Mathematics. — *Eigenschappen der oplossingen van* $\Delta^k = 0$. By H. BREMEKAMP. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of October 27, 1945.)

§ 1. Wij willen bewijzen, dat, als in zeker gebied $\Delta u = 0$, waarbij Δ den operator van LAPLACE in twee onafhankelijk veranderlijken voorstelt en u een functie is, waarvan de partiëele afgeleiden tot en met die van de $2k$de orde bestaan, dan is in hetzelfde gebied $\Delta^k r^{2k-2} u = 0$, waarbij r den afstand voorstelt tot een willekeurig punt, dat wij als oorsprong van coördinaten kiezen.

Wij beginnen met een paar hulpstellingen.

I. Als $\Delta u = 0$, is ook $\Delta r \frac{\partial u}{\partial r} = 0$.

Bewijs.

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\Delta x \frac{\partial u}{\partial x} = x \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \Delta y \frac{\partial u}{\partial y} = y \frac{\partial \Delta u}{\partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

dus $\Delta r \frac{\partial u}{\partial r} = x \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + y \frac{\partial \Delta u}{\partial y} + 2 \Delta u$, dus als $\Delta u = 0$, $\Delta r \frac{\partial u}{\partial r} = 0$.

II. $\Delta r^{2k} u = r^{2k} \Delta u + 4 k r^{2k-1} \frac{\partial u}{\partial r} + 4 k^2 r^{2k-2} u$.

Bewijs. De betrekking geldt voor $k = 1$, immers

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2 u) = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4x \frac{\partial u}{\partial x} + 2u,$$

dus

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(r^2 u) = r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 x \frac{\partial u}{\partial x} + 2 u.$$

Evenzoo

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(r^2 u) = r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 y \frac{\partial u}{\partial y} + 2 u,$$

dus

$$\Delta r^2 u = r^2 \Delta u + 4 r \frac{\partial u}{\partial r} + 4u. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Als ze geldt voor zeker natuurlijk getal k, dan is (volgens de laatste formule)

$$\triangle r^{2k+2} u = r^2 \triangle r^{2k} u + 4 r \frac{\partial}{\partial r} (r^{2k} u) + 4 r^{2k} u$$

$$= r^{2k+2} \triangle u + 4 k r^{2k+1} \frac{\partial u}{\partial r} + 4 k^2 r^{2k} u + 4 r^{2k+1} \frac{\partial u}{\partial r} + 8 k r^{2k} u + 4 r^{2k} u$$

$$= r^{2k+2} \triangle u + 4 (k+1) r^{2k+1} \frac{\partial u}{\partial r} + 4 (k+1)^2 r^{2k} u.$$

De betrekking geldt dan dus ook voor $k + 1$.

De hoofdstelling bewijzen we nu ook door volledige inductie. Gegeven zij $\triangle u = 0$ en wij nemen aan, dat bewezen is, dat dan $\triangle^k r^{2k-2} u = 0$, dan is, met toepassing van hulpstelling II

$$\triangle^{k+1} r^{2k} u = \triangle^k (\triangle r^{2k} u) = 4 k \triangle^k r^{2k-2} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + 4 k^2 \triangle^k r^{2k-2} u.$$

Nu is $\triangle r \frac{\partial u}{\partial r} = 0$ volgens hulpstelling I, dus volgens het bij de volledige inductie onderstelde $\triangle^k r^{2k-2} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0$ en ook $\triangle^k r^{2k-2} u = 0$, dus $\triangle^{k+1} r^{2k} u = 0$, waarmee de bovengenoemde stelling bewezen is.

§ 2. Wij zullen nu verder bewijzen, dat iedere oplossing der vergelijking $\triangle^k u = 0$ kan gebracht worden in de gedaante

$$u = r^{2k-2} u_0 + r^{2k-4} u_1 + r^{2k-6} u_2 + \ldots + r^2 u_{k-2} + u_{k-1}, \quad . \quad (2)$$

waarbij $u_0, u_1, \ldots u_{k-1}$ harmonische functies zijn.

Deze stelling geldt voor $k = 1$. Om tot een bewijs door volledige inductie te geraken, is het voldoende te bewijzen, dat, als $\triangle^{k+1} u = 0$, er twee functies u_0 en v te vinden zijn zoo, dat

$$u = r^{2k} u_0 + v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

met $\triangle u_0 = 0$ en $\triangle^k v = 0$. Dan moet dus $\triangle^k r^{2k} u_0 = \triangle^k u = a$, waarbij a een gegeven functie is zoodanig, dat $\triangle a = 0$.

Wij bewijzen nu vooreerst: als $\triangle \varphi = 0$, geldt voor een willekeurig natuurlijk getal h:

$$\triangle^h r^{2h} \varphi = h!\, 2^{2h} \left(r \frac{\partial}{\partial r} + h \right) \left(r \frac{\partial}{\partial r} + h - 1 \right) \ldots \left(r \frac{\partial}{\partial r} + 1 \right) \varphi. \quad . \quad (4)$$

Deze betrekking geldt volgens hulpstelling II voor $h = 1$. Geldt ze voor

een natuurlijk getal h, dan hebben we ook, onder toepassing van die zelfde stelling

$$\triangle^{h+1} r^{2h+2} \varphi = \triangle^h \triangle r^{2h+2} \varphi =$$

$$= \triangle^h \left\{ r^{2h+2} \triangle \varphi + 4(h+1) r^{2h+1} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + 4(h+1)^2 r^{2h} \varphi \right\} =$$

$$= 4(h+1) \left\{ \triangle^h r^{2h} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + (h+1) \triangle^h r^{2h} \varphi \right\}$$

en dus door toepassing der formule, die bij de volledige inductie als bewezen is aangenomen, daar volgens hulpstelling I ook $\triangle r \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$,

$$\triangle^{h+1} r^{2h+2} \varphi = (h+1)! \, 2^{2h+2} \left\{ \left(r \frac{\partial}{\partial r} + h \right) \left(r \frac{\partial}{\partial r} + h - 1 \right) \ldots \left(r \frac{\partial}{\partial r} + 1 \right) r \frac{\partial}{\partial r} \varphi \right.$$

$$\left. + (h+1) \left(r \frac{\partial}{\partial r} + h \right) \ldots \left(r \frac{\partial}{\partial r} + 1 \right) \varphi \right\},$$

dus

$$\triangle^{h+1} r^{2h+2} \varphi = (h+1)! \, 2^{2(h+1)} \left(r \frac{\partial}{\partial r} + h + 1 \right) \left(r \frac{\partial}{\partial r} + h \right) \ldots \left(r \frac{\partial}{\partial r} + 1 \right) \varphi.$$

De betrekking geldt dan dus ook voor $h + 1$.

De toepassing op ons geval geeft

$$\triangle^k r^{2k} u_0 = k! \, 2^{2k} \left(r \frac{\partial}{\partial r} + k \right) \left(r \frac{\partial}{\partial r} + k - 1 \right) \ldots \left(r \frac{\partial}{\partial r} + 1 \right) u_0 = \alpha \,. \quad (5)$$

Wij kunnen deze differentiaalvergelijking in den vorm brengen

$$\frac{\partial^k}{\partial r^k} (r^k u_0) = \frac{1}{k! \, 2^{2k}} \alpha. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Hieraan voldoet

$$u_0 = \frac{1}{k! \, 2^{2k} r^k} \int_0^r d\varrho_k \int_0^{\varrho_k} d\varrho_{k-1} \int_0^{\varrho_{k-1}} \ldots \int_0^{\varrho_3} d\varrho_2 \int_0^{\varrho_2} \alpha \, d\varrho_1.$$

Door verandering der integratievolgorde herleiden wij dat tot

$$u_0 = \frac{1}{k! \, (k-1)! \, 2^{2k} r^k} \int_0^r \alpha (r - \varrho_1)^{k-1} \, d\varrho_1. \quad \ldots \quad (7)$$

Wij willen nu bewijzen, dat voor de zoo bepaalde u_0 geldt $\triangle u_0 = 0$, verder volgt uit de manier, waarop u_0 verkregen is, dat $\triangle^k r^{2k} u_0 = \alpha$,

zoodat, als wij stellen $v = u - r^{2k} u_0$, inderdaad $\Delta^k v = 0$. Voor het bewijs, dat $\Delta u_0 = 0$ speelt een constante factor geen rol. We beschouwen daarom

$$u = \frac{1}{r^k} \int_0^r \alpha (r - \varrho)^{k-1} \, d\varrho,$$

en berekenen Δu met behulp van poolcoördinaten. Wij vinden

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{k}{r^{k+1}} \int_0^r \alpha (r - \varrho)^{k-1} \, d\varrho + \frac{k-1}{r^k} \int_0^r \alpha (r - \varrho)^{k-2} \, d\varrho,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{k(k+1)}{r^{k+2}} \int_0^r \alpha (r - \varrho)^{k-1} \, d\varrho - \frac{2k(k-1)}{r^{k+1}} \int_0^r \alpha (r - \varrho)^{k-2} \, d\varrho +$$

$$+ \frac{(k-1)(k-2)}{r^k} \int_0^r \alpha (r - \varrho)^{k-3} \, d\varrho,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} = \frac{1}{r^k} \int_0^r \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \vartheta^2} (r - \varrho)^{k-1} \, d\varrho.$$

Daar $\Delta \alpha = 0$, is $\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial \vartheta^2} = -\left(\varrho^2 \dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial \varrho^2} + \varrho \dfrac{\partial \alpha}{\partial \varrho}\right) = -\varrho \dfrac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho \dfrac{\partial \alpha}{\partial \varrho}\right)$,

dus

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} = -\frac{1}{r^k} \int_0^r (r - \varrho)^{k-1} \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho \frac{\partial \alpha}{\partial \varrho}\right) d\varrho =$$

$$\frac{1}{r^k} \int_0^r \{-(k-1)(r-\varrho)^{k-2} \varrho + (r-\varrho)^{k-1}\} \varrho \frac{\partial \alpha}{\partial \varrho} \, d\varrho =$$

$$-\frac{1}{r^k} \int_0^r (r-\varrho)^{k-2} (k\varrho^2 - r\varrho) \frac{\partial \alpha}{\partial \varrho} \, d\varrho = \frac{1}{r^k} \int_0^r \{-(k-2)(r-\varrho)^{k-3} (k\varrho^2 - r\varrho) +$$

$$+ (r-\varrho)^{k-2} (2k\varrho - r)\} \alpha \, d\varrho = \frac{1}{r^k} \int_0^r \{-k^2 \varrho^2 + (3k-1) r\varrho - r^2\} (r-\varrho)^{k-3} \alpha \, d\varrho.$$

Dus

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} =$$

$$= \frac{1}{r^{2k+2}} \int_0^r (r-\varrho)^{k-3} \alpha \{k^2 (r-\varrho)^2 - (k-1)(2k-1) r (r-\varrho) + (k-1)(k-2) r^2 -$$

$$- k^2 \varrho^2 + (3k-1) r\varrho - r^2\} \, d\varrho,$$

$$\Delta u = 0.$$

Deze stellingen openen een weg voor het bewijs van het bestaan van een oplossing der vergelijking $\triangle^k u = 0$ in het gebied binnen een gesloten kromme, die met haar $k-1$ eerste normale afgeleiden aan die kromme gegeven waarden aanneemt, door deze zaak terug te brengen tot het bewijs van het bestaan van een stelsel van k functies, die in het gebied binnen die kromme harmonisch zijn, en continue partieele afgeleiden hebben tot inclusief die van de $2k$de orde, terwijl aan de kromme voldaan wordt aan k lineaire betrekkingen tusschen die functies en haar $k-1$ eerste normale afgeleiden.

§ 3. Om de analoge stellingen te bewijzen, voor het geval, dat het symbool $\triangle$ den operator van LAPLACE in drie onafhankelijk veranderlijken voorstelt, hebben we in het vorige slechts weinig te veranderen.

Hulpstelling I: Als $\triangle u = 0$, is ook $\triangle r \frac{\partial u}{\partial r} = 0$, blijft gelden.

Hulpstelling II luidt nu:

$$\triangle r^{2k} u = r^{2k} \triangle u + 4 k r^{2k-1} \frac{\partial u}{\partial r} + 2 k (2 k + 1) r^{2k-2} u. \quad . \quad (8)$$

Om die te bewijzen, hebben we

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (x^2 u) = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 x \frac{\partial u}{\partial x} + 2 u,$$

dus

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (r^2 u) = r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 x \frac{\partial u}{\partial x} + 2 u.$$

Evenzoo

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (r^2 u) = r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 y \frac{\partial u}{\partial y} + 2 u,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (r^2 u) = r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 4 z \frac{\partial u}{\partial z} + 2 u,$$

dus

$$\triangle (r^2 u) = r^2 \triangle u + 4 r \frac{\partial u}{\partial r} + 6 u.$$

De betrekking (8) geldt dus voor $k = 1$. Geldt ze voor een natuurlijk getal k, dan is

$$\triangle r^{2k+2} u = \triangle r^2 (r^{2k} u) = r^{2k+2} \triangle u + 4k r^{2k+1} \frac{\partial u}{\partial r} + 2 k (2k+1) r^{2k} u + 4 r^{2k+1} \frac{\partial u}{\partial r} +$$

$$+ 8 k r^{2k} u + 6 r^{2k} u = r^{2k+2} \triangle u + 4 (k+1) r^{2k+1} \frac{\partial u}{\partial r} + (2k+2)(2k+3) r^{2k} u,$$

en geldt de betrekking (8) dus ook voor $k + 1$; daaruit volgt, dat ze voor ieder natuurlijk getal geldt.

Om nu te bewijzen, dat, als $\Delta u = 0$, ook $\Delta^k r^{2k-2} u = 0$, merken we op, dat als $\Delta u = 0$, ook $\Delta r \frac{\partial u}{\partial r} = 0$ en wij hebben, bewezen aannemende, dat $\Delta^k r^{2k-2} u = 0$,

$$\Delta^{k+1} r^{2k} u = \Delta^k \left(r^{2k} \Delta u + 4 k r^{2k-1} \frac{\partial u}{\partial r} + 2 k (2 k + 1) r^{2k-2} u \right) =$$

$$4 k \Delta^k r^{2k-2} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + 2 k (2 k + 1) \Delta^k r^{2k-2} u = 0,$$

waaruit volgt, dat de betrekking voor ieder natuurlijk getal k geldt.

§ 4. Verder bewijzen we, dat ook nu, als $\Delta^{k+1} u = 0$, er twee functies u_0 en v te vinden zijn zoo, dat

$$u = r^{2k} u_0 + v, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

en dat $\Delta u_0 = 0$ en $\Delta^k v = 0$.

Dan voldoet dus u_0 aan

$$\Delta^k r^{2k} u_0 = a,$$

waarbij $a = \Delta^k u$ en dus $\Delta a = 0$.

Nu geldt, als $\Delta \varphi = 0$, voor een natuurlijk getal h

$$\Delta^h r^{2h} \varphi = h ! \, 2^h \left(2 r \frac{\partial}{\partial r} + 2 h + 1 \right) \left(2 r \frac{\partial}{\partial r} + 2 h - 1 \right) \ldots \ldots \left(2 r \frac{\partial}{\partial r} + 3 \right) \varphi. \quad \ldots \quad (10)$$

Immers volgens het bovenstaande geldt deze betrekking voor $h = 1$; geldt ze voor een natuurlijk getal h, dan is

$$\Delta^{h+1} r^{2h+2} \varphi = \Delta^h \Delta r^{2h+2} \varphi =$$

$$= \Delta^h \left\{ r^{2h+2} \Delta \varphi + 4 (h+1) r^{2h+1} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + (2h+2)(2h+3) r^{2h} \varphi \right\} =$$

$$= 4 (h+1) \Delta^h r^{2h} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + (2h+2)(2h+3) \Delta^h r^{2h} \varphi =$$

$$h ! \, 2^h \left\{ 4 (h+1) \left(2 r \frac{\partial}{\partial r} + 2 h + 1 \right) \left(2 r \frac{\partial}{\partial r} + 2h - 1 \right) \ldots \left(2 r \frac{\partial}{\partial r} + 3 \right) r \frac{\partial}{\partial r} \varphi \right.$$

$$\left. + (2h+2)(2 h + 3) \left(2 r \frac{\partial}{\partial r} + 2 h + 1 \right) \ldots \left(2 r \frac{\partial}{\partial r} + 3 \right) \varphi \right\} =$$

$$(h+1) ! \, 2^{h+1} \left(2 r \frac{\partial}{\partial r} + 2 h + 3 \right) \left(2 r \frac{\partial}{\partial r} + 2 h + 1 \right) \ldots \left(2 r \frac{\partial}{\partial r} + 3 \right) \varphi$$

en (10) geldt dus ook voor $h + 1$.

Wij vinden dus

$$\Delta^k r^{2k} u_0 = k!\,2^k \left(2r\frac{\partial}{\partial r} + 2k + 1\right)\left(2r\frac{\partial}{\partial r} + 2k - 1\right)\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\left(2r\frac{\partial}{\partial r} + 3\right) u_0 = a. \qquad (11)$$

Deze differentiaalvergelijking brengen we in den vorm

$$\frac{\partial^k}{\partial r^k}(r^{k+\frac{1}{2}} u_0) = \frac{1}{k!\,2^{2k}}\, a\, r^{\frac{1}{2}}.$$

Daaraan voldoet

$$u_0 = \frac{1}{k!\,2^{2k}\, r^{k+\frac{1}{2}}} \int_0^r d\varrho_k \int_0^{\varrho_k} d\varrho_{k-1} \ldots\ldots \int_0^{\varrho_2} a\, \varrho_1^{\frac{1}{2}}\, d\varrho_1 =$$

$$= \frac{1}{k!\,(k-1)!\,2^{2k}\, r^{k+\frac{1}{2}}} \int_0^r a\, \varrho^{\frac{1}{2}} (r-\varrho)^{k-1}\, d\varrho.$$

Wij hebben te bewijzen, dat ook nu voor de zoo bepaalde functie u_0 uit $\Delta a = 0$ volgt $\Delta u_0 = 0$. Bij dit bewijs speelt een constante factor weer geen rol. We beschouwen dus

$$u = \frac{1}{r^{k+\frac{1}{2}}} \int_0^r a\, \varrho^{\frac{1}{2}} (r-\varrho)^{k-1}\, d\varrho \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

en berekenen Δu met behulp van bolcoördinaten (r, φ, ϑ). Wij vinden:

$$r^2 \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{k+{}^1/_2}{r^{k-\frac{1}{2}}} \int_0^r a\, \varrho^{\frac{1}{2}} (r-\varrho)^{k-1}\, d\varrho + \frac{k-1}{r^{k-\frac{3}{2}}} \int_0^r a\, \varrho^{\frac{1}{2}} (r-\varrho)^{k-2}\, d\varrho,$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{k^2 - {}^1/_4}{r^{k+\frac{1}{2}}} \int_0^r a\, \varrho^{\frac{1}{2}} (r-\varrho)^{k-1}\, d\varrho - \frac{(k-1)(2k-1)}{r^{k-\frac{1}{2}}} \int_0^r a\, \varrho^{\frac{1}{2}} (r-\varrho)^{k-2}\, d\varrho +$$

$$+ \frac{(k-1)(k-2)}{r^{k-{}^3/_2}} \int_0^r a\, \varrho^{\frac{1}{2}} (r-\varrho)^{k-3}\, d\varrho,$$

$$\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi \frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial\vartheta^2} =$$

$$= \frac{1}{r^{k+\frac{1}{2}}} \int_0^r \varrho^{\frac{1}{2}} (r-\varrho)^{k-1} \left\{\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi \frac{\partial a}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 a}{\partial\vartheta^2}\right\} d\varrho.$$

Daar $\Delta a = 0$, kunnen we voor de laatste integraal schrijven

$$-\frac{1}{r^{k+\frac{1}{2}}}\int_0^r \varrho^{\frac{1}{2}}(r-\varrho)^{k-1}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho^2\frac{\partial a}{\partial\varrho}\right)d\varrho$$

en door achtereenvolgend partieel integreeren herleiden we dat tot

$$\frac{1}{r^{k+\frac{1}{2}}}\int_0^r \left\{\tfrac{1}{2}\varrho^{-1/2}(r-\varrho)^{k-1}-(k-1)\varrho^{1/2}(r-\varrho)^{k-2}\right\}\varrho^2\frac{\partial a}{\partial\varrho}\,d\varrho =$$

$$-\frac{1}{r^{k+\frac{1}{2}}}\int_0^r \left\{\tfrac{3}{4}\varrho^{1/2}(r-\varrho)^{k-1}-3(k-1)\varrho^{3/2}(r-\varrho)^{k-2}+(k-1)(k-2)\varrho^{5/2}(r-\varrho)^{k-3}\right\}a\,d\varrho.$$

Wij vinden dus

$$r^2\,\Delta u = \frac{1}{r^{k+1/2}}\int_0^r a\,\varrho^{1/2}(r-\varrho)^{k-3}\left\{(k^2-\tfrac{1}{4})(r-\varrho)^2-(k-1)(2k-1)\,r\,(r-\varrho)+\right.$$

$$\left.+(k-1)(k-2)\,r^2\right\}d\varrho =$$

$$-\frac{1}{r^{k+1/2}}\int_0^r a\,\varrho^{1/2}(r-\varrho)^{k-3}\left\{\tfrac{3}{4}(r-\varrho)^2-3(k-1)\varrho(r-\varrho)+(k-1)(k-2)\varrho^2\right\}d\varrho = 0.$$

Door de gevonden uitdrukking voor u_0 nu in (9) in te voeren komt de willekeurige oplossing u van $\Delta^{k+1}u = 0$ dus in den vorm

$$u = r^{2k}u_0 + v,$$

waarbij $\Delta u_0 = 0$ en $\Delta^k v = 0$. Voor v kan dan weer geschreven worden

$$v = r^{2k-2}u_1 + v_1,$$

waarbij $\Delta u_1 = 0$ en $\Delta^{k-1}v_1 = 0$ enz.

Hiermee is bewezen, dat ook voor dit geval iedere oplossing van $\Delta^k u = 0$ kan gebracht worden in den vorm

$$u = r^{2k-2}u_0 + r^{2k-4}u_1 + r^{2k-6}u_2 + \ldots + r^2 u_{k-2} + u_{k-1}.$$

De uitbreiding tot het geval, dat Δ een symbool in n onafhankelijk veranderlijken voorstelt brengt geen principieele moeilijkheden mee. Ook in deze gevallen openen de bewezen stellingen een weg voor het bewijs der overeenkomstige existentietheorema's.