Mathematics. — *Sur la théorie métrique des approximations diophantiques.* By J. F. KOKSMA. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of October 27, 1945.)

§ 1. *Introduction.*

1. On doit à M. A. KHINTCHINE [1]) le théorème suivant bien connu

Théorème 1. *Si $\varphi(x)$ désigne une fonction positive, monotone, non croissante du nombre naturel x, alors presque partout* [2]) *sur l'axe réel (des nombres θ) l'inégalité*

$$|\theta x - y| < \varphi(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

n'admet qu'un nombre fini de solutions entières $x \geqq 1$, y, si la série

$$\sum_{x=1}^{\infty} \varphi(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

converge et possède une infinité de telles solutions, si la série (2) diverge.

La démonstration de la première partie (cas de convergence) est bien facile [3]). La deuxième partie (cas de divergence), M. KHINTCHINE la démontra de deux manières différentes, une fois se basant sur la théorie des fractions continues et plus tard sans faire usage de cette théorie [4]). La deuxième méthode lui offra la possibilité de considérer au lieu d'une seule inégalité (1) le système des $n \geqq 1$ inégalités simultanées

$$|\theta_\nu x - y_\nu| < (\varphi(x))^{1/n} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Comme j'ai démontré antérieurement [5]), utilisant l'idée fondamentale de la démonstration de M. KHINTCHINE, il est possible de remplacer ces inégalités dans le théorème de M. KHINTCHINE par les inégalités plus générales

$$|\theta_\nu f_\nu(x) - y_\nu| < \varphi_\nu(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

pour une catégorie étendue de systèmes de $n \geqq 1$ suites

$$f_\nu(1), f_\nu(2), \ldots \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

en remplaçant la série (2) par la série

$$\sum_{x=1}^{\infty} \varphi_1(x)\, \varphi_2(x) \ldots \varphi_n(x).$$

---

1) A. KHINTCHINE, Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen. Math. Ann. **92**, 115—125 (1924).

A. KHINTCHINE, Zur metrischen Theorie der Diophantischen Approximationen, Math. Z. **24**, 706—714 (1926).

2) Dans le sens de LEBESGUE.

3) Elle se trouve dans la première communication 1).

4) Resp. dans la première et dans la deuxième communication 1).

5) J. F. KOKSMA, Contribution à la théorie métrique des approximations diophantiques non-linéaires. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **45**, 176—183, 263—268 (1942).

2. Dans le présent mémoire je développerai un théorème général (le théorème 4), analogue au théorème 1 (où dans l'inégalité (1) l'expression $\theta x - y$ sera remplacée par l'expression plus générale $F(x, \theta) - y - \alpha(x)$), mais ne contenant pas celui ci comme cas spécial. Cependant ce théorème permet des applications à des classes bien étendues de fonctions transcendantes $F(x, \theta)$, par exemple à la fonction exponentielle θ^x, comme le montre le théorème 2 qui est contenu dans le théorème 4 comme cas spécial [6]).

Théorème 2. *Soit $f(x)$ une fonction positive du nombre naturel x, telle que $f(x+1) - f(x) \geqq \sigma$, où σ désigne un nombre positif, indépendant de x. Soit $\varkappa(x)$ une fonction positive du nombre naturel x, telle que $\varkappa(x) f(x)$ soit une fonction monotone, non décroissante par rapport à $x \geqq \bar{x}_0$. Soit enfin α un nombre réel donné et $\varphi(x)$ une fonction positive, monotone, non croissante du nombre naturel x.*

Alors presque partout sur $\theta \geqq 1$ l'inégalité

$$-\varphi(x) \leqq \varkappa(x)\, \theta^{f(x)} - y - \alpha \leqq \varphi(x)$$

n'admet qu'un nombre fini de solutions entières $x \geqq 1$, y, si la série (2) converge, tandis que l'inégalité

$$0 < \varkappa(x)\, \theta^{f(x)} - y - \alpha < \varphi(x)$$

de même que l'inégalité

$$-\varphi(x) < \varkappa(x)\, \theta^{f(x)} - y - \alpha < 0$$

possède une infinité de telles solutions, si (2) diverge.

Remarques. 1. Il est sousentendu que $f(x)$, $\varkappa(x)$, $\varphi(x)$, $\bar{x}_0$, σ et α ne dépendent pas de θ. De même dans ce qui suit les grandeurs considérées ne dépendront pas du paramètre θ, si cela n'est pas exprimé explicitement dans le texte ou par la notation.

2. Les conditions du théorème 2 seront remplies, si l'on y pose

$$\varkappa(x) = 1,\ f(x) = x,\ x_0 = 1,\ \sigma = 1 \qquad \text{et donc } \varkappa(x)\, \theta^{f(x)} = \theta^x.$$

De même le théorème 4 contient comme cas spécial [7]) le

Théorème 3. *Soit $f(x)$ une fonction positive et croissante du nombre naturel x, telle que pour tout couple de nombres entiers $x \geqq 1$, $k \geqq 1$*

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{f(x+i)}{f(x+k)} \leqq C \qquad (C \text{ ne dépendant pas de } x, k). \quad . \quad . \quad (3)$$

Soit α un nombre réel et $\varphi(x)$ une fonction positive, monotone, non croissante du nombre naturel x. Alors presque partout sur l'axe réel des nombres θ, l'inégalité

$$-\varphi(x) \leqq \theta f(x) - y - \alpha \leqq \varphi(x)$$

---

[6]) Pour la démonstration, voir le § 2.

[7]) Pour la démonstration, voir le § 3.

n'admet qu'un nombre fini de solutions entières $x \geqq 1$, y si la série (2) *converge, tandis que l'inégalité*

$$0 < \theta f(x) - y - \alpha < \varphi(x),$$

de même que l'inégalité

$$-\varphi(x) < \theta f(x) - y - \alpha < 0$$

possède une infinité de telles solutions, si (2) *diverge.*

Remarque. La condition (3) sera remplie, si $f(x+1) \geqq \tau f(x)$, où $\tau > 1$ ne dépend pas de x.

3. Formulons maintenant le

Théorème 4A. Conditions. I. *Soient a et $b (a < b)$ des nombres réels donnés, x_0 un nombre naturel donné et $F(x, \theta)$ pour chaque nombre θ du segment $a \leqq \theta \leqq b$ une fonction positive du nombre naturel $x \geqq x_0$, telle que*

$$F(x, \theta) \to \infty, \quad si\ x \to \infty \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

et en outre pour chaque nombre naturel $x \geqq x_0$ une fonction dérivable par rapport à θ, dont la dérivée $F'_\theta(x, \theta)$ soit positive, monotone, non décroissante, par rapport à θ et pour chaque θ du segment $a \leqq \theta \leqq b$ soit monotone, non décroissante par rapport à $x \geqq x_0$, de sorte que

$$F'_\theta(x, \theta) \to \infty, si\ x \to \infty \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Enfin soient $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ deux fonctions réelles du nombre naturel x, telles que

$$\varphi(x) = \beta(x) - \alpha(x) \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

soit une fonction positive, monotone, non croissante de x.

II. *Supposons que la série* (2) *converge.*

Assertion. *Alors presque partout sur le segment $a \leqq \theta \leqq b$ l'inégalité*

$$\alpha(x) \leqq F(x, \theta) - y \leqq \beta(x) \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

n'admet qu'un nombre fini de solutions entières $x \geqq 1$, y.

Théorème 4B. Conditions. I. *Supposons les conditions I du théorème 4A remplies.*

II. *Supposons que la série* (2) *diverge. Supposons enfin que pour chaque couple de nombres entiers $x \geqq x_0$, $k \geqq 1$, on ait*

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{F'_\theta(x+i, \theta)}{F'_\theta(x+k, \theta)} \leqq C,$$

C désignant une constante positive, indépendante de x, k, et θ.

Assertion. *Alors presque partout sur le segment $a \leqq \theta \leqq b$ l'inégalité*

$$\alpha(x) < F(x, \theta) - y < \beta(x) \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

possède une infinité de solutions entières $x \geqq 1$, y.

Le lecteur peut trouver la preuve du théorème 4A dans le § 8.

4. Comme nous démontrerons dans le § 4, le théorème 4B est contenu dans le théorème 4 B′ suivant, qui concerne une classe de fonctions $F(x, \theta)$ un peu plus étendue que celle du théorème 4B, mais par contre contient quelques restrictions par rapport à la fonction $\varphi(x)$.

Théorème 4B′. I. *Supposons les conditions I du théorème 4A remplies.*

II. *Soit le nombre naturel $\Lambda(x)$ une fonction monotone, non décroissante du nombre naturel x, telle que $\Lambda(x) \to \infty$, si $x \to \infty$ et telle que*

$$\sum_{x=1}^{\infty} \varphi(\Lambda(x))$$

diverge; soient γ et δ deux nombres positifs, indépendants de x tels que

$$2\gamma + \delta < 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

et $K = K(x)$ l'indice $\geqq 0$ tel que [8])

$$\sum_{k=0}^{K-1} \varphi(\Lambda(x+k)) \leqq \gamma < \sum_{k=0}^{K} \varphi(\Lambda(x+k))\,(x \geqq x_0) \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Enfin supposons que pour chaque entier $x \geqq x_0$ tel que $K(x) \geqq 1$, chaque entier k sur $1 \leqq k \leqq K(x)$ et chaque nombre θ sur $a \leqq \theta \leqq b$, on ait

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{F'_\theta(\Lambda(x+i), \theta)}{F'_\theta(\Lambda(x+k), \theta)} \leqq \delta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Alors l'assertion du théorème 4B est juste.

Si l'on pose dans ce théorème $\Lambda(x) = x$, on voit d'un coup d'oeil qu'il entraine le

Théorème 4B″. I. *Supposons les conditions I du théorème 4A remplies.*

II. *Soit la série (2) divergente; soient γ et δ deux nombres positifs, indépendants de x, tels que*

$$2\gamma + \delta < 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

et soit $K = K(x)$ l'indice $\geqq 0$ tel que [8])

$$\sum_{k=0}^{K-1} \varphi(x+k) \leqq \gamma < \sum_{k=0}^{K} \varphi(x+k) \quad (x \geqq x_0); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

supposons en outre que, si $K(x) \geqq 1$, pour chaque entier k sur $1 \leqq k \leqq K(x)$ et tout nombre θ sur $a \leqq \theta \leqq b$

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{F'_\theta(x+i, \theta)}{F'_\theta(x+k, \theta,} \leqq \delta, \text{ si } x \geqq x_0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Alors l'assertion du théorème 4B est vraie.

---

[8]) Pour $K = 0$, nous posons $\sum_{k=0}^{K-1} = 0$.

Remarque. Comme nous démontrerons aisément dans le § 5, non seulement le théorème 4B′ contient le théorème 4B″, mais à son tour le théorème 4B″ contient le théorème 4B′: c'est à dire que les deux théorèmes sont équivalents; nous pouvons donc nous restreindre à la démonstration du théorème 4B″, qu'on peut trouver dans le § 9.

5. Comme application du théorème 4B′ je démontre dans le § 6 le

Théorème 5. *Soit ω un nombre positif $\leqq 1$, soit a un nombre réel et soit $\varphi(x)$ une fonction positive, monotone, non croissante, telle que la série*

$$\sum_{x=1}^{\infty} \varphi([x^{1/\omega}])$$

diverge. Alors presque partout sur la demie-droite $\theta \geqq 1$ l'inégalité

$$a < \theta^{x^{\omega}} - y < a + \varphi(x)$$

de même que l'inégalité

$$a - \varphi(x) < \theta^{x^{\omega}} - y < a$$

possède une infinité de solutions entières $x \geqq 1$, y.

Remarque. Par exemple on peut poser $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^{\omega} \log x}$.

Dans ce mémoire $[u]$ désigne l'entier de u.

6. Dans une communication antérieure, j'ai démontré par une toute autre méthode que pour une certaine catégorie de fonctions $F(x, \theta)$ ($a \leqq \theta \leqq b$; $x = 1, 2, \dots$) presque partout sur le segment considéré $a \leqq \theta \leqq b$ l'inégalité

$$a < F(x, \theta) - y < a + \frac{\psi(x)}{x^{1/3}}$$

de même que l'inégalité

$$a - \frac{\psi(x)}{x^{1/3}} < F(x, \theta) - y < a$$

possède une infinité de solutions entières $x \geqq 1$, y, si $\psi(x)$ désigne une fonction croissante quelconque du nombre naturel x et a un nombre réel quelconque [9]).

Entre ce résultat et les théorèmes du présent article il y a une différence essentielle par rapport au choix du nombre a: dans le présent mémoire l'ensemble de mesure nulle dépend du choix de a et dans la communication citée on peut choisir encore arbitrairement le nombre a après avoir fixé le nombre θ. Mais abstraction faite de ce détail il est clair que pour toute fonction $F(x, \theta)$ où le théorème 4B est applicable, ce théorème présente une amélioration considérable. Quant au théorème 4B′, il y a des cas où le

---

[9]) J. F. KOKSMA, Metrisches zur Theorie der Diophantischen Approximationen. Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **39**, 225—240 (1936).

résultat fourni est meilleur que le résultat antérieur cité, mais de même il y a des cas où le théorème 4B′ n'amène aucune amélioration. Par exemple, le théorème antérieur vaut dans le cas où $F(x, \theta) = x^{\theta}$ $(\theta \geqq 1,$ $x = 1, 2, \ldots)$, mais pour cette fonction le théorème 4B′ donne un résultat fort mauvais. Aussi dans le cas où $F(x, \theta) = \theta^{x^{\omega}}$ $(\theta \geqq 1, x = 1, 2, \ldots)$ considéré dans le théorème 5, ce théorème apporte une amélioration des résultats connus, si $\omega > \frac{1}{3}$, mais non pas, si $\omega < \frac{1}{3}$.

7. Dans cet article je me suis borné à considérer une seule inégalité (8), bien que la méthode employée permet de considérer des inégalités simultanées de cette forme.

§ 2. *Démonstration que le théorème 2 est contenu dans les théorèmes 4A, B.*

Appliquons le théorème 4A en posant

$$1 < a < b, \quad x_0 \geqq \mathrm{Max}\left(x_0, \frac{1+\sigma}{\sigma}\right)$$

$$F(x, \theta) = \varkappa(x)\, \theta^{f(x)}, \text{ donc } F'_{\theta}(x, \theta) = \varkappa(x)\, f(x)\, \theta^{f(x)-1},$$

$$\alpha(x) = a - \varphi(x), \quad \beta(x) = a + \varphi(x)$$

et avec $2\varphi(x)$ au lieu de $\varphi(x)$. Alors la première partie du théorème 2 (cas de convergence) découle immédiatement du théorème 4A.

Pour démontrer la deuxième partie, nous posons

$$\alpha(x) = a,\ \beta(x) = a + \varphi(x), \text{ resp. } \alpha(x) = a - \varphi(x),\ \beta(x) = a.$$

Remarquons que, lorsque $x \geqq x_0$

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{F'_{\theta}(x+i, \theta)}{F'_{\theta}(x+k, \theta)} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\varkappa(x+i)\, f(x+i)}{\varkappa(x+k)\, f(x+k)}\, \theta^{-(f(x+k)-f(x+i))}$$

$$\leqq \sum_{i=0}^{k-1} a^{-\sigma(k-i)} = \sum_{j=1}^{k} a^{-\sigma j} < \frac{1}{a^{\sigma}-1},$$

c'est à dire que les conditions du théorème 4B sont remplies avec $C = \frac{1}{a^{\sigma}-1}$ pour tout segment $a \leqq \theta \leqq b$ où $1 < a < b$. D'où le théorème 2.

§ 3. *Démonstration que le théorème 3 est contenu dans les théorèmes 4A, B.*

Il saute aux yeux que nous pouvons nous restreindre au cas où $\theta > 0$, parce que le cas où $\theta < 0$ se ramène facilement à celui ci par changement de signe dans les inégalités considérées. Appliquons le théorème 4A en posant $0 < a < b$,

$$F(x, \theta) = \theta\, f(x), \text{ donc } F'_{\theta}(x, \theta) = f(x),$$

$$\alpha(x) = a - \varphi(x), \quad \beta(x) = a + \varphi(x)$$

et avec $2\varphi(x)$ au lieu de $\varphi(x)$. Alors la première partie du théorème 3 résulte immédiatement du théorème 4A.

Pour démontrer la deuxième partie, nous posons

$$\alpha(x)=a,\ \beta(x)=a+\varphi(x),\ \text{resp. } \alpha(x)=a-\varphi(x),\ \beta(x)=a.$$

Remarquons que

$$\sum_{i=0}^{k-1}\frac{F'_\theta(x+i,\theta)}{F'_\theta(x+k,\theta)}=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{f(x+i)}{f(x+k)}\leqq C$$

(d'après (3)), c'est à dire que les conditions du théorème 4B sont remplies. La deuxième assertion du théorème 3 en est une conséquence immédiate.

§ 4. *Démonstration que le théorème* 4B *est contenu dans le théorème* 4B′.

Posons dans le théorème 4B′:

$A(x)=Nx$, où N est un nombre entier $>2C$, C désignant la constante dans le théorème 4B et en outre $\gamma=\frac{1}{6}$, $\delta=\frac{1}{2}$.

Alors $\varphi(x)$ étant une fonction monotone, non croissante, nous aurons

$$\sum_{x=1}^{M}\varphi(Nx)\geqq\frac{1}{N}\sum_{x=N}^{MN+N-1}\varphi(x)\to\infty,\ \text{si } M\to\infty,$$

parce que (2) diverge. Ça veut dire que de même la série

$$\sum_{x=1}^{\infty}\varphi(Nx)$$

diverge. Alors $K(x)$ étant désigné par (10), le membre gauche de (11) pour $1\leqq k\leqq K(x)$ et $x\geqq x_0$ est égal à

$$\sum_{i=0}^{k-1}\frac{F'_\theta((x+i)N,\theta)}{F'_\theta((x+k)N,\theta)}\leqq\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{Nk-1}\frac{F'_\theta(Nx+j,\theta)}{F'_\theta(Nx+Nk,\theta)}\leqq\frac{C}{N}<\tfrac{1}{2}=\delta$$

d'après les conditions du théorème 4B. Toutes les conditions du théorème 4B′ étant remplies, il en découle que l'assertion du théorème 4B est juste.

§ 5. *Démonstration que les théorèmes* 4B′ *et* 4B″ *sont équivalents.*

1. Comme nous avons remarqué dans le § 1, le théorème 4B″ résulte du théorème 4B′ immédiatement.

2. Démontrons que le théorème 4B″ entraine le théorème 4B′. A cet effet nous posons

$$F^*(x,\theta)=F(A(x),\theta),\quad \alpha^*(x)=\alpha(A(x)),$$
$$\beta^*(x)=\beta(A(x)),\quad \varphi^*(x)=\varphi(A(x)),$$

où $F, \alpha, \beta, \varphi, A$ désignent les fonctions du théorème 4B′. Alors les conditions I du théorème 4A seront remplies, si l'on y remplace $F, \alpha, \beta, \varphi$ par $F^*, \alpha^*, \beta^*, \varphi^*$. En outre les conditions II du théorème 4B′ entrainent que

$K(x)$ suffit à la condition (13), si l'on y remplace la fonction $\varphi(x)$ par $\varphi^*(x)$. Envisageons maintenant l'expression

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{F_\theta^{*\prime}(x+i,\theta)}{F_\theta^{*\prime}(x+k,\theta)} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{F_\theta'(A(x+i),\theta)}{F_\theta'(A(x+k),\theta)} \leqq \delta$$

d'après (11), si $1 \leqq k \leqq K(x)$. C'est à dire que (14) sera rempli, si l'on y remplace F par F^*.

Ainsi, toutes les conditions du théorème 4B″ étant remplies, ce théorème nous apprend que presque partout sur $a \leqq \theta \leqq b$, l'inégalité

$$a^*(x) < F^*(x, a) - y < \beta^*(x),$$

c'est à dire

$$a(A(x)) < F(A(x), \theta) - y < \beta(A(x))$$

possède une infinité de solutions entières $x \geqq 1$, y, mais cela veut dire que presque partout sur $a \leqq \theta \leqq b$ l'inégalité (8) possède une infinité de telles solutions.

§ 6. *Démonstration que le théorème 5 est contenu dans le théorème 4B′.*

Appliquons le théorème 4B′ en posant $1 < a < b$, $x_0 \geqq 1$,

$$F(x,\theta) = \theta^{x^\omega}, \text{ donc } F_\theta'(x,\theta) = x^\omega \theta^{x^\omega - 1},$$

$$a(x) = a, \beta(x) = \beta + \varphi(x), \text{ resp. } a(x) = a - \varphi(x), \beta(x) = a.$$

Alors les conditions I du théorème 4A sont remplies. Quant aux conditions II du théorème 4B′, nous posons

$$A(x) = [(Nx)^{\frac{1}{\omega}}], \gamma = \tfrac{1}{6}, \sigma = \tfrac{1}{2},$$

où N désigne un nombre naturel fixe, tel que $\frac{a}{a^N - 1} < \frac{1}{2}$. Alors d'après les conditions du théorème 5 la série

$$\sum_{x=1}^{\infty} \varphi(A(x)) = \sum_{x=1}^{\infty} \varphi([(Nx)^{\frac{1}{\omega}}])$$

diverge [10]). Si $K(x)$ désigne l'indice défini par (10), nous aurons pour $x \geqq x_0$ et $1 \leqq k \leqq K(x)$

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{F_\theta'(A(x+i),\theta)}{F_\theta'(A(x+k),\theta)} \leqq \sum_{i=0}^{k-1} a^{[(N(x+i))^{\frac{1}{\omega}}]^\omega - [(N(x+k))^{\frac{1}{\omega}}]^\omega} \leqq \sum_{i=0}^{k-1} a^{N(x+i) - N(x+k) + 1}$$

parce qu'on a pour $u > 1$

$$(u^{\frac{1}{\omega}} - 1)^\omega = (u-1)\,\omega\,(v^{\frac{1}{\omega}} - 1)^{\omega-1} \frac{1}{\omega} v^{\frac{1}{\omega}-1} = (u-1)\left(\frac{v^{\frac{1}{\omega}} - 1}{v^{\frac{1}{\omega}}}\right)^{\omega-1}$$

$$> u - 1 \qquad (1 < v < u).$$

[10]) Cf. le raisonnement analogue dans le § 4.

Alors on a

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{F'_\theta(\Lambda(x+i),\theta)}{F'_\theta(\Lambda(x+k),\theta)} \leqq a \sum_{j=1}^{k} a^{-Nj} < \frac{a}{a^N-1} < \tfrac{1}{2} = \delta.$$

Toutes les conditions du théorème 4B′ étant remplies, le théorème 5 en résulte immédiatement.

§ 7. *Quelques remarques sur les théorèmes* 4A *et* B″.

I. Sans nuire à la généralité nous pouvons supposer

$$0 \leqq \alpha(x) < 1 \quad \text{et} \quad \varphi(x) < 1, \text{ si } x \geqq x_0$$

et donc

$$\beta(x) = \alpha(x) + \varphi(x) < 2 \quad \text{si } x \geqq x_0.$$

II. Désignons par $\theta = \Phi(x, y)$ la fonction inverse de $y = F(x, \theta)$ par rapport à $\theta (a \leqq \theta \leqq b)$. Il est clair que $\Phi(x, y)$ est une fonction croissante par rapport à y sur le segment $F(x, a) \leqq y \leqq F(x, b)$ et que $\Phi'_y(x, y)$ est monotone, non croissante sur ce segment, le nombre $x \geqq x_0$ étant supposé fixe.
Remarquons finalement que sur $a \leqq x \leqq b$

$$\frac{1}{F'_\theta(x, \theta)} \leqq \frac{1}{F'_\theta(x, a)} \to 0, \text{ si } x \to \infty,$$

c'est à dire que

$$\Phi'_y(x, y) = \frac{1}{F'_\theta(x, \Phi(x, y))} \to 0, \text{ si } x \to \infty$$

uniformément en y sur le segment

$$T(x) \ldots \qquad F(x, a) \leqq y \leqq F(x, b).$$

III. On voit d'un coup d'oeil qu'il suffira de démontrer les théorèmes 4 presque partout sur $a' \leqq \theta \leqq b'$, lorsque a', b' désignent deux nombres arbitraires, pour lesquels $a < a' < b' < b$. Supposons ces nombres fixés durant le reste de ce mémoire. Alors nous pouvons supposer

$$x_1 = x_1(a', b') \geqq x_0,$$

assez grand pour qu'on ait pour $x \geqq x_1$

$$\Phi'_y(x, y) < Min\,(b - b', a' - a) \text{ sur } T(x)$$

et en outre

$$F(x, a) + 2 < F(x, a') < F(x, a') + 2 < F(x, b') - 2$$
$$< F(x, b') < F(x, b) - 2,$$

car pour $a \leqq a'' < b'' \leqq b$ on a

$$F(x, b'') - F(x, a'') \geqq (b'' - a'')\, F'_\theta(x, a) \to \infty, \text{ si } x \to \infty.$$

Les nombres a' et b' étant fixés, nous pouvons choisir deux nombres arbitraires A et B pour lesquels $a' < A < B < b'$ et supposer

$$x_2 = x_2(A, B) \geqq x_1$$

assez grand, pour que de plus

$$F(x, A) + 2 < F(x, B) - 2, \text{ si } x \geqq x_2.$$

IV. Dans tous les lemmes suivants (1 — 8) les conditions I du théorème 4A sont sousentendues. Les conditions II du théorème 4B″ ne rentreront que dans le lemme 8.

§ 8. *Démonstration du théorème* 4A.

1. Démontrons d'abord le

Lemme 1. *Si les conditions* I *du théorème* 4A *sont remplies et a', b', x_1 désignent les nombres de la* III-*ième remarque du* § 7, *alors afin que les nombres entiers $x \geqq x_1$, y et le nombre réel θ $(a' \leqq \theta \leqq b')$ satisfassent à l'inégalité* (7), *il faut que y appartient au segment*

$$F(x, a') - \beta(x) \leqq y \leqq F(x, b') - \alpha(x) \quad . \ . \ . \ . \quad (15)$$

et que θ appartient au segment

$$P(x, y) \ldots . - \varphi(x)\, \Phi'_y(x, y + \alpha(x)) \leqq \theta - \Phi(x, y + \beta(x)) \leqq 0. \quad (16)$$

Démonstration. De (7) et (6) découle

$$F(x, \theta) = y + \beta(x) - \vartheta\, \varphi(x) \quad (0 \leqq \vartheta \leqq 1),$$

d'où (15) et d'où en outre

$$\begin{aligned}\theta = \Phi(x, y + \beta(x) - \vartheta\, \varphi(x)) &= \Phi(x, y + \beta(x)) \\ &- \vartheta\, \varphi(x)\, \Phi'_y(x, y + \beta(x) - \vartheta'\, \varphi(x))\end{aligned}$$

$(0 \leqq \vartheta' \leqq \vartheta)$, d'où (16).

2. Soit $x \geqq x_1$ un nombre entier, θ un nombre sur $a' \leqq \theta \leqq b'$. Afin que (7) soit rempli, il faut d'après le lemme 1 que (15) et (16) soient remplis.

Désignons par $E'(x)$ l'ensemble des nombres θ du segment $a' \leqq \theta \leqq b'$ auxquels au moins un nombre y correspond tel que (7) soit rempli. Alors on a donc

$$m\, E'(x) \leqq \Sigma\, \varphi(x)\, \Phi'_y(x, y + \alpha(x))$$

où le signe de sommation s'étend sur les entiers y appartenants au segment (15), c'est à dire que

$$\begin{aligned} m\, E'(x) &\leqq \varphi(x) \left\{ \int\limits_{F(x, a') - \alpha(x)}^{F(x, b') - \alpha(x)} \Phi'_y(x, y + \alpha(x))\, dy + 2\, \Phi'_y(x, F(x, a') - \varphi(x)) \right\} \\ &\leqq \varphi(x) \{ b' - a' + 2\, \Phi'_y(x, F(x, a') - 1) \} \\ &\leqq 2\, \varphi(x)(b' - a'), \text{ si } x \geqq x_1^*(a', b') \geqq x_1. \end{aligned}$$

Considérons maintenant l'ensemble E' des nombres θ du segment $a' \leqq \theta \leqq b'$ pour lesquels (7) possède une infinité de solutions entières $x \geqq 1, y$. Alors θ est contenu dans tous les ensembles

$$E^*(x) = \sum_{k=0}^{\infty} E'(x+k) \quad (x \geqq 1),$$

donc dans l'ensemble produit E^* des ensembles

$$E^*(1) \supset E^*(2) \supset \ldots .$$

Or, alors l'ensemble E' pour tout nombre naturel $x \geqq x_1^*$ possède la mesure

$$m\,E' \leqq m\,E^* \leqq m\,E^*(x) \leqq \sum_{k=0}^{\infty} m\,E'(x+k)$$
$$\leqq 2(b'-a') \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(x+k) < \varepsilon$$

pour tout nombre positif ε, si $x \geqq x_2^* = x_2^*(\varepsilon) \geqq x_1^*$, en vertu de la convergence de la série (2). C'est à dire que $mE' = 0$. C.f.d.

§ 9. *Démonstration du théorème* 4B″.

1. Démontrons d'abord quelques lemmes.

Lemme 2. *Si les conditions* I *du théorème* 4A *sont remplies, et* a', b', x_1 *désignent les nombres de la* III-*ième remarque du* § 7, *alors afin que les nombres entiers* $x \geqq x_1$, y *et le nombre réel* θ $(a' \leqq \theta \leqq b')$ *satisfassent à l'inégalité* (8), *il suffit que* $y + \beta(x)$ *appartient au segment* $T(x)$ *et qu'en même temps* θ *appartient à l'intervalle*

$$Q(x,y) \ldots . \quad -\varphi(x)\,\Phi'_y(x, y+\beta(x)) < \theta - \Phi(x, y+\beta(x)) < 0. \tag{17}$$

Démonstration. Il suit de (17)

$$\theta = \Phi(x, y+\beta(x)) - \vartheta\,\varphi(x)\,\Phi'_y(x, y+\beta(x)) \quad (0 < \vartheta < 1),$$

donc

$$F(x,\theta) = F(x, \Phi(x, y+\beta(x))) - \vartheta\,\varphi(x)\,\Phi'_y(x, y+\beta(x)) .$$
$$.\, F'_\theta(x, \Phi(x, y+\beta(x)) - \vartheta'\,\varphi(x)\,\Phi'_y(x, y+\beta(x)))$$

$(0 < \vartheta' < \vartheta)$, c'est à dire

$$0 > F(x,\theta) - y - \beta(x) > -\varphi(x) \frac{F'_\theta(x, \Phi(x, y+\beta(x)))}{F'_\theta(x, \Phi(x, y+\beta(x)))} =$$
$$= -\varphi(x) = -\beta(x) + \alpha(x),$$

d'où (8).

Lemme 3. *Si, les conditions* I *du théorème* 4A *étant remplies, pour* $x \geqq x_2$ *le nombre* y *parcourt les nombres entiers du segment*

$$R(x) \ldots . \; F(x,A) - \alpha(x) \leqq y \leqq F(x,B) - \beta(x), \quad . \; . \tag{18}$$

où x_2, A et B désignent les nombres du III-ième remarque du § 7, alors toutes les intervalles $Q(x, y)$ (x étant supposé fixe) définies par (17) sont situées dans l'intervalle $A \leqq \theta \leqq B$.

Démonstration. Des relations (17) et (18) nous déduisons

$$\theta < \Phi(x, y+\beta(x)) \leqq \Phi(x, F(x, B)) = B$$

et en outre

$$\left.\begin{array}{c}\theta > \Phi(x, y+\beta(x)) - \varphi(x)\, \Phi'_y(x, y+\beta(x)) \geqq \\ \Phi(x, F(x, A)+\varphi(x)) - \varphi(x)\, \Phi'_y(x, F(x, A)+\varphi(x)),\end{array}\right\} \quad (19)$$

comme $\Phi(x, z) - \varphi(x)\Phi'_y(x, z)$ est monotone, non décroissante par rapport à z. Remarquons que

$$F(x, A+\varphi(x)\,\Phi'_y(x, F(x, A)+\varphi(x))) =$$

$$F(x, A) + \varphi(x)\, \Phi'_y(x, F(x, A)+\varphi(x))\,.$$

$$.\, F'_\theta(x, A+\vartheta\,\varphi(x)\,\Phi'_y(x, F(x, A)+\varphi(x)))\;(0<\vartheta<1)$$

$$\leqq F(x, A) + \varphi(x)\frac{F'_\theta(x, A+\varphi(x)\,\Phi'_y(x, F(x, A)+\varphi(x)))}{F'_\theta(x, \Phi(x, F(x, A)+\varphi(x)))}$$

$$= F(x, A) + \varphi(x)\frac{F'_\theta(x, A+\varphi(x)\,\Phi'_y(x, F(x, A)+\varphi(x)))}{F'_\theta(x, A+\varphi(x)\,\Phi'_y(x, F(x, A)+\vartheta'\,\varphi(x)))}$$

(d'après le théorème de la moyenne; $0 < \vartheta' < 1$)

$$\leqq F(x, A) + \varphi(x)$$

en vertu de la monotonie de F'_θ et de Φ'_y par rapport à θ, resp. à y.

Par conséquent il suit de (19)

$$\theta > \Phi(x, F(x, A+\varphi(x)\,\Phi'_y(x, F(x, A)+\varphi(x))))$$
$$- \varphi(x)\,\Phi'_y(x, F(x, A)+\varphi(x)) = A.$$

Lemme 4. *Si, les conditions du lemme 2 étant remplies, nous désignons par $E(x)$ l'ensemble des intervalles $Q(x, y)$ définies par (17), où y parcourt les nombres entiers du segment $R(x)$, défini dans le lemme 3 par (18), ($x \geqq x_2$), alors deux intervalles différentes de $E(x)$ n'ont pas de points communs.*

Démonstration. Comme les points terminaux à droite $\Phi(x, y+\beta(x))$ des intervalles $Q(x, y)$ constituent une suite croissante par rapport à y, il suffit de démontrer

$$\Phi(x, y+\beta(x)+1) - \Phi(x, y+\beta(x)) > \varphi(x)\,\Phi'_y(x, y+\beta(x)+1).$$

Or, le membre gauche est égal à

$$\Phi'_y(x, y+\beta(x)+\vartheta) > \varphi(x)\,\Phi'_y(x, y+\beta(x)+1)\;(0<\vartheta<1).$$

Lemme 5. *Soit ε un nombre positif quelconque. Alors il y a un nombre $x_3 = x_3(\varepsilon, A, B) \geq x_2$, tel que*

$$m\,E(x) > \frac{\varphi(x)}{1+\varepsilon}(B-A), \quad si\; x \geqq x_3,$$

où $mE(x)$ désigne la mesure de l'ensemble $E(x)$ du lemme 4.

Démonstration. Il résulte du lemme 4

$$m\,E(x) \geqq \sum_{\substack{y \text{ dans } R(x) \\ y \text{ entier}}} \varphi(x)\,\Phi'_y(x, y+\beta(x))$$

$$\geqq \varphi(x) \int\limits_{F(x,A)-a(x)+2}^{F(x,B)-\beta(x)} \Phi'_y(x, y+\beta(x))\,dy =$$

$$= \varphi(x)\,\{B - \Phi(x, F(x, A) + \varphi(x) + 2)\}$$

$$\geqq \varphi(x)\,\{B - A - 3\,\Phi'_y(x, F(x, A) + 3\,\vartheta)\}\;(0 < \vartheta < 1)$$

et alors

$$\geqq \frac{\varphi(x)}{1+\varepsilon}(B-A), \; si\; x \geqq x_3(\varepsilon, A, B).$$

Lemme 6. *Soit i, k un couple d'entiers $(0 \leqq i \leqq k-1)$, alors afin que, les définitions du lemme 4 étant employées, deux intervalles $Q(x+i, v)$ et $Q(x+k, y)$, resp. de l'ensemble $E(x+i)$ et de l'ensemble $E(x+k)$ $(x \geqq x_2)$, aient un point commun, il faut que*

$$|v + \beta(x+i) - F(x+i, \Phi(x+k, y+\beta(x+k)))| < \varphi(x+i). \quad (20)$$

Démonstration. D'après le lemme 3 les deux intervalles sont situées dans $A \leqq \theta \leqq B$. Considérons la distance λ de leurs points terminaux à droite, c'est à dire

$$\lambda = \Phi(x+k, y+\beta(x+k)) - \Phi(x+i, v+\beta(x+i)). \quad (21)$$

Alors

$$\Phi(x+i, v+\beta(x+i)) = \Phi(x+k, y+\beta(x+k)) - \lambda$$

et donc

$$v + \beta(x+i) = F(x+i, \Phi(x+k, y+\beta(x+k) - \lambda)$$

$$= F(x+i, \Phi(x+k, y+\beta(x+k)) +$$

$$- \lambda\,F'_0(x+i, \Phi(x+k, y+\beta(x+k)) - \vartheta\,\lambda)$$

où $0 < \vartheta < 1$. Maintenant distinguons deux cas.

A. Soit $\lambda \geqq 0$. Alors on a

$$\left.\begin{aligned} &|v + \beta(x+i) - F(x+i, \Phi(x+k, y+\beta(x+k)))| \leqq \\ &\qquad \leqq |\lambda|\,F'_0(x+i, \Phi(x+k, y+\beta(x+k))). \end{aligned}\right\} \quad (22\,A)$$

B. Soit $\lambda \leqq 0$. Alors on a

$$\left.\begin{array}{l} |v+\beta(x+i)-F(x+i,\Phi(x+k,y+\beta(x+k)))| \leqq \\ \qquad |\lambda| F'_\theta(x+i,\Phi(x+k,y+\beta(x+k))+|\lambda|)= \\ \qquad\qquad =|\lambda| F'_\theta(x+i,\Phi(x+i,v+\beta(x+i))). \end{array}\right\} \quad (22\,\mathrm{B})$$

2. Remarquons que pour l'éxistence d'un point commun aux intervalles $Q(x+i,v)$ et $Q(x+k,y)$, il faut en vertu de (17) et de (21) que

$$|\lambda| < \varphi(x+k)\,\Phi'_y(x+k,y+\beta(x+k)),\ si\ \lambda \geqq 0, \quad . \quad (23\,\mathrm{A})$$

$$|\lambda| < \varphi(x+i)\,\Phi'_y(x+i,v+\beta(x+i)),\ si\ \lambda \leqq 0. \quad . \quad . \quad (23\,\mathrm{B})$$

Distinguons deux cas encore.

I. Soit $\lambda \geqq 0$. Alors nous tirons de (22A) et (23A)

$$|v+\beta(x+i)-F(x+i,\Phi(x+k,y+\beta(x+k)))|$$

$$< \varphi(x+k)\frac{F'_\theta(x+i,\Phi(x+k,y+\beta(x+k)))}{F'_\theta(x+k,\Phi(x+k,y+\beta(x+k)))} \leqq \varphi(x+k) \leqq \varphi(x+i).$$

II. Soit $\lambda \leqq 0$. Alors nous tirons de (22B) et (23B)

$$|v+\beta(x+i)-F(x+i,\Phi(x+k,y+\beta(x+k)))|$$

$$< \varphi(x+i)\frac{F'_\theta(x+i,\Phi(x+i,v+\beta(x+i)))}{F'_\theta(x+i,\Phi(x+i,v+\beta(x+i)))} = \varphi(x+i).$$

C. f. d.

Lemme 7. *Désignons, les définitions du lemme 4 étant employées, par* $G(x+i,x+k)$ $(x \geqq x_2,\ 0 \leqq i \leqq k-1)$ *l'ensemble constitué de toutes ces intervalles* $Q(x+k,y)$ *de* $E(x+k)$ *qui ont au moins un point commun avec au moins une des intervalles* $Q(x+i,v)$ *de* $E(x+i)$. *Alors à tout nombre positif* ε' *correspond un indice* $x_4 = x_4(\varepsilon', A, B) \geqq x_2$, *tel que pour* $x \geqq x_4$ *on ait*

$$m\,G(x+i,x+k) \leqq \varphi(x+k)\left\{2(1+\varepsilon')\varphi(x+i)(B-A)+ \int_A^B \frac{F'_\theta(x+i,t)}{F'_\theta(x+k,t)}dt+\frac{1}{F'_\theta(x+k,A)}\right\} \quad (24)$$

Démonstration. La fonction $F(x+i,\ \Phi(x+k,\ y+\beta(x+k)))$ est une fonction croissante par rapport à y; elle parcourt le segment $T(x+i)$, si $y+\beta\ (x+k)$ parcourt $T(x+k)$. Sur l'intervalle

$$F(x+k,\Phi(x+i,v+\beta(x+i)-1))-\beta(x+k) \leqq$$
$$\leqq y < F(x+k,\Phi(x+i,v+\beta(x+i)))-\beta(x+k)$$

elle croît de $v+\beta\ (x+i)-1$ à $v+\beta\ (x+i)$ et sur l'intervalle

$$F(x+k,\Phi(x+i,v+\beta(x+i)))-\beta(x+k) \leqq$$
$$y < F(x+k,\Phi(x+i,v+\beta(x+i)+1))-\beta(x+k)$$

elle croît de $v+\beta\ (x+i)$ à $v+\beta\ (x+i)+1$ (si du moins ces trois valeurs sont situées dans le domaine $T(x+i)$). Ça veut dire que si v désigne un nombre naturel donné, tous les entiers y qui satisfont à (20) seront dans l'intervalle

$$\left.\begin{aligned} S(v,i)\ldots\ldots F(x+k,\ \Phi(x+i,\ v+\beta(x+i)-\varphi(x+i)))-\beta(x+k)\\ <y<F(x+k,\ \Phi(x+i,\ v+\beta(x+i)+\varphi(x+i)))-\beta(x+k).\end{aligned}\right\}\quad(25)$$

Supposons maintenant que v parcourt les nombres entiers de $R(x+i)$, défini par (18). Pour que $Q(x+i,v)$ et $Q(x+k,y)$ aient des points communs, il faut d'après le lemme 6 que (20) soit rempli et donc d'après ce qui précède que l'entier y, pour le nombre v correspondant, soit situé dans $S(v,i)$. La définition de $Q(x,y)$ par (17) entraine donc immédiatement

$$m\,G(x+i,\ x+k)\leqq \sum_{\substack{v \text{ dans } R(x+i)\\ v \text{ entier}}}\ \sum_{\substack{y \text{ dans } S(v,i)\\ y \text{ entier}}} \varphi(x+k)\,\Phi'_y(x+k,\ y+\beta(x+k)).\quad(26)$$

D'après (25) la somme intérieure

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{y \text{ dans } S(v,i)\\ y \text{ entier}}} &\leqq \varphi(x+k)\int\limits_{F(x+k,\ \Phi(x+i,\ v+\alpha(x+i)))-\beta(x+k)}^{F(x+k,\ \Phi(x+i,\ v+\beta(x+i)+\varphi(x+i)))-\beta(x+k)} \Phi'_y(x+k,\ y+\beta(x+k))\,dy\\
&+\varphi(x+k)\,\Phi'_y(x+k,\ F(x+k,\ \Phi(x+i,\ v+\alpha(x+i))))\\
&=\varphi(x+k)\{\Phi(x+k,\ F(x+k,\ \Phi(x+i,\ v+\beta(x+i)+\varphi(x+i))))\\
&-\Phi(x+k,\ F(x+k,\ \Phi(x+i,\ v+\alpha(x+i))))\}\\
&+\varphi(x+k)\{F'_\theta(x+k,\ \Phi(x+i,\ v+\alpha(x+i)))\}^{-1}\\
&=\varphi(x+k)\{\Phi(x+i,v+\alpha(x+i)+2\varphi(x+i))-\Phi(x+i,\ v+\alpha(x+i))\}\\
&+\varphi(x+k)\{F'_\theta(x+k,\ \Phi(x+i,\ v+\alpha(x+i)))\}^{-1}\\
&\leqq 2\,\varphi(x+k)\,\varphi(x+i)\,\Phi'_y(x+i,\ v+\alpha(x+i))\\
&+\varphi(x+k)\{F'_\theta(x+k,\ \Phi(x+i,\ v+\alpha(x+i)))\}^{-1},\end{aligned}$$

c'est à dire que (26) nous apprend

$$\begin{aligned} m\,G(x+i,\ x+k) &\leqq 2\,\varphi(x+k)\,\varphi(x+i)\sum_{\substack{v \text{ dans } R(x+i)\\ v \text{ entier}}} \Phi'_y(x+i,\ v+\alpha(x+i))\\
&+\varphi(x+k)\sum_{\substack{v \text{ dans } R(x+i)\\ v \text{ entier}}}\{F'_\theta(x+k,\ \Phi(x+i,\ v+\alpha(x+i)))\}^{-1}\\
&\leqq 2\,\varphi(x+k)\,\varphi(x+i)\left\{\int\limits_{F(x+i,\ A)-\alpha(x+i)}^{F(x+i,\ B)-\alpha(x+i)} \Phi'_y(x+i,\ v+\alpha(x+i))\,dv+\Phi'_y(x+i,\ F(x+i,\ A))\right\}\\
&+\varphi(x+k)\left\{\int\limits_{F(x+i,\ A)-\alpha(x+i)}^{F(x+i,\ B)-\alpha(x+i)}\{F'_\theta(x+k,\ \Phi(x+i,\ v+\alpha(x+i)))\}^{-1}\,dv+\{F'_\theta(x+k,\ A)\}^{-1}\right\}.\end{aligned}$$

On voit immédiatement que la première intégrale a la valeur $B—A$; en posant dans la dernière intégrale

$t = \Phi(x+i, v+a(x+i))$, c' est à dire $v = F(x+i, t) - a(x+i)$,

nous la donnons la forme

$$\int_A^B \frac{F_\theta'(x+i,t)}{F_\theta'(x+k,t)}\,dt,$$

de sorte que

$$m\,G(x+i, x+k) \leqq 2\,\varphi(x+k)\,\varphi(x+i)\,\{(B-A) + \Phi_y'(x+i, F(x+i,A))\}$$
$$+\varphi(x+k)\int_A^B \frac{F_\theta'(x+i,t)}{F_\theta'(x+k,t)}\,dt + \varphi(x+k)\,\{F_\theta'(x+k,A)\}^{-1},$$

d'où (24), si $x \geqq x_4(\varepsilon', A, B) \geqq x_2$.

Lemme 8. *Supposons les conditions I et II du théorème 4B″ remplies. Supposons en outre les nombres ε et ε' des lemmes 5 et 7 fixés de sorte que*

$$\frac{1}{1+\varepsilon} - 2(1+\varepsilon')\gamma - \delta > 0, \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

ce qui est possible d'après (12) et soit $x_5 = Max(x_3, x_4)$. Désignons pour $x \geqq x_2$, $k \geqq 1$ par $H(x,k)$ l'ensemble constitué par ceux des intervalles $Q(x+k)$ de l'ensemble $E(x+k)$, défini dans le lemme 4, qui n'ont aucun point commun avec aucun des ensembles $E(x+i)$ $(0 \leqq i \leqq k—1)$ et posons $H(x,0) = E(x)$.

Alors il y a un indice $x_6 \geqq x_5$, tel qu' à tout nombre entier $x \geqq x_6$ correspond un indice $K = K(x)$, tel que

$$\sum_{k=0}^{K} m\,H(x,k) > \delta_0\,(B-A), \quad \ldots\ldots \quad (28)$$

où δ_0 désigne un nombre positif, indépendant de x, K, A et B (A et B désignant les nombres de la III-ième remarque du § 7).

Démonstration. La définition de l'énsemble $G(x+i, x+k)$ entraine

$$m\,H(x,k) \geqq m\,E(x+k) - \sum_{i=0}^{k-1} m\,G(x+i, x+k)$$

$(k \geqq 1)$ et donc d'après les lemmes 5 et 7

$$m\,H(x,k) \geqq \varphi(x+k)(B-A)\left\{\frac{1}{1+\varepsilon} - 2(1+\varepsilon')\sum_{i=0}^{k-1}\varphi(x+i)\right\}$$
$$-\varphi(x+k)\int_A^B \left\{\sum_{i=0}^{k-1}\frac{F_\theta'(x+i,t)}{F_\theta'(x+k,t)}\right\}dt - \varphi(x+k)\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{F_\theta'(x+k,A)}$$
$$\geqq \varphi(x+k)(B-A)\left\{\frac{1}{1+\varepsilon} - 2(1+\varepsilon)\sum_{i=0}^{k-1}\varphi(x+i) - \right.$$
$$\left.(1+\varepsilon'')\,\underset{A\leqq t\leqq B}{Max}\,\sum_{i=0}^{k-1}\frac{F_\theta'(x+i,t)}{F_\theta'(x+k,t)}\right\}$$

pour tout $\varepsilon'' > 0$, si $x \geqq x_6(\varepsilon'', A, B) \geqq x_5$. Choissisons ε'' assez petit pour que

$$\eta = \frac{1}{1+\varepsilon} - 2(1+\varepsilon')\gamma - (1+\varepsilon'')\delta > 0$$

ce qui est possible d'après (27). Soit $K = K(x)$ l'indice $\geqq 0$ du théorème 4B''. Si $K \geq 1$, nous aurons pour $1 \leq k \leq K-1$ d'après (13) et (14)

$$m\,H(x, k) \geqq \varphi(x+k)(B-A)\left\{\frac{1}{1+\varepsilon} - 2(1+\varepsilon')\gamma - (1+\varepsilon'')\delta\right\}$$
$$= \eta\,\varphi(x+k)(B-A),$$

en outre nous aurons d'après le lemme 5

$$m\,H(x, 0) \geqq \frac{\varphi(x)}{1+\varepsilon}(B-A) > \eta\,\varphi(x)(B-A).$$

Nous aurons donc

$$\sum_{k=0}^{K} m\,H(x, k) \geqq \eta(B-A)\sum_{k=0}^{K}\varphi(x+k) > \delta_0(B-A),$$

où $\delta_0 = \eta\gamma$ d'après (13). C.f.d.

2. *Fin de la démonstration.* D'après le lemme 2 un point θ de $A \leqq \theta \leqq B$ sera contenu dans l'ensemble $E_{A,B}$ des points θ pour lesquels l'inégalité (8) possède une infinité de solutions entières $x \geqq 1$, y, dès que θ est contenu dans une infinité des ensembles $E(x)$ du lemme 4, donc dès que pour tout nombre entier $x \geq x_2$ le point θ est situé dans l'ensemble

$$L(x) = \sum_{k=0}^{\infty} E(x+k) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (29)$$

Concluons:

$$L(x_2) \supset L(x_2+1) \supset \ldots; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30)$$

l'ensemble $E_{A,B}$ contiendra l'ensemble produit M des ensembles $L(x)$. Mais de (29) et la définition de l'ensemble $H(x, k)$ dans le lemme 8 nous déduisons

$$m\,L(x) \geqq \sum_{k=0}^{K} m\,H(x, k)$$

pour tout nombre entier $K \geqq 0$ et donc d'après le lemme 8 et (30)

$$m\,E_{A,B} \geqq m\,M \geqq \delta_0(B-A).$$

Or, comme les nombres A et B sont des nombres quelconques, tels que $a' \leqq A < B \leqq b'$, nous en concluons que la densité de $E_{a',b'}$ dans chaque point θ du segment $a' \leqq \theta \leqq b'$ est au moins $\delta_0 > 0$ et donc $= 1$ d'après un théorème de LEBESQUE bien connu dans la théorie de la mesure. C.f.d.