Mathematics. — *Sur quelques propriétés extrémales du domaine de* KOEBE. By H. BOLDER. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE).

(Communicated at the meeting of October 27, 1945.)

§ 1. *Notations, définitions et conventions.*

Indiquons par

Ω : un domaine ouvert simple et simplement connexe dans le plan d'une variable complexe, contenant dans son intérieur le point 0, et non le point ∞;

Σ : la frontière de Ω;

$G(p, q)$: la valeur en q de la fonction de GREEN de Ω avec pôle en p;

$\left[\frac{\partial G(p, z)}{\partial n}\right]_q$: la dérivée normale en q, vers l'intérieur, donc $\geqslant 0$;

$g(p)$: la valeur définie par le développement $G(p, p+h) = \log |h|^{-1} + g(p) + O(h)$, h petit;

domaine K : domaine de KOEBE, c'est à dire un Ω, dont Σ se compose de tous les points $re^{i\theta}$, où θ est constant, et $r \geqslant d > 0$, d constant;

Ω^*, Σ^*, etc. : des entités analogues aux précédentes, dont nous convenons, qu'elles seront réservées aux domaines K dans le plan de w;

α et β : les deux parties de l'axe de symmétrie de l'intérieur d'un domaine K, séparées par zéro. α sera la partie entre zéro et Σ^*, β la partie infinie au côté opposé.
Zéro lui-même n'appartiendra à aucune des deux classes α et β;

$\sigma(p, G)$: l'ensemble de points z de Ω pour lesquels $G(p, z) = G$, G constant > 0. C'est donc une courbe de niveau de la fonction de GREEN;

$\varrho(p, q)$: l'exemplaire des trajectoires orthogonales des $\sigma(p, G)$, G variable, qui passe par q.

§ 2. *Introduction.*

Parmi la classe des Ω ayants la même valeur de $g(0)$ le domaine K se distingue par quelques propriétés extrémales.

I: *la plus petite distance de* 0 *à* Σ *est minimale.* C'est donc une estimation se rapportant aux frontières des Ω. Les autres théorèmes se rapporteront aux positions et densités des courbes de niveau de leurs fonctions de GREEN.

Soient:

Ω^* un domaine K dans le plan de w, a un point de son α, et b un point de son β, telle, que

$$G^*(0, a) = G^*(0, b) = G > 0;$$

Ω un domaine dans le plan de z, pour lequel $g(0) = g^*(0)$, et t un point de Ω pour lequel

$$G(0, t) = G^*(0, a) = G^*(0, b) = G.$$

Alors nous avons les inégalités:

$$\text{II:} \quad |a| \leqslant |t|$$

$$\text{III:} \quad |b| \left[\frac{\partial G^*(0, w)}{\partial n}\right]_b \leqslant |t| \left[\frac{\partial G(0, z)}{\partial n}\right]_t$$

$$\text{IV:} \quad |b| \geqslant |t|$$

$$\text{V:} \quad \left[\frac{\partial G^*(0, w)}{\partial n}\right]_b \leqslant \left[\frac{\partial G(0, z)}{\partial n}\right]_t$$

$$\text{VI:} \quad |a| \left[\frac{\partial G^*(0, w)}{\partial n}\right]_a \geqslant |t| \left[\frac{\partial G(0, z)}{\partial n}\right]_t$$

$$\text{VII:} \quad \left[\frac{\partial G^*(0, w)}{\partial n}\right]_a \geqslant \left[\frac{\partial G(0, z)}{\partial n}\right]_t$$

C'est par ces formules que s'expriment en termes de la fonction de GREEN des inégalités classiques sur les fonctions de la forme

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots,$$

holomorphes et univalentes (simples) pour $|z| < 1$.

Dans un article précédent [1]), j'ai montré, à propos d'une suggestion de M. A. F. MONNA [2]), que le théorème de KOEBE (I) se démontre par un balayage, tout comme le théorème de CARLEMAN—MILLOUX, dans la solution élégante de M. M. BRELOT [3]).

Dans l'article présent les formules II—VII seront développées de I, suivant une méthode connue, p. e. chez M. R. NEVANLINNA [4]). Les formules II—VII correspondent aux formules 28—32 du passage cité.

§ 3. *Lemmes.*

Lemme A. *Soit un Ω_I représenté conformément sur un Ω_{II} de manière que les zéros se correspondent. Si l'on réduit Ω_I et Ω_{II} à des parties Ω'_I et Ω'_{II}, qui se correspondent dans la représentation, et qui contiennent les zéros, leurs $g(0)$ décroîtront d'une même quantité.*

Démonstration. Si Ω_I correspond à Ω_{II}, Ω'_I à Ω'_{II}, et z_I à z_{II} nous avons:

$$G_I(0, z_I) = G_{II}(0, z_{II}) \text{ et } G'_I(0, z_I) = G'_{II}(0, z_{II}),$$

donc

$$G_I(0, z_I) - G'_I(0, z_I) = G_{II}(0, z_{II}) - G'_{II}(0, z_{II}),$$

ou

$$[\log |z_I|^{-1} + g_I(0) + O(z_I)] - [\log |z_{II}|^{-1} + g'_I(0) + O(z_I)] =$$
$$= [\log |z_{II}|^{-1} + g_{II}(0) + O(z_{II})] - [\log |z_{II}|^{-1} + g'_{II}(0) + O(z_{II})].$$

En faisant tendre z_I, et donc z_{II} vers 0 nous obtenons:

$$g_I(0) - g'_I(0) = g_{II}(0) - g'_{II}(0).$$

Nous en utiliserons le cas particulier:

Si l'on retranche d'un Ω la partie d'une $\varrho(0, q)$ entre Σ et un certain niveau G de la fonction $G(0, w)$, son $g(0)$ décroîtra d'une quantité, qui ne dépend que de G.

Lemme B. *Soient p_I et q_I deux points intérieurs de Ω_I, et p_{II} et q_{II} deux points intérieurs de Ω_{II}, et soit $G_I(p_I, q_I) = G_{II}(p_{II}, q_{II})$, les expressions*

$$g(q) + \log\left(\frac{\partial G(p, w)}{\partial n}\right)_q$$

seront égales pour I *et* II.

Démonstration. Choisissons, pour I et II, un point r sur $\varrho(p, q)$ entre p et q, dans le voisinage de q, et de manière que

$$G_I(p_I, r_I) = G_{II}(p_{II}, r_{II}).$$

Nous pouvons représenter Ω_I sur Ω_{II} de manière que p_I corresponde à p_{II}, et q_I à q_{II}. Alors r_I correspondra à r_{II}.

Nous avons donc

$$G_I(q_I, r_I) = G_{II}(q_{II}, r_{II}).$$

Désignant $|q_I - r_I|$ par h_I, et $|q_{II} - r_{II}|$ par h_{II}, h_I et h_{II} petits, nous avons, pour I et II

$$[G(p, r) - G(p, q)] : h = \left(\frac{\partial G(p, z)}{\partial n}\right)_q + \varepsilon,$$

ou

$$\log [G(p, r) - G(p, q)] - \log h = \log\left(\frac{\partial G(p, z)}{\partial n}\right)_q + \varepsilon',$$

et

$$G(q, r) = \log h^{-1} + g(q) + \varepsilon''.$$

En additionnant nous éliminons h, et obtenons

$$\log [G(p, r) - G(p, q)] + G(q, r) = \log\left(\frac{\partial G(p, z)}{\partial n}\right)_q + g(q) + \varepsilon' + \varepsilon''.$$

Ces expressions sont égales pour I et II.

La considération, que les ε sont arbitraires termine la démonstration.

Remarque. Considérant un cas particulier, p.e. pour Ω le cercle $z| < 1$, on obtient facilement la forme explicite

$$g(q) + \log\left(\frac{\partial G(p, z)}{\partial n}\right)_q = \log\left(e^{G(p,q)} - e^{-G(p,q)}\right).$$

Avant d'être en état de déduire les théorèmes II—VII, il nous faudra disposer d'une forme plus générale de I.

Par le balayage [1]) il parut sous la forme:

Parmi les Ω, pour lesquels les plus petites distances de 0 à Σ sont égales, le domaine K a la plus grande valeur de $g(0)$.

Songeant, que par une homotéthie avec centre 0 et dilatation p la valeur de $g(0)$ croisse de $\log p$, nous pouvons formuler I comme suit:

Parmi l'ensemble des Ω les domaines K ont la plus petite valeur de $\log d - g(0)$, où d désigne la plus petite distance de 0 à Σ.

§ 4. *Démonstration des théorèmes.*

II. Ajoutons dans le plan de w à Σ^* d'un Ω^* la partie de α entre a et Σ^*, et dans le plan de z à Σ d'un Ω la partie de $\varrho(0, t)$ entre t et Σ.

Les domaines restants s'appellerons $\Omega^{*\prime}$ et Ω'.

$\Omega^{*\prime}$ étant aussi un domaine K, nous savons de I

$$\log|a| - g^{*\prime}(0) \leqslant \log|t| - g'(0),$$

et du lemme A

$$g^*(0) - g^{*\prime}(0) = g(0) - g'(0).$$

En soustrayant nous obtenons

$$\log|a| - g^*(0) \leqslant \log|t| - g(0),$$

et en vertu de la supposition $g^*(0) = g(0)$ nous en tirons

$$|a| \leqslant |t|.$$

III. Dans Ω^* nous prenons pour centre b, et dans Ω pour centre t. Alors nous avons

$$G^*(b, 0) = G(t, 0),$$

et II se présente sous la forme

$$\log|b| - g^*(b) \leqslant \log|t| - g(t).$$

Nous savons de lemme B

$$g^*(b) + \log\left(\frac{\partial G^*(0, w)}{\partial n}\right)_b = g(t) + \log\left(\frac{\partial G(0, z)}{\partial n}\right)_t.$$

L'addition de ces relations termine la démonstration.

IV. Soit w un point de β entre 0 et b de Ω^*, et z dans Ω le point correspondant sur $\varrho(0, t)$, donc

$$G^*(0, w) = G(0, z).$$

Indiquons par $l(z)$ la longueur d'arc de la partie de $\varrho(0, t)$ de 0 à z, et posons $s(w) = |w|$.

En employant $l(z) \geqslant |z|$ nous savons de III

$$s(w) \frac{\partial G^*(0, w)}{\partial n} \leqslant l(z) \frac{\partial G(0, z)}{\partial n}.$$

Songeant, que dans Ω^* et Ω nous avons

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial s}, \text{ et } \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial l},$$

nous pouvons écrire cette relation dans la forme

$$s(w) \frac{\partial G^*(0, w)}{\partial s} \leqslant l(z) \frac{\partial G(0, z)}{\partial l}.$$

Considérons $s(w)$ et $l(z)$ sur β et $\varrho(0, t)$ comme fonctions de la variable indépendante $G = G^*(0, w) = G(0, z)$.

Cela conduit à la relation

$$\frac{s}{\frac{ds}{dG}} \leqslant \frac{l}{\frac{dl}{dG}}, \text{ ou } \frac{\frac{ds}{dG}}{s} \geqslant \frac{\frac{dl}{dG}}{l}.$$

Intégrons de G_0 à G, G_0 étant une valeur grande:

$$\log s - \log s_0 \geqslant \log l - \log l_0.$$

En soustrayant de cette relation

$$\log s_0^{-1} + g^*(0) + \varepsilon^* = \log l_0^{-1} + g(0) + \varepsilon,$$

ce que nous obtenons en développant

$$G^*(0, w) = G(0, z),$$

nous éliminons s_0 et l_0, donc

$$\log s - g^*(0) - \varepsilon^* \geqslant \log l - g(0) - \varepsilon.$$

Les ε^* et ε sont arbitraires, donc

$$\log s - g^*(0) \geqslant \log l - g(0).$$

Songeant que $s(w) = |w|$, et $l(z) \geqslant |z|$, nous avons

$$\log |w| - g^*(0) \geqslant \log |z| - g(0),$$

et pour $G = G^*(0, b) = G(0, t)$ l'inégalité demandée.

V. C'est une conséquence immédiate de III et IV.

VI. Dans Ω^* nous prenons pour centre a, et dans Ω pour centre t. Alors nous avons $G^*(a, 0) = G(t, 0)$, et IV se présente sous la forme

$$\log |a| - g^*(a) \geqslant \log |t| - g(t).$$

Nous savons de lemme B

$$g^*(a) + \log \left(\frac{\partial G^*(0, w)}{\partial n}\right)_a = g(t) + \log \left(\frac{\partial G(0, z)}{\partial n}\right)_t.$$

L'addition de ces relations termine la démonstration.

VII. C'est une conséquence immédiate de II et VI.

§ 5. *Pour terminer nous remarquons* :

Nous savons que dans I c'est exclusivement le domaine K pour lequel la borne est atteinte. Alors nous pouvons facilement controler, que l'égalité dans aucune des formules II—VII ne se présente, que si Ω soit aussi un domaine K.

LITTÉRATURE.

1. H. BOLDER: Sur une démonstration simple du théorème de déformation de KOEBE, et d'un théorème du type CARLEMAN–MILLOUX. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **45**, 833 e.s., (1942).
2. A. F. MONNA: Sur quelques inégalités de la théorie des fonctions et leurs généralisations spatiales. Proc. Nederl. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **45**, 43 e.s. et 165 e.s. (1942).
3. M. BRELOT: Quelques applications aux fonctions holomorphes de la théorie moderne du potentiel et du problème de DIRICHLET. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **8**, 385 e.s. (1939).
4. R. NEVANLINNA: Eindeutige analytische Funktionen, Springer, Berlin, 85 e.s. (1936).