

Mechanics. — *De stabiliteit van de tolbewegingen van STAUDE.* By
O. BOTTEMA. (Communicated by Prof. C. B. BIEZENO.)

(Communicated at the meeting of October 27, 1945.)

In 1894 ontdekte STAUDE ¹⁾ dat een willekeurig, in een van het zwaartepunt G verschillend punt O ondersteund en in het zwaarteveld geplaatst vast lichaam om elk van ∞^1 assen door O een rotatie met constante hoeksnelheid kan uitvoeren. Een dergelijke as moet daarbij verticaal worden geplaatst. Deze assen van STAUDE vormen een quadratische kegel en VAN DER WOUDE ²⁾ heeft veel later aangetoond dat de totale verzameling dezer assen, bij veranderlijke plaats van O , niets anders is dan het quadratisch complex van de hoofdtraagheidsassen van het lichaam.

De stabiliteit van de rotaties van STAUDE is onderzocht door GRAMMEL ³⁾, die met behulp van de methode der kleine trillingen er in slaagde de stabiliteitsvoorwaarden in een eenvoudige gedaante te brengen en in zekere zin het vraagstuk volledig oploste. Hij zag zich daarbij echter genoodzaakt het probleem anders te stellen dan in de meest voor de hand liggende vorm. De vraag, die zich voordoet, luidt blijkbaar in beginsel zo: door de traagheidsmomenten α , β en γ ten opzichte van de hoofdassen door O en verder door de coördinaten ξ , η en ζ van het zwaartepunt G ten opzichte van deze assen, is het stelsel dynamisch volledig gekarakteriseerd en is in het bijzonder de quadratische kegel der assen van STAUDE bepaald; welke dezer assen zijn stabiel? Het blijkt nu, dat men bij de beantwoording van deze vraag dusdanige algebraïsche complicaties ontmoet, dat het vrij hopeloos schijnt een overzichtelijke oplossing te bereiken ⁴⁾.

GRAMMEL heeft daarom de vraag anders gesteld. Hij neemt het punt O en de traagheidsmomenten α , β , γ als gegeven aan en laat de coördinaten ξ , η , ζ van G voorlopig onbepaald. Daarna kiest hij een willekeurige as l door O en gaat na, waar men het punt G zou moeten kiezen, opdat l een as van STAUDE van het systeem wordt. Voor G wordt zo een bepaalde meetkundige plaats F gevonden. Onderzocht wordt nu verder in welke deel-

¹⁾ STAUDE, Über permanente Rotationsachsen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt, Journ. f. reine u. angew. Math. **113**, 318—334 (1894).

²⁾ VAN DER WOUDE, Über die Staudeschen Kreiselbewegungen, Math. Zeitschr. **16**, 170—172 (1923).

³⁾ GRAMMEL, Die Stabilität der Staudeschen Kreiselbewegungen, Math. Zeitschr. **6**, 124—142 (1920).

⁴⁾ GRAMMEL, t.a.p. pg. 129. Vgl. ook METTLER, Periodische und asymptotische Bewegungen des unsymmetrischen schweren Kreisels, Math. Zeitschr. **43**, 59—100 (1937), in het bijzonder pg. 81.

verzameling F' van F het punt G moet liggen, opdat l een stabiele as is. Het aldus gewijzigde stabiliteitsprobleem wordt volledig opgelost.

In het volgende keren wij tot de oorspronkelijke probleemstelling terug, maar beperken ons daarbij tot een zeer bijzonder geval, n.l. tot dat, waarbij G op een der hoofdassen door O ligt. De kegel van STAUDE onttaardt dan in de beide hoofdvlakken door deze as en het stabiliteitsprobleem heeft een betrekkelijk eenvoudige oplossing, vooral dank zij het feit, dat een der drie door GRAMMEL opgestelde condities steeds vervuld blijkt te zijn. Ligt G niet op een hoofdas, maar wel in een hoofdvlak van O , dan is de kegel der rotatie-assen eveneens onttaardt en het lijkt niet uitgesloten ook in dit algemener geval resultaten te verkrijgen. Wij gaan daar hier echter niet nader op in.

Als inleiding geven wij een kort overzicht van de methode van GRAMMEL. Kiest men het aan het lichaam verbonden stelsel van hoofdassen door O als coördinatenstelsel, zijn x_0, y_0, z_0 de coördinaten van een op de afstand 1 verticaal boven O gelegen vast punt der ruimte en is ω de constante hoeksnelheid om de verticaal geplaatste as van STAUDE, dan ontstaan door specialisatie van de betrekkingen van EULER de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} (\beta-\gamma)\omega^2 y_0 z_0 &= \eta z_0 - \zeta y_0 \\ (\gamma-a)\omega^2 z_0 x_0 &= \zeta x_0 - \xi z_0 \\ (a-\beta)\omega^2 x_0 y_0 &= \xi y_0 - \eta x_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

De componenten der hoeksnelheid zijn $p_0 = \omega x_0, q_0 = \omega y_0$ en $r_0 = \omega z_0$ en men kan de grootheden $x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0$ als coördinaten der beweging beschouwen. GRAMMEL geeft aan deze grootheden kleine veranderingen, zodat zij de waarden $\bar{x} = x_0 + x, \bar{p} = p_0 + p$ enz. verkrijgen en noemt de betrokken beweging stabiel als x, y, z, p, q, r kleine grootheden blijven. Door substitutie in de algemene bewegingsvergelijkingen van een vast lichaam en na toepassing van het in de theorie der kleine trillingen gebruikelijke procédé, ontstaat een stelsel van zes lineaire differentiaalvergelijkingen. Stelt men de oplossingen evenredig met $e^{\lambda t}$, dan ontstaat een frequentievergelijking, die van de derde graad in ϱ^2 blijkt te zijn en bovendien de wortel $\varrho^2 = 0$ blijkt te bezitten. Er blijft een vierkantsvergelijking in ϱ^2 over, welke, zal de rotatie stabiel zijn, twee verschillende reële, negatieve wortels moet hebben. Deze vergelijking ziet er als volgt uit:

$$g_0 \varrho^4 + g_1 \varrho^2 + g_2 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

waarbij

$$\left. \begin{aligned} g_0 &= a\beta\gamma \\ g_1 &= \Sigma(\beta\gamma u + a l^2) \\ g_2 &= \Sigma[a(vw - \lambda^2) + u l^2 + 2\lambda m n] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

De sommatie moet daarbij over drie, door cyclische verwisseling ontstane

termen worden uitgestrekt. De in (3) voorkomende grootheden hangen daarbij op de volgende wijze van de gegevens af:

$$\left. \begin{aligned} u &= (\beta - \gamma) (y_0^2 - z_0^2) \omega^2 - \eta y_0 - \zeta z_0 \\ l &= (\beta + \gamma - a) \omega x_0 \\ \lambda &= [\zeta - (\gamma - a) \omega^2 z_0] y_0 = [\eta + (a - \beta) \omega^2 y_0] z_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (4)$$

terwijl v, w, m, n, μ, ν door cyclische verwisseling worden gevonden. De stabiliteitscondities luiden dus:

$$g_1 > 0, \quad g_2 > 0, \quad k \equiv g_1^2 - 4g_0g_2 > 0 \dots \dots (5)$$

Wij merken nog op, dat de vergelijking van de kegel van STAUDE, zoals door eliminatie van ω^2 uit (1) blijkt, als volgt luidt:

$$(\beta - \gamma) y_0 z_0 \xi + (\gamma - a) z_0 x_0 \eta + (a - \beta) x_0 y_0 \zeta = 0 \dots \dots (6)$$

Een as van STAUDE is daarbij gekarakteriseerd door de verhoudingen $x_0 : y_0 : z_0$. Bij elke as behoort, zoals uit (1) blijkt, in het algemeen één bepaalde waarde van ω^2 . Tevens is voor elke as bepaald welke der beide halfstralen door O bij de permanente rotatie verticaal naar boven gericht moet zijn, en wel door de voorwaarde dat ω^2 een positieve waarde moet hebben.

Wij beschouwen het bijzondere geval, waarbij $\eta = \zeta = 0$, dus dat, waarbij het zwaartepunt G op een hoofdtraagheidsas OX door O ligt. Zoals uit (6) blijkt, is dan de kegel van STAUDE ontaard in de beide hoofdvlakken $y_0 = 0$ en $z_0 = 0$. Tot de assen van STAUDE behoort ook de snijlijn $y_0 = z_0 = 0$, dus de as OG ; kiest men deze als wentelingsas, dan is de bijbehorende hoeksnelheid onbepaald en de vraag, hoe de stabiliteit van de hoeksnelheid afhangt, is door GRAMMEL volledig opgelost. Wij kunnen dus deze as buiten beschouwing laten. Verder sluiten wij de assen $y_0 = x_0 = 0$ en $z_0 = x_0 = 0$ uit (aangezien zij met de hoeksnelheid $\omega = \infty$ overeenkomen) en veronderstellen voorts, dat a, β, γ onderling verschillend zijn. Wij richten onze aandacht op de overige assen van STAUDE; zoals uit (1) blijkt, behoort bij elk van hen één welbepaalde hoeksnelheid ω . Uit (1) volgt immers voor $z_0 = 0$ dat $x_0 = \frac{\xi}{(a - \beta) \omega^2}$ is, terwijl y_0 willekeurig blijft, terwijl voor $y_0 = 0$ de waarde van z_0 willekeurig is en $x_0 = \frac{\xi}{(a - \gamma) \omega^2}$. Veronderstellen wij $\xi > 0$, wat zonder de algemeenheid te schaden, gebeuren kan, dan heeft men dus, daar $\omega^2 > 0$ is, in het eerste geval $x_0 (a - \beta) > 0$, in het tweede $x_0 (a - \gamma) > 0$. Duiden wij die halfstraal op een as van STAUDE, welke bij de permanente rotatie verticaal naar boven moet worden geplaatst, aan als de positieve halfstraal, dan vullen deze positieve halfstralen dus zowel in $y_0 = 0$ als in $z_0 = 0$ een halfvlak. Deze halfvlakken zijn blijkbaar $y_0 = 0, x_0 > 0$ en $z_0 = 0, x_0 > 0$ als $a > \beta$ en $a > \gamma$; voor $a < \beta, a > \gamma$ zijn de halfvlakken $y_0 = 0, x_0 > 0$

en $z_0 = 0$, $x_0 < 0$ en voor $\alpha < \beta$, $\alpha < \gamma$ vindt men $y_0 = 0$, $x_0 < 0$ en $z_0 = 0$, $x_0 < 0$.

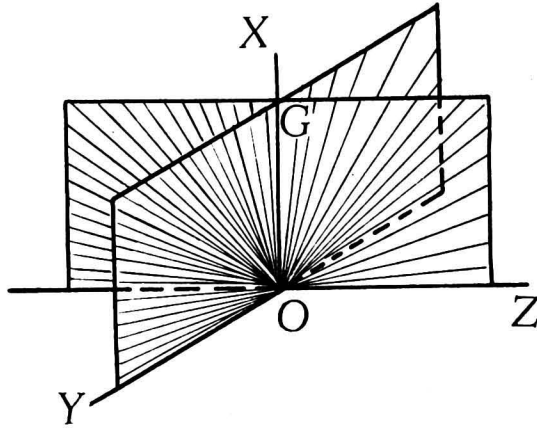


Fig. 1a.

In fig. 1 is de ligging der positieve halfstralen geschetst, respectievelijk voor het geval dat het zwaartepunt G ligt op de hoofdtraagheidsas, die bij het grootste, het middelste en het kleinste traagheidsmoment behoort. In het

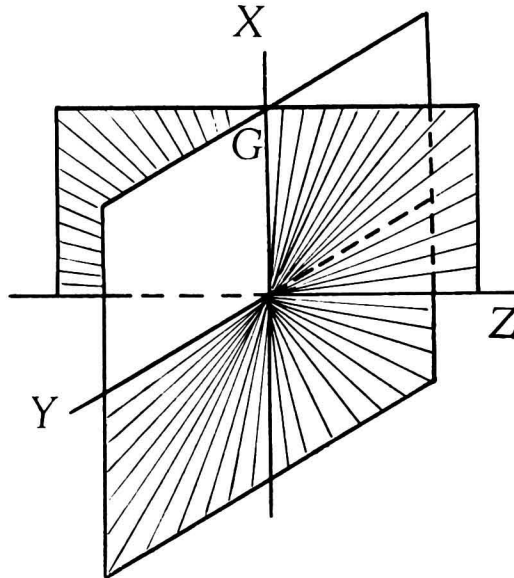


Fig. 1b.

eerste geval ligt dus bij alle permanente rotaties het zwaartepunt boven het steunpunt, in het derde geval ligt het er steeds beneden, terwijl in het middelste geval beide situaties voorkomen.

Wij willen thans nagaan om welke assen stabiele rotatie plaats heeft.

Voor de grootheden (4) vindt men, als $z_0 = 0$ is en $y_0 = \frac{y_1}{\omega^2}$ wordt gesteld:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{(\beta-\gamma) y_1^2}{\omega^2} & v &= \frac{(\beta-\gamma) \xi^2}{(\alpha-\beta)^2 \omega^2} & w &= -\frac{(\alpha-\beta) y_1^2}{\omega^2} \\ l &= \frac{(\beta+\gamma-\alpha) \xi}{(\alpha-\beta) \omega} & m &= \frac{(\gamma+\alpha-\beta) y_1}{\omega} & n &= 0 \\ \lambda &= 0 & \mu &= 0 & \nu &= -\frac{\beta-\gamma \xi y_1}{(\alpha-\beta) \omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

zodat men voor de coëfficiënten (3) heeft:

$$g_1 = \frac{\alpha \xi^2 A}{(\alpha-\beta)^2 \omega^2} + \frac{\beta y_1^2 B}{\omega^2} \dots \dots \dots (8)$$

$$g_2 = \frac{y_1^2 (\beta-\gamma)}{(\alpha-\beta)^2 \omega^4} \left\{ \xi^2 C - y_1^2 \beta (\alpha-\beta)^3 \right\} \dots \dots \dots (9)$$

waaruit volgt

$$k = g_1^2 - 4g_0 g_2 = \frac{\alpha^2 \xi^4 A^2}{(\alpha-\beta)^4 \omega^4} + \frac{2\alpha\beta\xi^2 y_1^2 D}{(\alpha-\beta)^2 \omega^4} + \frac{\beta^4 y_1^4 E^2}{\omega^4} \dots \dots (10)$$

Hierbij is

$$A = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma + 3\beta\gamma \dots \dots \dots (11)$$

$$B = \beta^2 + 2\alpha\gamma - \alpha\beta - \beta\gamma \dots \dots \dots (12)$$

$$C = \alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 3\alpha\beta \dots \dots \dots (13)$$

$$\left. \begin{aligned} D &= AB - 2\gamma(\beta-\gamma)C = -\alpha^3\beta + 2\alpha^3\gamma + 3\alpha^2\beta^2 - 5\alpha^2\beta\gamma - \\ &- 2\alpha^2\gamma^2 - 3\alpha\beta^3 + 5\alpha\beta^2\gamma + 2\alpha\beta\gamma^2 + \beta^4 - 2\beta^3\gamma + \beta^2\gamma^2 - 4\beta\gamma^3 + 4\gamma^4 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$E = \alpha - \beta + \gamma \dots \dots \dots (15)$$

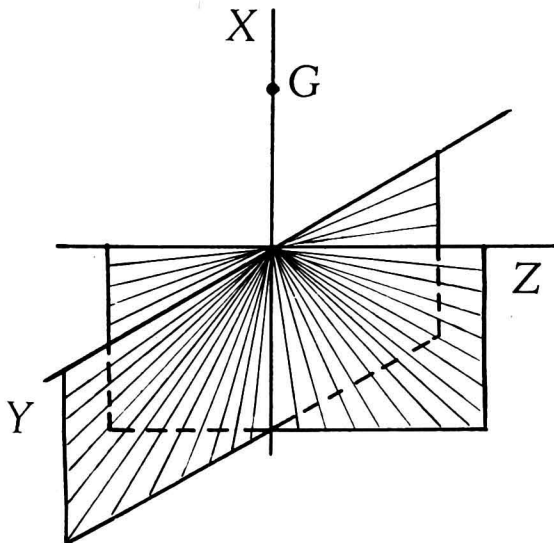


Fig. 1c.

Elke as van STAUDE uit het vlak $z_0 = 0$ wordt aangegeven door een bepaalde waarde van y_1 , want men heeft na eliminatie van ω^2 de betrekking $\frac{y_0}{x_0} = \frac{(a-\beta)y_1}{\xi}$. Voor de stabiliteit van een as is nodig en voldoende, dat g_1, g_2 en k positief zijn, en wij hebben na te gaan voor welke waarden van y_1 zulks het geval is. Natuurlijk is het antwoord afhankelijk van de onderlinge verhoudingen der gegeven traagheidsmomenten α, β en γ . Daar deze aan de ongelijkheden $\alpha < \beta + \gamma$ etc. voldoen, voeren wij de grootheden u_i ($i = 1, 2, 3$) in door

$$2u_1 = -\alpha + \beta + \gamma, \quad 2u_2 = \alpha - \beta + \gamma, \quad 2u_3 = \alpha + \beta - \gamma,$$

waarvoor dus geldt $u_i > 0$, terwijl

$$\alpha = u_2 + u_3, \quad \beta = u_3 + u_1, \quad \gamma = u_1 + u_2 \quad . . . \quad (16)$$

Men vindt dan

$$A = 2u_1^2 - u_2^2 + u_2u_3 + u_3u_1 - u_1u_2.$$

Duidt men u_i als driehoekskoördinaten, dan stelt $A = 0$ een kegelsnede voor, die door de middens van U_1U_2 en U_2U_3 gaat, en in het laatste aan de rechte $u_2 = u_3$ raakt. Zij is in fig. 2 geschetst voor zover zij binnen de coördinatendriehoek ligt. Wij komen tot de conclusie dat A zowel positief als negatief kan zijn. Voor punten buiten de kegelsnede is $A > 0$.

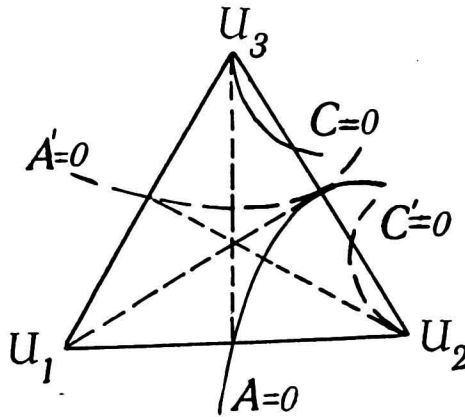


Fig. 2.

De uitdrukking B gaat door (16) over in $2(u_1u_3 + u_2^2)$, waaruit volgt dat B voor alle in aanmerking komende waarden van α, β en γ positief is.

Voor C vindt men $4u_1^2 + 3u_2^2 - u_2u_3 + u_3u_1 + u_1u_2$, zodat $C = 0$ een kegelsnede voorstelt, die in U_3 aan $u_1 = u_2$ raakt en van dit punt tot $(0, 1, 3)$ binnen de driehoek verloopt, zoals in de figuur is geschetst.

De uitdrukking D blijkt in factoren te kunnen worden ontbonden. Men heeft nl.

$$D = (\alpha - \beta + \gamma) D_1$$

waarbij

$$D_1 = -a^2\beta + 2a^2\gamma + 2a\beta^2 - 2a\beta\gamma - 4a\gamma^2 - \beta^3 + \beta^2\gamma + 4\gamma^3.$$

Wij onderzoeken nu eerst de functie k . Men heeft, als

$$v_1 = \frac{a\xi^2}{(a-\beta)^2\omega^2}, \quad v_2 = \frac{\beta y_1^2(a-\beta+\gamma)}{\omega^2}$$

wordt gesteld,

$$k = A^2v_1^2 + 2D_1v_1v_2 + \beta^2v_2^2$$

zodat

$$k = (Av_1 - \beta v_2)^2 + 2(D_1 + \beta A)v_1v_2.$$

Nu is

$$D_1 + \beta A = 2\gamma(a^2 - 2a\beta - 2a\gamma + 2\beta^2 + 2\gamma^2) = 2\gamma\{(-a + \beta + \gamma)^2 + (\beta - \gamma)^2\}.$$

Deze uitdrukking is dus altijd positief. Daar $v_1 > 0$ en $v_2 > 0$ en in het vlak $y_0 = 0$ overeenkomstige uitkomsten gelden, heeft men: *als het zwaartepunt G op een hoofdtraagheidsas door O ligt, is de derde stabiliteitsvoorwaarde $k > 0$ voor elke as van STAUDE vervuld.*

De voorwaarde $g_1 > 0$ is blijkbaar steeds vervuld als $A > 0$. Als $A < 0$ dan is $g_1 > 0$ als

$$\frac{y_0^2}{x_0^2} > -\frac{aA}{\beta B}.$$

Voor de bepaling van het teken van g_2 zijn van belang de uitdrukkingen $\beta - \gamma$, $a - \beta$ en C . De voorwaarde $\beta - \gamma \geq 0$ is gelijkwaardig met $u_3 \geq u_2$. Uit fig. 2 blijkt dat uit $\beta - \gamma < 0$ volgt $C > 0$, terwijl voor $\beta - \gamma > 0$ zowel $C > 0$ als $C < 0$ kan gelden.

$a - \beta \geq 0$ is gelijkwaardig met $u_2 \geq u_1$, zodat uit $a - \beta < 0$ volgt $C > 0$. g_2 heeft een constant teken als $(a - \beta)C < 0$; dit teken is dat van $(\beta - \gamma)C$. Voor $(a - \beta)C > 0$ wisselt g_2 van teken en wel heeft g_2 voor

$$\frac{y_0^2}{x_0^2} < \frac{C}{\beta(a-\beta)}$$

het teken van $C(\beta - \gamma)$ en voor de overige waarden het tegengestelde teken.

Wij zullen nu de verschillende mogelijkheden afzonderlijk beschouwen. Zij eerst $a > \beta > \gamma$, d.w.z. $u_3 > u_2 > u_1$. Uit fig. 2 blijkt, dat dan $A > 0$ terwijl C zowel positief als negatief kan zijn. De voorwaarde $g_1 > 0$ is dus vervuld. g_2 heeft een constant teken, als $C < 0$; g_2 is dan negatief. Voor $C > 0$ wisselt g_2 van teken en wel is $g_2 > 0$ als

$$\frac{y_0^2}{x_0^2} < \frac{C}{\beta(a-\beta)}.$$

Wij vinden dus: als $\alpha > \beta > \gamma$ dan is voor $C < 0$ geen der rotaties stabiel; voor $C > 0$ zijn ze alleen stabiel als

$$\frac{y_0^2}{x_0^2} < \frac{C}{\beta(\alpha - \beta)}.$$

Is $\alpha > \gamma > \beta$, dus $u_2 > u_3 > u_1$, dan is $C > 0$. Verder is $g_1 > 0$ als $A > 0$, terwijl voor $A < 0$ g_1 alleen positief is als

$$\frac{y_0^2}{x_0^2} < -\frac{\alpha A}{\beta B}.$$

Daar $(\alpha - \beta) C > 0$ is, heeft g_2 een wisselend teken, waarbij zij positief is voor

$$\frac{y_0^2}{x_0^2} > \frac{C}{\beta(\alpha - \beta)}.$$

Om na te gaan welke der getallen

$$-\frac{\alpha A}{\beta B} \text{ en } \frac{C}{\beta(\alpha - \beta)}$$

het grootst is, berekenen wij het verschil $BC + \alpha(\alpha - \beta)A$. Hiervoor vindt men

$$5u_2^4 - 2u_2^3u_3 + 3u_2^2u_1^2 - 2u_2u_1^3 + 2u_2^3u_1 - 2u_2u_1u_3^2 + \\ + 4u_1^2u_2u_3 + u_2^2u_3^2 + 6u_1^3u_3 + u_1^2u_3^2 + 8u_1u_2^2u_3 + 8u_1^2u_2^2.$$

De drie termen met negatieve coëfficiënt zijn elk kleiner dan de voorafgaande term, zodat de uitdrukking voor de in aanmerking komende waarden van u_i positief is. Daaruit volgt

$$-\frac{\alpha A}{\beta B} < \frac{C}{\beta(\alpha - \beta)},$$

zodat wij hebben voor $\alpha > \gamma > \beta$: die assen zijn stabiel, waarvoor

$$\frac{y_0^2}{x_0^2} > \frac{C}{\beta(\alpha - \beta)}.$$

Voor $\beta > \alpha > \gamma$, dus $u_3 > u_1 > u_2$, is $A > 0$ en $C > 0$, dus $g_1 > 0$. Daar $(\alpha - \beta) C < 0$ heeft g_2 een vast teken en wel is $g_2 > 0$. In dit geval zijn dus alle assen stabiel.

Voor $\beta > \gamma > \alpha$, dus $u_1 > u_3 > u_2$, is $A > 0$ en $C > 0$; dus is $g_1 > 0$ en daar $(\alpha - \beta) C < 0$ heeft g_2 constant teken en wel is $g_2 > 0$. Ook nu zijn dus alle assen stabiel.

Voor $\gamma > \alpha > \beta$ is $u_2 > u_1 > u_3$, zodat $C > 0$, terwijl A beide tekens kan hebben. Voor $A > 0$ is $g_1 > 0$, voor $A < 0$ zal g_1 nog positief zijn als

$$\frac{y_0^2}{x_0^2} > -\frac{\alpha A}{\beta B}.$$

Wat g_2 betreft, deze wisselt van teken en is positief voor

$$\frac{y_0^2}{x_0^2} > \frac{C}{\beta(a-\beta)}.$$

Als boven vinden wij thans stabiliteit voor

$$\frac{y_0^2}{x_0^2} > \frac{C}{\beta(a-\beta)}.$$

Als tenslotte $\gamma > \beta > a$, dus $u_1 > u_2 > u_3$, dan is $A > 0$ en $C > 0$, $(a-\beta) C < 0$, $(\beta-\gamma) C < 0$, zodat g_2 negatief is. Geen as is thans stabiel.

Het bovenstaande had steeds betrekking op de assen van STAUDE, gelegen in het vlak $z_0 = 0$. Voor het vlak $y_0 = 0$ gelden analoge resultaten, die men verkrijgen kan door β en γ met elkaar te verwisselen. Daarbij worden dus van belang de uitdrukkingen

$$A' = a^2 + \gamma^2 - 2a\gamma - 2a\beta + 3\beta\gamma.$$

$$C' = a^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 3a\gamma.$$

De krommen $A' = 0$ en $C' = 0$ zijn in fig. 2 eveneens geschetst. Vatten wij de resultaten thans samen, dan krijgen wij het volgende overzicht, waarin telkens de *stabiele* assen van STAUDE zijn aangegeven.

Geval		$y_0 = 0$	$z_0 = 0$
Ia	$a > \beta > \gamma$	$\frac{z_0^2}{x_0^2} > \frac{C'}{\gamma(a-\gamma)}$	$C < 0$ —
			$C > 0$ $\frac{y_0^2}{x_0^2} < \frac{C}{\beta(a-\beta)}$
IIa	$a > \gamma > \beta$	$C' < 0$ —	$\frac{y_0^2}{x_0^2} > \frac{C}{\beta(a-\beta)}$
		$C' > 0$ $\frac{z_0^2}{x_0^2} < \frac{C'}{\gamma(a-\gamma)}$	
Ib	$\beta > a > \gamma$	$\frac{z_0^2}{x_0^2} > \frac{C'}{\gamma(a-\gamma)}$	alle
IIb	$\gamma > a > \beta$	alle	$\frac{y_0^2}{x_0^2} > \frac{C}{\beta(a-\beta)}$
Ic	$\beta > \gamma > a$	—	alle
IIc	$\gamma > \beta > a$	alle	—

De gevallen I^a en II^a, resp. I^b en II^b, alsmede I^c en II^c komen daarbij op hetzelfde neer en ontstaan door verwisseling van β met γ of van de vlakken

$y_0 = 0$ en $z_0 = 0$. Zij corresponderen resp. met de figuren 1^a , 1^b en 1^c . Voor de toestand 1^a is het antwoord op de vraag naar de stabiliteit het meest gecompliceerd. In een der beide halfvlakken door de X -as komen steeds stabiele assen voor; zij liggen buiten een bepaalde hoek, die de X -as tot bissectrice heeft. In het andere der halfvlakken zijn of alle assen labiel, of wel komen er stabiele assen voor, die een hoek opvullen, waarvan de X -as de bissectrice is.

In 1^b zijn al die assen stabiel, welke in het halfvlak liggen, dat het zwaartepunt G niet bevat. Bij de rotatie om deze assen ligt G beneden het steunpunt O . Ook in het andere halfvlak liggen stabiele assen, de labiele vullen een hoek waar OX binnen ligt.

In 1^c zijn ten slotte de assen uit het ene halfvlak stabiel, die uit het andere labiel.

Indien twee der traagheidsmomenten α , β en γ gelijk zijn, ondergaan de resultaten enige wijziging. Is $\alpha = \gamma$, dan blijkt uit (1) dat alleen het vlak $z_0 = 0$ assen van STAUDE bevat; die uit $y_0 = 0$ vervallen omdat bij elk daarvan $\omega = \infty$ zou behoren. Voor de assen uit $z_0 = 0$ gelden de stabiliteitscriteria van ons schema, waarbij nog opgemerkt moet worden, dat C in deze omstandigheden steeds positief is. Voor $\alpha = \beta$ gelden dezelfde uitkomsten na verwisseling van y_0 en z_0 . Voor $\beta = \gamma$ ten slotte gelden de resultaten van het schema met dien verstande, dat C en C' ook hierbij alleen positieve waarden kunnen hebben.