Mathematics. — *Generalisatie van enkele elementaire stellingen in de n-aire Ω-meetkunde.* By E. M. BRUINS. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of October 27, 1945.)

§ 1. *Fundamenteele invarianten.*

In het n-air gebied heeft het puntstelsel $(u'x_i)$ $i = 1, 2, \ldots$ aangevuld met het quadriek $(\Omega' x)^2$ de invarianten

$$(\Omega' \Omega)^2 = (\Omega'_1 \Omega'_2 \ldots \Omega'_n)^2 = D, \qquad (x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n})$$
$$\Omega_{ik} = (\Omega' x_i)(\Omega' x_k) \qquad i, k = 1, 2, \ldots$$

Uit deze invarianten kan men symmetrische invarianten vormen

$$\triangle (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_d}) = \det | \Omega_{rs} | \qquad r, s = i_1, i_2, \ldots i_d.$$

Voor $d > n$ is $\triangle \equiv 0$ wegens de lineaire afhankelijkheid van

$$x_{i_{n+1}}, \ldots x_{i_d} \text{ van } x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_n}.$$

Voor $d = n$ is

$$\triangle = (\Omega'_1 x_{i_1}) \ldots (\Omega'_n x_{i_n}) \,.\, \det | (\Omega'_r x_s) | \qquad r, s = i_1, i_2, \ldots i_d$$
$$= \frac{1}{n!} (\Omega'_1 \Omega'_2 \ldots \Omega'_n)^2 (x_{i_1} \ldots x_{i_n})^2$$

en derhalve is voor $D \neq 0$ dan en slechts dan $\triangle = 0$ als $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$ in één G_m met $m < n$ liggen.

Voor $d < n$ is

$$\triangle = (\Omega'_1 x_{i_1}) \ldots (\Omega'_d x_{i_d}) \,.\, \det | (\Omega'_r x_s) | \qquad r, s = i_1, i_2, \ldots i_d$$
$$= \frac{1}{d!} (\Omega'_1 \Omega'_2 \ldots \Omega'_d \, p_1'^{\,n-d}) (\Omega'_1 \Omega'_2 \ldots \Omega'_d \, p_2'^{\,n-d})$$

als $p^d = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_d}\} \backsim p'^{\,n-d}$ is. Derhalve is $\triangle = 0$ als

óf de verbindings-G_d van $x_{i_1}, \ldots x_{i_d}$ raakt aan $(\Omega' x)^2$

óf $p^d \equiv 0$, dus $x_{i_1}, \ldots x_{i_d}$ in een G_m met $m < d$ liggen.

$\triangle$ is de in n-aire coordinaten overgevoerde invariant voor de deelruimte G_d. Men kan nu eenvoudige absolute invarianten vormen:

$$\frac{1}{(d-1)!^2} \cdot \frac{\triangle (x_{i_1}, \ldots x_{i_d})}{\Omega_{i_1 i_1} \ldots \Omega_{i_d i_d}} = \sin^2 k_{d-1} \, I (x_{i_1}, \ldots x_{i_d}),$$

waarin k_i constanten zijn en $I(x_{i_1}, \dots x_{i_d})$ een in $x_{i_1}, \dots x_{i_d}$ alterneerende grootheid, het $(d-1)$-dimensionale Ω-volume van het simplex, door $x_{i_1}, \dots x_{i_d}$ gevormd, genoemd worde.

Opmerkingen: 1. Voor $d = 2$ ontstaat

$$\sin^2 k_1 \, I(x_1, x_2) = \frac{\begin{vmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{vmatrix}}{\Omega_{11}\,\Omega_{22}} = 1 - \frac{\Omega_{12}^2}{\Omega_{11}\,\Omega_{22}}$$

waaruit men ziet, dat $I(x_1, x_2)$ op een constante na de ten opzichte van Ω projectief gemeten afstand van x_1 en x_2 is.

2. Voor $d = n$ ontstaat

$$\sin^2 k_{n-1} \, I(x_1, \dots x_n) = \frac{D(x_1\, x_2 \dots x_n)^2}{(n-1)!^2\, n!\, \Omega_{11} \dots \Omega_{nn}}.$$

3. Voor kleine waarden van k_1 verkrijgt men met $I(x_i, x_k) = d_{ik}$

$$\sin^2 k_{n-1} \, I(x_1, \dots x_n) = \frac{1}{(n-1)!^2} \det|\cos(k_1 d_{ik})| =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . \\ 1 & & & & \\ 1 & & 1 - \dfrac{k_1^2 d_{ik}^2}{2} & & \\ . & & & & \\ . & & & & \end{vmatrix} = \frac{(-1)^n}{(n-1)!^2} \left(\frac{k_1}{2}\right)^{n-1} \begin{vmatrix} \left(\dfrac{k_1}{2}\right)^2 & 1 & 1 & . & . \\ 1 & & & & \\ 1 & & d_{ik}^2 & & \\ . & & & & \\ . & & & & \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{(-1)^n}{(n-1)!^2} \left(\frac{k_1}{2}\right)^{n-1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & . & . \\ 1 & & & & \\ 1 & & d_{ik}^2 & & \\ . & & & & \\ . & & & & \end{vmatrix}$$

waaruit men ziet, dat voor $k_{n-1} = k_1^{n-1}$ de bekende formule voor volumina in de Euclidische meetkunde ontstaan.

§ 2. *Afstanden van kruisende ruimten.*

Zijn gegeven de kruisende ruimten a^d, b^{n-d} (dus $(a^d b^{n-d}) \neq 0$) en zijn de poolruimten hiervan ten opzichte van Ω respectievelijk $\bar{a}^{n-d}$, $\bar{b}^d$. De verbindings G_{2d} van a^d en $\bar{b}^d$ snijdt $\bar{a}^{n-d}$ en b^{n-d} elk in een G_d. De vier G_d in deze G_{2d} hebben in het algemeen geval d verschillende (elkaar kruisende) transversalen, gaande door de dekpunten der collineatie ontstaan door projectie uit twee der G_d van de derde G_d op de vierde G_d. Deze transversalen zijn gemeenschappelijke Ω-loodrechten.

Immers — den hoek tusschen twee elkaar snijdende rechten definieerende met behulp van den Ω-afstand van de met het hoekpunt poolverwante punten op de beenen van den hoek — elke rechte door het snijpunt S van één der transversalen met a^d (of b^{n-d}) in deze ruimte getrokken staat

Ω-loodrecht op de transversaal, daar het poolpunt van S op de transversaal in $\bar{a}^{n-d}$ (of $\bar{b}^d$) valt.

Duaal hiermede bestaan $d\, G_{n-2}$ welke gaan door de snijruimte G_{n-2d} van $\bar{a}^{n-d}$ en b^{n-d} en die met elk der ruimten a^d, b^{n-d}, $\bar{a}^{n-d}$, $\bar{b}^d$ in één G_{n-1} liggen. Deze ruimten vindt men in het algemeen geval door de snij-G_{n-2d} te verbinden met telkens $(d-1)$ der transversalen. De transversalen gaan door een poolcorrelatie ten opzichte van Ω over in de laatstgenoemde G_{n-2}.

In het algemeen geval komt onder de transversalen geen Ω-beschrijvende voor en is elke transversaal Ω-poolverwant met een G_{n-2} gaande door de overige. Immers met de transversaal t_i correspondeert een G_{n-2} gaande door de snij-G_{n-2d} en $(d-1)$ transversalen $t_{k_1}, \dots t_{k_{d-1}}$. Komt onder deze t_k nimmer t_i voor, dan is het gestelde juist. Komt t_i in tenminste één geval onder de t_k voor, dan is t_i een Ω-beschrijvende en in $t_{k_1}, \dots t_{k_{d-1}}$ komt tenminste één transversaal, zeg t_p, *niet* voor. De poolruimte van t_p gaat dan niet door t_i en derhalve door t_p. Is dus één der transversalen, t_i, Ω-beschrijvende dan is er nog een andere transversaal, t_p, Ω-beschrijvende. Stel de snijpunten met a^d, b^{n-d}, $\bar{a}^{n-d}$, $\bar{b}^d$ op t_i zijn A, B, C, D, die op t_p A', B', C', D'. De poolruimten van A, B, C, D snijden dan t_p in C', D', A', B' en er geldt voor de dubbelverhoudingen

$$DV(A\,B\,C\,D) = DV(C'\,D'\,A'\,B') = DV(A'\,B'\,C'\,D')$$

en de rechten AA', BB', CC', DD' liggen hyperboloïdisch. Er zijn ∞-veel (Clifford-parallelle) transversalen, in tegenspraak met het ondersteld.

In het algemeen geval is het derhalve mogelijk in a^d de punten $x_1, x_2, \dots x_d$ te kiezen en in b^{n-d} de punten $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_d$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n-2d}$ zóó, dat daaronder geen punten van Ω voorkomen en alle puntkoppels behoudens (x_i, ξ_i) $i = 1, 2, \dots d$ poolkoppels ten opzichte van Ω zijn: men kieze slechts x_i, ξ_i als snijpuntenpaar met de transversaal t_i en voor $\alpha_1, \dots \alpha_{n-2d}$ een poolsimplex in de snij-G_{n-2d} van $\bar{a}^{n-d}$ en b^{n-d}.

Nu wordt $\dfrac{\det|\Omega_{pq}|}{\Omega_{pp} \dots \Omega_{qq}}$ $p, q = (x_1, \dots \xi_1, \dots \alpha_1, \dots)$ eenerzijds gelijk aan $\prod_{i=1}^{d} \sin^2 k_1\, l(x_i, \xi_i)$ en anderzijds is

$$\det|\Omega_{pq}| = \frac{D(x_1 \dots \xi_1 \dots \alpha_1 \dots)^2}{n!} = \frac{D(a^d\, b^{n-d})\,(a_1^d\, b_1^{n-d})}{n!}$$

$$\Omega_{x_1 x_1} \dots \Omega_{x_d x_d} = \det|\Omega_{x_i x_k}| = \frac{1}{d!}\,(\Omega_1'\, \Omega_2' \dots \Omega_d'\, a'^{\,n-d})\,(\Omega_1'\, \Omega_2' \dots \Omega_d'\, a_1'^{\,n-d})$$

en derhalve is het product der quadraten der sinus der d afstanden, δ_i, van a^d en b^{n-d} gegeven door

$$\prod_{i=1}^{d} \sin^2 k_1\, \delta_i = \frac{d!\,(n-d)!}{n!} \cdot \frac{D(a^d\, b^{n-d})\,(a_1^d\, b_1^{n-d})}{(\Omega_1' \dots \Omega_d'\, a'^{\,n-d}) \dots (\Omega_{d+1}' \dots b_1'^{\,d})}.$$

Voor $d=1$ voert deze formule voor den afstand δ van een punt x tot een G_{n-1} v' naar

$$\sin^2 k_1 \delta = \frac{D\,(x\,v')^2}{n\,(\Omega' x)^2\,(\Omega\, v')^2}.$$

§ 3. *Simplexvolumina.*

Voor een willekeurig simplex geldt nu wanneer men de hoekpunten in twee groepen verdeelt

$$\underbrace{x_1, x_2 \ldots x_d} \quad ; \quad \underbrace{x_{d+1}, \ldots x_n} \qquad d > 1$$

$$\sin^2 V = \sin^2 k_{n-1}\, I(x_1, \ldots x_n) = \frac{\triangle\,(x_1, \ldots x_n)}{(n-1)!^2\, \Omega_{11} \ldots \Omega_{nn}} = \frac{D\,(x_1, x_2 \ldots x_n)^2}{(n-1)!\, n!\, \Omega_{11} \ldots \Omega_{nn}}$$

$$\sin^2 B = \sin^2 k_{d-1}\, I\,(x_1, \ldots x_d) = \frac{\triangle\,(x_1, \ldots x_d)}{(d-1)!^2\, \Omega_{11} \ldots \Omega_{dd}} =$$

$$= \frac{(\Omega_1' \ldots \Omega_d'\, p'^{\,n-d})\,(\Omega_1' \ldots \Omega_d'\, p_1'^{\,n-d})}{(d-1)!^2\, d!\, \Omega_{11} \ldots \Omega_{dd}}, \qquad \{x_1, \ldots x_d\} = p^d$$

$$\sin^2 G = \sin^2 k_{n-d-1}\, I\,(x_{d+1}, \ldots x_n) =$$

$$= \frac{(\Omega_{d+1}' \ldots \Omega_n'\, q'^{\,d})\,(\Omega_{d+1}' \ldots \Omega_n'\, q_1'^{\,n-d})}{(n-d-1)!^2\,(n-d)!\, \Omega_{d+1,d+1} \ldots \Omega_{nn}}, \qquad \{x_{d+1}, \ldots x_n\} = q^{n-d}$$

waaruit

$$\sin^2 V = \frac{(n-d-1)!^2\,(d-1)!^2}{(n-1)!^2} \sin^2 B \sin^2 G \prod_{i=1}^{d} \sin^2 k_1 \delta_i$$

dus

$$\pm \sin V = \frac{(n-d-1)!\,(d-1)!}{(n-1)!} \sin B \sin G \prod_{i=1}^{d} \sin^2 k_1 \delta_i$$

waardoor, afgezien van de maatconstanten k_i de sinus van het volume gegeven wordt als product van sinus van „grond"- en „boven"-simplex maal het product der sinus der afstanden van „grond"- en „boven"-ruimte.

Voor $d=1$ ontstaat

$$\sin^2 V = \frac{D\,(x_1 \ldots x_n)^2}{(n-1)!^2\, n!\, \Omega_{11} \ldots \Omega_{nn}} =$$

$$= \frac{1}{(n-1)^2} \cdot \frac{1}{(n-1)!\,(n-2)!^2} \frac{(\Omega\, v')^2}{\Omega_{22} \ldots \Omega_{nn}} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{D\,(x\,v')^2}{\Omega_{11}\,(\Omega\, v')^2} \qquad v' = \{x_2 \ldots x_n\}$$

òf

$$\pm \sin V = \frac{1}{n-1} \sin G \sin \delta.$$

Opmerking: Voor $n = 3$ levert $I(x_1, x_2, x_3) = 0$ op grond der relatie

$$1-\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma =$$
$$= (\cos(\alpha-\beta) - \cos \gamma)(\cos \gamma - \cos(\alpha+\beta))$$

het additietheorema van afstanden terug.

§ 4. *Additietheorema van volumina. Generalisatie van het theorema van* STEWART.

In de projectieve ruimte bestaat de fundamenteele identiteit:

$$(u' t)(x_1 x_2 \dots x_n) = (u' x_1)(t x_2 \dots x_n) +$$
$$+ (u' x_2)(x_1 t x_3 \dots x_n) + \dots (u' x_n)(x_1 x_2 \dots x_{n-1} t) \qquad \{u'\}.$$

Hieruit volgt voor u' = poolruimte van een punt z

$$\Omega_{zt}(x_1 x_2 \dots x_n) = \Omega_{zx_1}(t x_2 \dots x_n) + \dots \Omega_{zx_n}(x_1, \dots x_{n-1} t)$$

of na multiplicatie met een quadraatwortel uit

$$\frac{D}{n!(n-1)!^2 \, \Omega_{11} \dots \Omega_{nn} \, \Omega_{zz} \, \Omega_{tt}}$$

de fundamenteele relatie voor de Ω-meetkunde:

$$\underline{\cos k_1 I(z, t) \sin k_{n-1} I(x_1 \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} \cos k_1 I(z, x_i) \sin k_{n-1} I(x_1, \dots t, \dots x_n).}$$

a. Stelt men hierin $z \equiv t$ dan ontstaat het *additietheorema van volumina*

$$\sin k_{n-1} I(x_1 \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} \cos k_1 I(z, x_i) \sin k_{n-1} I(x_1, \dots z, \dots x_n).$$

b. Ligt t in $\{x_1, \dots x_{d-1}\} = v'$ en is $z \equiv x_n$ dan ontstaat

$$\underline{\cos k_1 I(x_n, t) \sin k_{n-1} I(x_1, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \cos k_1 I(x_n, x_i) \sin k_{n-1} I(x_1, \dots t, \dots x_n)}$$

want $\sin k_{d-1} I(x_1, x_2, \dots x_{n-1}, t) = 0$, hetgeen op grond van het feit, dat alle simplices het hoekpunt x_n bezitten, na deeling door een getallenfactor maal den afstand van x_n tot v' leidt tot:

$$\underline{\cos k_1 I(x_n, t) \sin k_{n-2} I(x_1, \dots x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \cos k_1 I(x_n, x_i) \sin k_{n-2} I(x_1, \dots t, \dots x_{n-1})}$$

de generalisatie van het theorema van STEWART.

Volgens het additietheorema van de „basis"-ruimte v' kan dit omgevormd worden tot

$$\{1 - \cos k_1 I(x_n, t)\} \sin k_{n-2} I(x_1, \dots x_{n-1}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} \{\cos k_1 I(t, x_i) - \cos k_1 I(x_n, x_i)\} \sin k_{n-2} I(x_1, \dots t, \dots x_{n-1})$$

waaruit men voor de Euclidische meetkunde terugvindt

$$\underline{x_n t^2 \,.\, Vol\,(x_1 \dots x_{n+1}) = \Sigma\,(\overline{x_n x_i}^2 - \overline{t x_i}^2)\,.\, Vol\,(x_1, x_2, \dots t_1 \dots x_{n-1}).}$$

Toelichting (fig. 1): Voor $n = 3$ luidt het additietheorema, afziende van maatconstanten,

$$\sin ABC = \cos \xi \sin I + \cos \eta \sin II + \cos \zeta \sin III.$$

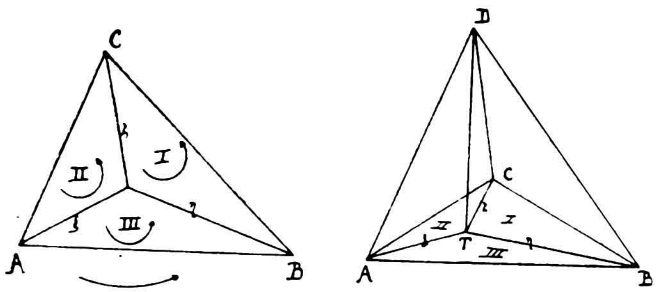

Fig. 1.

Voor $n = 4$ het theorema van STEWART

$$\cos \overline{DT} \sin \overline{ABC} = \cos \overline{AD} \sin I + \cos \overline{BD} \sin II + \cos \overline{CD} \sin III$$

waaruit voor $D \equiv T$ het additietheorema voor $n = 3$ terugverkregen wordt.

§ 5. *Generalisatie van den cosinusregel.*

In de volgende beschouwingen worden de formules eenvoudigheidshalve uitgeschreven met $k_i \equiv 1 \; \{ i \}$.

a. $n = 3$.

In de Ω-meetkunde van het platte vlak wordt voor een in C Ω-rechthoekigen driehoek ABC door de zijden van den driehoek en de poollijnen van de hoekpunten A en B het vlak verdeeld in één vijfhoek, vijf vierhoeken en vijf driehoeken. De relatie van NEPER voor de Ω-meetkunde leest men hieruit af (fig. 2): In de betrekkingen tusschen zijden en hoeken van een Ω-rechthoekigen driehoek kan men de volgende permutaties uitvoeren van

$$c - \beta - a - b - \alpha \quad (I) \text{ in}$$
$$\beta - \bar{a} - b - \bar{\alpha} - c \quad (II)$$
$$\bar{a} - \bar{b} - \bar{\alpha} - \bar{c} - \beta \quad (III)$$
$$\bar{b} - \alpha - \bar{c} - \bar{\beta} - \bar{a} \quad (IV)$$
$$\alpha - c - \beta - a - b \quad (V),$$

waarbij de complementvorming aangeduid wordt door overstreeping.

De fundamenteele betrekking is, zooals bekend,

$$\pm \cos c = \cos a \cos b,$$

welke door quadrateeren omgevormd kan worden tot

$$\sin^2 c = \sin^2 a + \sin^2 b - \sin^2 a \sin^2 b = \sin^2 a + \sin^2 b - 4 \sin^2 V$$

„Pythagoras"

Voor een willekeurigen driehoek ontstaat

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

waaruit door quadrateeren volgt:

$$(\cos c - \sin a \sin b \cos C)^2 = \cos^2 a \cos^2 b$$
$$\sin^2 c = \sin^2 a + \sin^2 b - 2 \sin a \sin b \cos C \cos c - 4 \sin^2 \mathfrak{B}$$

„Cosinusregel"

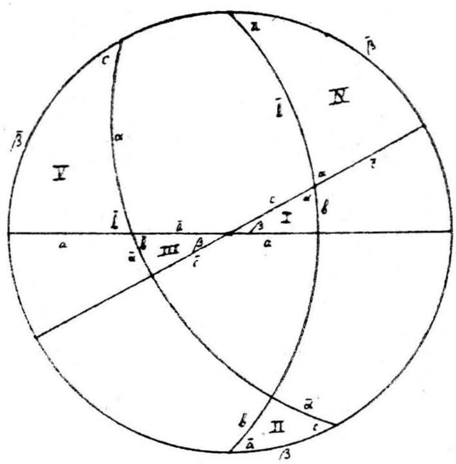

Fig. 2.

Het opnieuw optreden van c in het rechterlid vindt zijn oorzaak in het feit, dat voor $n = 3$ de „ribben" tevens „zij-ruimten" van het simplex zijn.

b. $n > 3$.

Zij a_n de „top" van het simplex, $\mathfrak{A}_i$ de overstaande zijruimte van a_i, A_i de projectie van $\mathfrak{A}_i$ op $\mathfrak{A}_n$, α_i de afstand van a_i tot het voetpunt L der hoogtelijn h uit a_n, p_i de hoogtelijn uit a_n in $\mathfrak{A}_i$, q_i de hoogtelijn in A_i uit L.

Volgens het additietheorema der volumina geldt dan

$$\sin \mathfrak{A}_n = \sum_i \cos \alpha_i \sin A_i = \sum_i \cos \alpha_i \frac{\sin \mathfrak{A}_i \sin q_i}{\sin p_i} =$$

$$= \sum_i \sin \mathfrak{A}_i \frac{\cos (a_i, a_n)}{\cos h} \cdot \frac{\operatorname{tg} q_i}{\operatorname{tg} p_i} \cdot \frac{\cos q_i}{\cos p_i} = \sum_i \frac{\sin \mathfrak{A}_i \cos (a_i, a_n) \cos (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_n)}{\cos^2 h}$$

of

$$\underline{\sin^2 \mathfrak{A}_n - (n-1)^2 \sin^2 \mathfrak{B} = \sum_i \sin \mathfrak{A}_i \sin \mathfrak{A}_n \cos (a_i, a_n) \cos (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_n).}$$

Sommeert men de hiermede analoge formules voor $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_{n-1}$ dan ontstaat

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sin^2 \mathfrak{A}_i - (n-1)^3 \mathfrak{B} =$$

$$= 2 \sum_{(i,k)=1}^{n-1} \sin \mathfrak{A}_i \sin \mathfrak{A}_k \cos (a_i, a_k) \cos (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_k) + \sin^2 \mathfrak{A}_n - (n-1)^2 \sin^2 \mathfrak{B}$$

of tenslotte

$$\sin^2 \mathfrak{A}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \sin^2 \mathfrak{A}_i - 2 \sum_{(i,k)=1}^{n-1} \sin \mathfrak{A}_i \sin \mathfrak{A}_k \cos (a_i, a_k) \cos (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_k) - (n-1)^2 (n-2) \sin^2 \mathfrak{B}.$$

„Gegeneraliseerde cosinusregel''

Voor het geval, dat de ribben aan één hoekpunt, a_n, alle onderling Ω-orthogonaal zijn volgt

$$\sin^2 \mathfrak{A}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \sin^2 \mathfrak{A}_i - (n-2)(n-1)^2 \sin^2 \mathfrak{B}$$

„Pythagoras''

waarbij men desgewenscht $\sin \mathfrak{B}$ nog in $\mathfrak{A}_i$ kan uitdrukken volgens

$$(n-2)!^n \prod_{i=1}^{n-1} \sin \mathfrak{A}_i = \{(n-1)! \sin \mathfrak{B}\}^{n-2}.$$