Daar $u_0 = f_1 - r^2 v_0$ en $\Delta u_0 = 0$, hebben we

$$u_0(P) = -\frac{1}{2\pi}\int_C f_0(Q')\frac{\partial G(P,Q')}{\partial n_{Q'}}ds' + \frac{1}{2\pi}\int_C r^2_{Q'} v_0(Q')\frac{\partial G(P,Q')}{\partial n_{Q'}}ds'.$$

De vergelijking (27) wordt dus

$$\begin{aligned} v_0(Q) = \int_C \Bigg[& (Bg_1 + C\psi_1 + D\psi_2) - \frac{1}{2\pi}(\lambda B + \lambda_1 C + \lambda_2 D)\int_C f_1(Q')\frac{\partial G(P,Q')}{\partial n_{Q'}}ds' + \\ & + \frac{1}{2\pi}(\lambda B + \lambda_1 C + \lambda_2 D)\int_C r^2_{Q'} v_0(Q')\frac{\partial G(P,Q')}{\partial n_{Q'}}ds' + \\ & + \Bigg\{ A v_0(P) - \frac{B}{2\pi}\int_C f_1(Q')\frac{\partial^2 G(P,Q')}{\partial n_P\, \partial n_{Q'}}ds' + \frac{B}{2\pi}\int r^2_{Q'} v_0(Q')\frac{\partial^2 G(P,Q')}{\partial n_P\, \partial n_{Q'}}ds' + \\ & + \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{C}{r^2_P} + \varkappa_2 D\right)\int f_0(Q')\frac{\partial^2 G(P,Q')}{\partial s_P\, \partial n'_Q}ds' + \\ & + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{C}{r^2_P} - \varkappa_2 D\right)\int r^2_{Q'} v_0(Q')\frac{\partial^2 G(P,Q')}{\partial s_P\, \partial n'_Q}ds' - \frac{1}{2\pi}\frac{D}{r^2_P}\int f_1(Q')\frac{\partial^3 G(P,Q')}{\partial^2 s_P\, \partial n_{Q'}}ds - \\ & - \frac{1}{2\pi}\frac{D}{r^2_P}\int r^2_{Q'} v_0(Q')\frac{\partial^3 G(P,Q')}{\partial^2 s_P\, \partial n_{Q'}}ds' \Bigg\} \Bigg] ds. \end{aligned}$$

Deze vergelijking is het analogon van (20). Wij zullen ze ook op de zelfde manier behandelen, zoo vinden we b.v.

$$\begin{aligned} & \int \left\{ (\lambda B + \lambda_1 C + \lambda_2 D)\int r^2_{Q'} v_0(Q')\frac{\partial G(P,Q')}{\partial n_{Q'}}ds' \right\} ds = \\ & = \int v_0(Q') r^2_{Q'} \left\{ \int (\lambda B + \lambda_1 C + \lambda_2 D)\frac{\partial G(P,Q')}{\partial n_{Q'}}ds \right\} ds'. \end{aligned}$$

enz., waardoor we geraken tot een integraalvergelijking

$$v_0(Q) = F(Q) + \int_C v_0(Q')\, K(Q, Q')\, ds', \tag{28}$$

waarbij

$$F(Q) = \int_C (Bg_1 + C\psi_1 + D\psi_2)\, ds -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_C \left\{(\lambda B + \lambda_1 C + \lambda_2 D)\int_C f_1(Q')\frac{\partial G(Q, Q')}{\partial n_{Q'}}\, ds'\right\} ds$$

$$-\frac{\lambda}{2\pi}\int_C B\, ds \int_C f_1(Q')\frac{\partial^2 G(Q, Q')}{\partial n_P\, \partial n_{Q'}}\, ds' +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_C \left(-\frac{C}{r^2} + \varkappa_2 D\right) ds \int_C f_1(Q')\frac{\partial^2 G(Q, Q')}{\partial s_Q\, \partial n_{Q'}}\, ds' -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{D}{r_Q^2}\, ds \int f_1(Q')\frac{\partial^3 G(Q, Q')}{\partial^2 s_Q\, \partial n_{Q'}}\, ds',$$

en

$$K(Q, Q') = \frac{1}{2\pi}\, r_{Q'}^2 \left\{\int (\lambda B + \lambda_1 C + \lambda_2 D)\frac{\partial G(Q, Q')}{\partial n_{Q'}} + B\frac{\partial^2 G(Q, Q')}{\partial n_{Q'}\, \partial n_Q} -\right.$$

$$\left. -\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{C}{r_Q^2} - \varkappa_2 D\right)\frac{\partial G(Q, Q')}{\partial n_{Q'}} - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(\frac{D}{r_Q^2}\right)\frac{\partial G(Q, Q')}{\partial n_{Q'}}\right\} ds.$$

Het bewijs van deze formules komt geheel overeen met het behandelde in § 3. Wij merken nog op, dat bij de afleiding van de laatste twee termen in de integrand, na omkeering der integratievolgorde, de binnenintegraal door partieele integratie herleid is.

Uit de vergelijking (28) lossen wij nu op v_{oc} en dan wordt door $r^2 v_{oc} + u_{oc} = f_1$ u_{oc} bekend en daardoor u_0, dus ook

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial n}\right)_C, \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial n^2}\right)_C \cdots \left(\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial n^{\nu-1}}\right)_C$$

en daardoor

$$\frac{\partial}{\partial n}(r^2 v_0), \frac{\partial^2}{\partial n^2}(r^2 v_0)_C \cdots \frac{\partial^{\nu-1}}{\partial n^{\nu-1}}(r^2 v_0)_C$$

en dus ook

$$\left(\frac{\partial v_0}{\partial n}\right)_C, \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial n^2}\right)_C \cdots \left(\frac{\partial^{\nu-1} v_0}{\partial n^{\nu-1}}\right)_C.$$

Stellen wij nu $v_0 = r^2 v_1 + u_1$, waarbij $\triangle^{\nu-1} v_1 = 0$ en $\triangle u_1 = 0$, dan wordt aan C bekend

$$r^2 v_{1C} + u_{1C} = \psi_0, \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)(r^2 v_1)_C + \left(\frac{\partial u_1}{\partial n}\right)_C = \psi_1,$$

$$\ldots\ldots \left(\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial n^{\nu-1}}\right)(r^2 v_1)_C + \left(\frac{\partial^{\nu-1} u_1}{\partial n^{\nu-1}}\right)_C = \psi_{\nu-1}$$

Van deze ν vergelijkingen kan de laatste vervallen, zoodat er nog $\nu - 1$ vergelijkingen overblijven. De functies $\psi, \ldots \psi_{\nu-1}$ zijn namelijk zoo bepaald, dat wanneer wij met behulp van de eerste $\nu - 1$ vergelijkingen v_1 en u_1 zoo bepalen, dat $\triangle^{\nu-1} v_1 = 0$ en $\triangle u_1 = 0$, aan de laatste vanzelf voldaan is. Het vraagstuk u_1 en v_1 uit deze gegevens te bepalen komt overeen met het vraagstuk u_0 en v_0 te bepalen uit de gegevens over u met vervanging van ν door $\nu - 1$. Vervolgens stellen wij $v_1 = r^2 v_2 + u_2$ waarbij $\triangle^{\nu-2} v_2 = 0$ en $\triangle u_2 = 0$, de bepaling van v_2 en u_2 geschiedt dan weer op de zelfde wijze, waarbij de reeds gebruikte gegevens aan den rand ons de noodige $\nu - 2$ vergelijkingen leveren. Zoo gaan we door. Ten laatste komt er $v_{\nu-2} = r^2 v_{\nu-1} + u_{\nu-1}$ met $\triangle v_{\nu-1}$ en $\triangle u_{\nu-1} = 0$.

Het stelsel vergelijkingen, dat wij uit de reeds gebruikte gegevens aan C afleiden (analoog aan de vergelijkingen 21 en 22 in § 3) is dan gelijkwaardig met één vergelijking, daar voegen wij nu de nog niet gebruikte laatste van het stelsel vergelijkingen, dat de gegevens aan C uitdrukt, het stelsel van het begin van § 5, bij ,analoog aan vergelijking 23). Het zoo verkregen stelsel vergelijkingen behandelen we geheel als het stelsel, gevormd door 21, 22 en 23, waardoor we weer geraken tot een vergelijking van POINCARÉ, waaruit we $v_{\nu-1, c}$ oplossen, zoodat $v_{\nu-1}$ en $u_{\nu-1}$ en daardoor ten slotte u bekend worden.

Het geval, dat een der integraalvergelijkingen, die wij bij de behandeling ontmoeten onoplosbaar blijkt, kan zich niet voordoen, anders zouden wij gegevens kunnen construeeren, waarbij het vraagstuk oneindig veel oplossingen toelaat, wat zooals wij weten onmogelijk is.

§ 6. Wanneer we $\triangle$ opvatten als den operator van LAPLACE in drie veranderlijken, heeft de vergelijking $\triangle^k u = 0$ een binnen S geldende (ondubbelzinnig bepaalde *) oplossing, waarbij $u, \frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \cdots \frac{\partial^{k-1} u}{\partial n^{k-1}}$ in de punten van het gegeven gesloten oppervlak S, dat in ieder punt een bepaald raakvlak heeft, gegeven waarden aannemen. Wanneer we, analoog aan het voorgaande, daarbij aannemen, dat, wanneer we in een willekeurig punt van het oppervlak een rechthoekig coördinatenstelsel aanbrengen met de normaal als z-as, in de omgeving van den oorsprong de z van een punt van het oppervlak een analytische functie is van x en y, zoodat we door

*) Cf. H. BREMEKAMP, Over de bepaaldheid der oplossingen van $\triangle^k u = 0$, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 48, 222 (1945).

een draaiing van het coördinatenstelsel om de z-as kunnen krijgen

$$z = ax^2 + by^2 + \ldots,$$

dan hebben we in het voorgaande bijna niets te veranderen. Alleen zullen we den aard der singulariteit der te gebruiken functies van GREEN opnieuw moeten vastleggen. Wij zullen het in § 4 behandelde voor de nu beschouwde vergelijking moeten wijzigen.

Wij bepalen nu een functie $H_\nu\,(P, Q)$ door de volgende eischen:

1°. Als P en Q willekeurige punten binnen het oppervlak S zijn, geldt voor $P \neq Q$, $\triangle^\nu H_\nu (P, Q) = 0$.

2°. Als $P \rightarrow Q$ kan men stellen $H_\nu\,(P, Q) = \varrho^{2\nu-3} + h_\nu\,(P, Q)$, waarbij ϱ den afstand PQ aanwijst en $h_\nu\,(P, Q)$ doorloopende partiëele afgeleiden tot die van de orde 2ν inclusief heeft, h_ν voldoet dus in het geheele gebied binnen S aan $\triangle^\nu h_\nu = 0$.

3°. $H_\nu\,(P, Q), \dfrac{\partial H_\nu (P, Q)}{\partial n}, \dfrac{\partial^2 H_\nu (P, Q)}{\partial n^2} \ldots \dfrac{\partial^{\nu-1} H_\nu (P, Q)}{\partial n^{\nu-1}}$ gaan naar nul, als P naar eenig punt van S gaat.

De hulpstelling

$$\int (U \triangle^\nu U' - U' \triangle^\nu U)\, d\tau = \int \left(U \frac{\partial \triangle^{\nu-1} U'}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial n} \triangle^{\nu-1} U' + \right.$$
$$\left. + \triangle U \frac{\partial \triangle^{\nu-1} U'}{\partial n} - \ldots . \triangle^{\nu-1} U \frac{\partial U'}{\partial n} - \frac{\partial \triangle^{\nu-1} U}{\partial n} U' \right) d\sigma$$

analoog aan de hulpstelling van § 4 wordt op geheel de zelfde manier bewezen. Hierin nemen wij nu voor U de gevraagde functie u, voor U' de functie H_ν en voor het integratiegebied het gebied tusschen het gegeven oppervlak S en een bol om Q met straal δ zoo klein, dat de bol geheel binnen S ligt. Het eerste lid wordt dan nul. In het tweede lid moet de integraal over den bol van teeken omgekeerd worden als we de normaal in de richting naar buiten nemen, waardoor differentiatie naar n op het zelfde neerkomt als differentiatie naar ϱ. De integraal over den bol blijkt weer onafhankelijk van δ en wij berekenen die door δ tot nul te laten naderen. Wij hebben dan aan den bol, als we alleen de grootste termen opschrijven

$$\frac{\partial H_\nu}{\partial \varrho} = (2\nu-3)\, \varrho^{2\nu-4} + \ldots .$$

$$\triangle H_\nu = (2\nu-3)(2\nu-2)\, \varrho^{2\nu-5} + \ldots .$$

$$\triangle^2 H_\nu = (2\nu-5)(2\nu-4)(2\nu-3)(2\nu-2)\, \varrho^{2\nu-7} + \ldots .$$

. . . .

$$\triangle^{\nu-1} H_\nu = (2\nu-2)!\, \frac{1}{\varrho} + \ldots .$$

$$\frac{\partial \triangle^{\nu-1} H^\nu}{\partial \varrho} = -\,(2\nu-2)!\, \frac{1}{\varrho^2} + \ldots .$$

Voor de integraal over den bol in het tweede lid van onze hulpstelling levert dus alleen de eerste term van de integrand iets op en wel $-(2\nu-2)!\,4\pi U(Q)$. Wij vinden dus voor $\nu = 2\mu$

$$4(2\nu-2)!\,\pi\, u(Q) = -\int_S \left(u \frac{\partial \Delta^{\nu-1} H_\nu}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} \Delta^{\nu-1} H_\nu + \right.$$

$$\left. + \Delta u \frac{\partial \Delta^{\nu-2} H_\nu}{\partial n} - \ldots - \frac{\partial \Delta^{\mu-1} u}{\partial n} \Delta^{\mu} H_\nu \right) d\sigma$$

en voor $\nu = 2\mu + 1$.

$$4(2\nu-2)!\,\pi\, u(Q) = -\int_S \left(u \frac{\partial \Delta^{\nu-1} H_\nu}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} \Delta^{\nu-1} H_\nu + \right.$$

$$\left. + \Delta u \frac{\partial \Delta^{\nu-2} H_\nu}{\partial n} - \ldots - \frac{\partial \Delta^{\mu-1} u}{\partial n} \Delta^{\mu} H_\nu + \Delta^{\mu} u \frac{\partial \Delta^{\mu} H_\nu}{\partial n} \right) d\sigma.$$

Zijn nu aan S de waarden van $u, \frac{\partial u}{\partial n}, \ldots \frac{\partial^{\nu-1} u}{\partial n^{\nu-1}}$ gegeven, dan kunnen wij daaruit de waarden vinden van alle partiëele afgeleiden tot inclusief, die van de orde $\nu - 1$. Daardoor worden voor $\nu = 2\mu$ ook $\frac{\partial u}{\partial n}, \Delta u, \frac{\partial \Delta u}{\partial n} \ldots \frac{\partial \Delta^{\mu-1} u}{\partial n}$ bekend en voor $\nu = 2\mu + 1$, $\frac{\partial u}{\partial n}$, $\Delta u, \ldots \Delta^{\mu} u$. Door de laatste formules, die het analogon zijn van (25) en (26) wordt de waarde van u in een willekeurig punt binnen S uitgedrukt in de gegevens aan S.

Overigens loopt het bewijs geheel zoals voor het in de vorige §§ behandelde geval.