Cristallography. — *Afleiding van het symbool van een kristalvlak, wanneer de symbolen van vier andere vlakken, benevens de hoeken van het beschouwde vlak met twee dier vlakken, bekend zijn.* By W. F. DE JONG. (Communicated by Prof. C. B. BIEZENO.)

(Communicated at the meeting of February 23, 1946.)

1. *Inleiding.* Wanneer van vier tautozonale vlakken de onderlinge hoeken bekend zijn en van drie dezer vlakken zijn de symbolen gegeven, dan kan het symbool van het vierde vlak met behulp van de dubbelverhoudingen van GAUSZ–MILLER [1]) afgeleid worden zonder dat de kristalelementen of andere constanten vooraf bepaald worden. Het meer algemeene probleem, waarbij de onderlinge hoeken van vijf willekeurige en de symbolen van vier dezer vlakken gegeven zijn en het symbool van het vijfde vlak wordt gevraagd, kan op overeenkomstige wijze worden opgelost met behulp van dubbelverhoudingen, welke wij in deze korte verhandeling zullen afleiden (zie nr. 3). In nr. 4 wordt een toepassing van het vraagstuk gegeven.

2. *Vier tautozonale vlakken.* Een dubbelverhouding van de sinussen der hoeken tusschen vier tautozonale vlakken h_1 $(h_1\, k_1\, l_1)$, h_2 $(h_2\, k_2\, l_2)$, h_3 $(h_3\, k_3\, l_3)$ en h_4 $(h_4\, k_4\, l_4)$ kan geschreven worden [2]):

$$\frac{\sin(1\,2)}{\sin(1\,4)} : \frac{\sin(3\,2)}{\sin(3\,4)} = \frac{\begin{vmatrix} h_1\, k_1\, l_1 \\ h_2\, k_2\, l_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_1\, k_1\, l_1 \\ h_4\, k_4\, l_4 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} h_3\, k_3\, l_3 \\ h_2\, k_2\, l_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_3\, k_3\, l_3 \\ h_4\, k_4\, l_4 \end{vmatrix}}$$

of ook

$$\frac{\sin(1\,2)\sin(3\,4)}{\sin(2\,3)\sin(1\,4)} = \frac{\begin{vmatrix} h_1\, k_1\, l_1 \\ h_2\, k_2\, l_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_3\, k_3\, l_3 \\ h_4\, k_4\, l_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_2\, k_2\, l_2 \\ h_3\, k_3\, l_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_1\, k_1\, l_1 \\ h_4\, k_4\, l_4 \end{vmatrix}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarbij van elk der matrices dezelfde kolom geschrapt wordt, zoodat de dubbelverhouding der sinussen op drie wijzen in determinanten met indices van de vlakken wordt uitgedrukt; sin (12) geeft aan den sinus van den hoek tusschen de vlakken h_1 en h_2; enz.

---

1) C. F. GAUSZ, Werke II, 308 (1831).
W. H. MILLER, A. Treatise on Crystallography, 12 (1839).

2) P. TERPSTRA, Leerboek der geometrische kristallografie, 111 e.v. (1927).

Voor het bewijs kunnen wij van de reciproke tralie gebruik maken [3]; in deze tralie, waarvan de assen A^*, B^* en C^* en de aslengten a^*, b^* en c^* mogen zijn, worden de vier tautozonale vlakken voorgesteld door vier punten van één tralievlak, dat ook den oorsprong O^* bevat (fig. 1); de voerstralen van O^* naar de punten zijn de loodlijnen op de overeenkomstige kristalvlakken. Wordt, door vermenigvuldiging van de indices van elk vlak met eenzelfde getal, de eerste index in de vier symbolen gelijk gemaakt, n.l. aan $h_1\, h_2\, h_3\, h_4$, dan liggen de traliepunten, welke de vier vlakken voorstellen, op een rechte tralielijn, evenwijdig aan het coördinatenvlak $B^*\, O^*\, C^*$. Projecteert men nu die punten, evenwijdig aan de C^*-as, op het vlak $A^*\, O^*\, B^*$, dan zijn de symbolen van de projecties $(h_1\, h_2\, h_3\, h_4 \quad k_1\, h_2\, h_3\, h_4 \quad 0)$, enz.

Elke dubbelverhouding der sinussen van de hoeken tusschen de voerstralen naar deze projecties is gelijk aan die der sinussen van de hoeken tusschen de voerstralen naar de oorspronkelijke punten $(h_1\, k_1\, l_1)$, enz., en gelijk aan die van de overeenkomstige afstanden tusschen de projecties. Wij krijgen dus:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\sin(1\,2)\sin(3\,4)}{\sin(2\,3)\sin(1\,4)} = \frac{\text{afst}(1\,2)\,.\,\text{afst}(3\,4)}{\text{afst}(2\,3)\,.\,\text{afst}(1\,4)} = \\ &= \frac{\{(k_1\, h_2\, h_3\, h_4 - k_2\, h_1\, h_3\, h_4)\, b^*\}\,\{(k_3\, h_1\, h_2\, h_4 - k_4\, h_1\, h_2\, h_3)\, b^*\}}{\{(k_2\, h_1\, h_3\, h_4 - k_3\, h_1\, h_2\, h_4)\, b^*\}\,\{(k_1\, h_2\, h_3\, h_4 - k_4\, h_1\, h_2\, h_3)\, b^*\}} = \\ &= \frac{\begin{vmatrix} h_1 & k_1 \\ h_2 & k_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} h_3 & k_3 \\ h_4 & k_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_2 & k_2 \\ h_3 & k_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} h_1 & k_1 \\ h_4 & k_4 \end{vmatrix}} \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Op overeenkomstige wijze worden de twee andere uitdrukkingen van de beschouwde dubbelverhouding bepaald.

3. *Vijf willekeurige vlakken.* Vermenigvuldigt men de indices van vijf willekeurige vlakken $h_0\ (h_0\, k_0\, l_0)$, $h_1\ (h_1\, k_1\, l_1)$, $h_2\ (h_2\, k_2\, l_2)$, $h_3\ (h_3\, k_3\, l_3)$ en $h_4\ (h_4\, k_4\, l_4)$, met zoodanige getallen, dat in alle symbolen de eerste indices gelijk worden, n.l. aan $h_0\, h_1\, h_2\, h_3\, h_4$, dan liggen de vijf punten H_0, H_1, H_2, H_3 en H_4, welke in de reciproke tralie de vlakken voorstellen, in één tralievlak, evenwijdig aan het coördinatenvlak $B^*\, O^*\, C^*$ (fig. 2). Er worden dan door die punten en den oorsprong vier viervlakken bepaald, t.w. $O^*\, H_0\, H_1\, H_2$, $O^*\, H_0\, H_2\, H_3$, $O^*\, H_0\, H_3\, H_4$ en $O^*\, H_0\, H_1\, H_4$.

Nu is de inhoud van een viervlak (fig. 3):

$$I = {}^1/_6\, r_1\, r_2\, r_3\, \text{Sin}\,(1\,2\,3). \qquad (3)$$

waarin Sin (1 2 3) het argument of de ruimtesinus van den drievlakshoek

[3]) Zt. f. Krist. (A) **101**, 317 (1939).

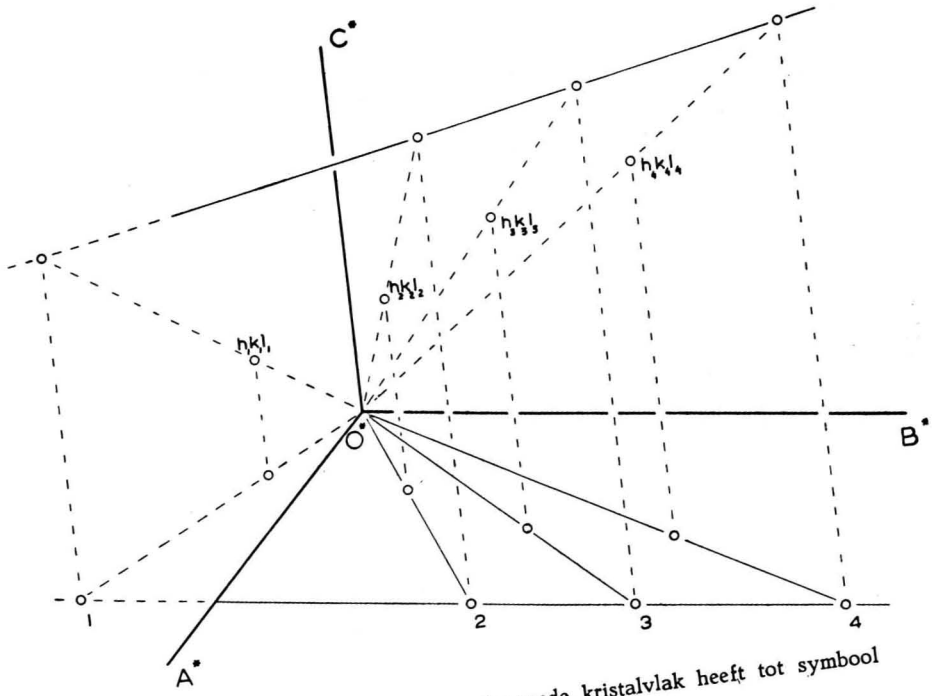

Fig. 1. Het met punt 1 overeenkomende kristalvlak heeft tot symbool ($h_1\, h_2\, h_3\, h_4 \quad k_1\, h_2\, h_3\, h_4 \quad 0$).

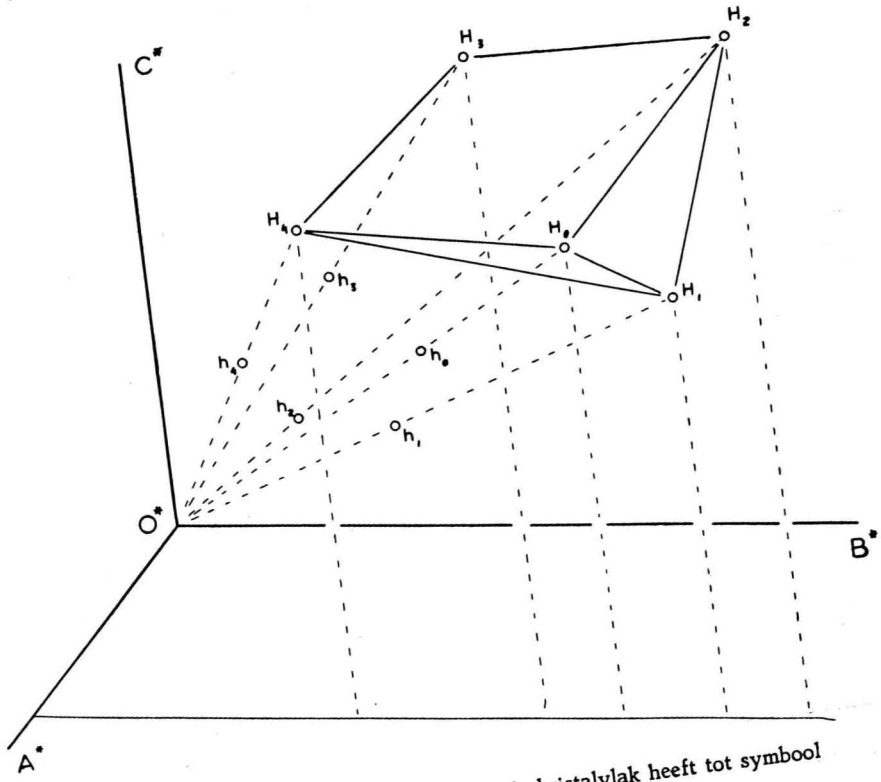

Fig. 2. Het met punt H_0 overeenkomende kristalvlak heeft tot symbool ($h_0\, h_1\, h_2\, h_3\, h_4 \quad k_0\, h_1\, h_2\, h_3\, h_4 \quad l_0\, h_1\, h_2\, h_3\, h_4$).

$r_1\ r_2\ r_3$ is:

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{Sin}\,(1\ 2\ 3) = \\ &= \sqrt{\{1 - \cos^2(1\ 2) - \cos^2(2\ 3) - \cos^2(3\ 1) + 2\cos(1\ 2)\cos(2\ 3)\cos(3\ 1)\}} = \\ &\qquad\qquad = \sin\,(1\ 2)\sin\,(2\ 3)\sin\,(1\ 2\ 3)\end{aligned}\right\} (4)$$

sin (1 2 3) is de sinus van den standhoek op de ribbe r_2.

Voor onze vier viervlakken geldt derhalve:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{{}^1/_6\, r_1\, r_0\, r_2\, \mathrm{Sin}\,(1\ 0\ 2) \times {}^1/_6\, r_3\, r_0\, r_4\, \mathrm{Sin}\,(3\ 0\ 4)}{{}^1/_6\, r_2\, r_0\, r_3\, \mathrm{Sin}\,(2\ 0\ 3) \times {}^1/_6\, r_1\, r_0\, r_4\, \mathrm{Sin}\,(1\ 0\ 4)} = \\ &= \frac{\mathrm{Sin}\,(1\ 0\ 2)\,\mathrm{Sin}\,(3\ 0\ 4)}{\mathrm{Sin}\,(2\ 0\ 3)\,\mathrm{Sin}\,(1\ 0\ 4)} = \frac{\mathrm{opp}\,\triangle\, H_1\, H_0\, H_2 \times \mathrm{opp}\,\triangle\, H_3\, H_0\, H_4}{\mathrm{opp}\,\triangle\, H_2\, H_0\, H_3 \times \mathrm{opp}\,\triangle\, H_1\, H_0\, H_4}\end{aligned}\right\}. \quad (5)$$

Het oppervlak van een driehoek, waarvan de hoekpunten gevormd worden door drie punten $m_1\, n_1$; $m_2\, n_2$ en $m_3\, n_3$ van een tralievlak met netparameters a en b en netmaasoppervlak O_p, wordt voorgesteld door

$$\mathrm{opp}\,(1\ 2\ 3) = {}^1/_2 \begin{vmatrix} m_1 & n_1 & 1 \\ m_2 & n_2 & 1 \\ m_3 & n_3 & 1 \end{vmatrix} O_p$$

De bovenstaande verhouding wordt dus:

$$\frac{\mathrm{Sin}\,(1\ 0\ 2)\,\mathrm{Sin}\,(3\ 0\ 4)}{\mathrm{Sin}\,(2\ 0\ 3)\,\mathrm{Sin}\,(1\ 0\ 4)} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} k_1\, h_0\, h_2\, h_3\, h_4 & l_1\, h_0\, h_2\, h_3\, h_4 & 1 \\ k_0\, h_1\, h_2\, h_3\, h_4 & l_0\, h_1\, h_2\, h_3\, h_4 & 1 \\ k_2\, h_0\, h_1\, h_3\, h_4 & l_2\, h_0\, h_1\, h_3\, h_4 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k_3\, h_0\, h_1\, h_2\, h_4 & l_3\, h_0\, h_1\, h_2\, h_4 & 1 \\ k_0\, h_1\, h_2\, h_3\, h_4 & l_0\, h_1\, h_2\, h_3\, h_4 & 1 \\ k_4\, h_0\, h_1\, h_2\, h_3 & l_4\, h_0\, h_1\, h_2\, h_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k_2\, h_0\, h_1\, h_3\, h_4 & l_2\, h_0\, h_1\, h_3\, h_4 & 1 \\ k_0\, h_1\, h_2\, h_3\, h_4 & l_0\, h_1\, h_2\, h_3\, h_4 & 1 \\ k_3\, h_0\, h_1\, h_2\, h_4 & l_3\, h_0\, h_1\, h_2\, h_4 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k_1\, h_0\, h_2\, h_3\, h_4 & l_1\, h_0\, h_2\, h_3\, h_4 & 1 \\ k_0\, h_1\, h_2\, h_3\, h_4 & l_0\, h_1\, h_2\, h_3\, h_4 & 1 \\ k_4\, h_0\, h_1\, h_2\, h_3 & l_4\, h_0\, h_1\, h_2\, h_3 & 1 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} h_1\, k_1\, l_1 \\ h_0\, k_0\, l_0 \\ h_2\, k_2\, l_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_3\, k_3\, l_3 \\ h_0\, k_0\, l_0 \\ h_4\, k_4\, l_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_2\, k_2\, l_2 \\ h_0\, k_0\, l_0 \\ h_3\, k_3\, l_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_1\, k_1\, l_1 \\ h_0\, k_0\, l_0 \\ h_4\, k_4\, l_4 \end{vmatrix}}$$

De rationaliteit van deze dubbelverhouding is reeds door GAUSZ aangegeven [4]), zonder dat echter de waarde werd bepaald.

Vervangt men nog de ruimtesinussen door hun waarden (4), dan vindt

---

[4]) Vgl. TH. LIEBISCH, Geometrische Krystallographie, 69 (1881).

men tenslotte:

$$\frac{\sin(1\,0\,2)\sin(3\,0\,4)}{\sin(2\,0\,3)\sin(1\,0\,4)} = \frac{\begin{vmatrix} h_1\,k_1\,l_1 \\ h_0\,k_0\,l_0 \\ h_2\,k_2\,l_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_3\,k_3\,l_3 \\ h_0\,k_0\,l_0 \\ h_4\,k_4\,l_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_2\,k_2\,l_2 \\ h_0\,k_0\,l_0 \\ h_3\,k_3\,l_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_1\,k_1\,l_1 \\ h_0\,k_0\,l_0 \\ h_4\,k_4\,l_4 \end{vmatrix}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Hierin is sin (1 0 2) de sinus van den standhoek op de snijlijn van de vlakken door de loodlijnen op h_1 en h_0 eenerzijds en h_0 en h_2 anderzijds,

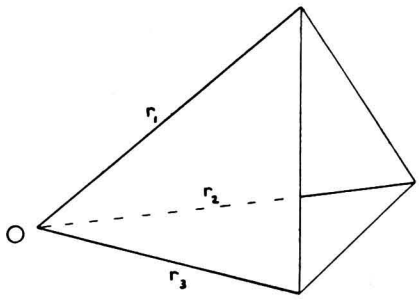

Fig. 3.

m.a.w. de sinus van den hoek der bundelvlakken $[h_1\ h_0]$ en $[h_0\ h_2]$, in de stereografische projectie die van den hoek der bundelcirkels $[h_1\ h_0]$ en $[h_0\ h_2]$.

4. *Toepassing.* Wij keeren nu terug tot het in den aanhef genoemde vraagstuk. Zijn in stereografische projectie gegeven de vier vlakken h_1 $(h_1\,k_1\,l_1)$, h_2 $(h_2\,k_2\,l_2)$, h_3 $(h_3\,k_3\,l_3)$ en h_4 $(h_4\,k_4\,l_4)$, waarvan niet drie

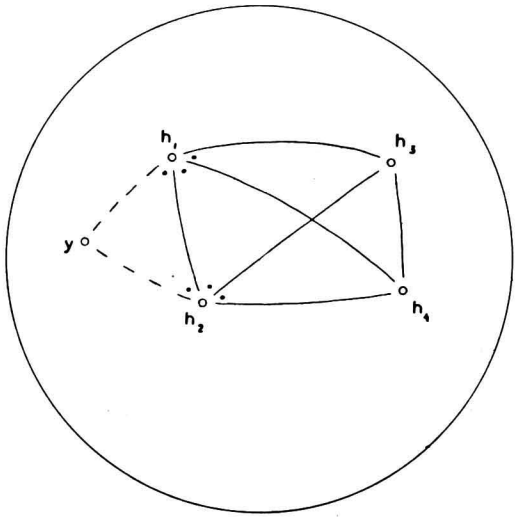

Fig. 4.

in één bundel zijn gelegen (fig. 4), en wordt gevraagd het symbool van het vlak y $(h_y\, k_y\, l_y)$, waarvan de hoeken met h_1 en h_2 zijn gemeten, dan berekent men trigonometrisch de met een punt voorziene hoeken tusschen de bundelcirkels en past in de punten h_1 en h_2 de formule der dubbelverhouding (6) toe; voor h_1 krijgt men dan:

$$\frac{\sin(y\,1\,2)\sin(3\,1\,4)}{\sin(2\,1\,3)\sin(y\,1\,4)} = \frac{\begin{vmatrix} h_y & k_y & l_y \\ h_1 & k_1 & l_1 \\ h_2 & k_2 & l_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_3 & k_3 & l_3 \\ h_1 & k_1 & l_1 \\ h_4 & k_4 & l_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_2 & k_2 & l_2 \\ h_1 & k_1 & l_1 \\ h_3 & k_3 & l_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_y & k_y & l_y \\ h_1 & k_1 & l_1 \\ h_4 & k_4 & l_4 \end{vmatrix}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

en voor h_2 een overeenkomstige uitdrukking.

Uit de twee vergelijkingen kunnen de verhoudingen $h_y : k_y : l_y$ worden berekend.

Voorbeeld. Van axiniet zijn gegeven [5]) de hoeken tusschen de vlakken a $(1\,0\,0)$; x $(1\,1\,1)$; r $(1\,\bar{1}\,1)$ en s $(2\,0\,1)$ en verder $a \wedge y = 28°\,55'$ en $r \wedge y = 45°\,15'$.

In a en r worden de hoeken tusschen de bundelcirkels met behulp van boldriehoeksmeting berekend, men vindt dan de waarden als in fig. 5

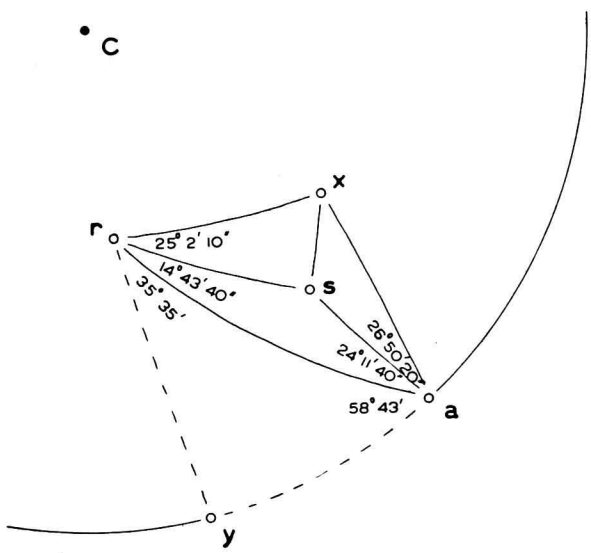

Fig. 5. Het vlak y wordt door DANA [5]) M genoemd.

aangegeven.

---

[5]) J. D. DANA, A System of Mineralogy, 527 (1914).

Er geldt dan in a:

$$\frac{\sin 58^\circ\, 43' \sin 26^\circ\, 50'\, 20''}{\sin 24^\circ\, 11'\, 40'' \sin 109^\circ\, 45'} = \frac{\begin{vmatrix} h_y & k_y & l_y \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \bar{1} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \bar{1} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_y & k_y & l_y \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

Hieruit volgt

$$\frac{k_y + l_y}{k_y - l_y} = 1{,}0003$$

In r wordt overeenkomstig gevonden:

$$\frac{k_y + l_y}{l_y - h_y} = 1{,}0012$$

Na geringe afronding komt er

$$h_y : k_y : l_y = 1 : \bar{1} : 0$$

Grafisch kan de waarde der dubbelverhouding sneller worden gevonden, in a leest men de waarde 1 af (fig. 6).

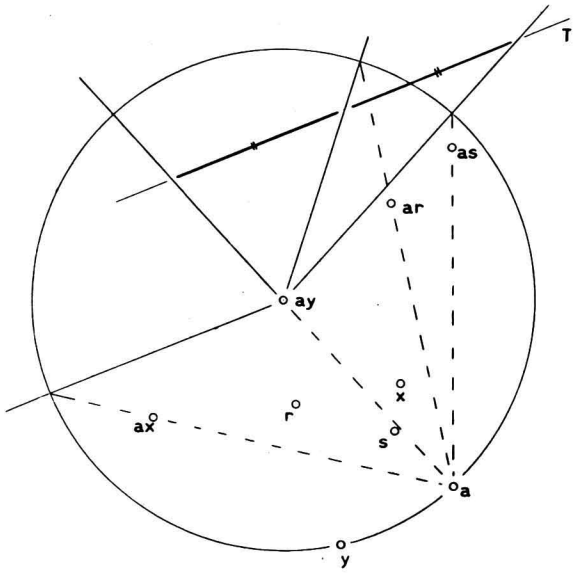

Fig. 6. De punten ax, enz. zijn de polen van de bundels $[ax]$, enz. De transversaal T is evenwijdig aan één der vier stralen uit het middelpunt getrokken; de drie andere stralen bepalen stukken die zich verhouden als 1.

Prof. Ir. J. A. GRUTTERINK dank ik hartelijk voor zijn belangstelling en ondersteuning.

Delft. *Laboratorium voor Delfstofkunde der Technische Hoogeschool.*