Mathematics. — *Sur un principe de variation de* GAUSS *dans la théorie du potentiel.* By A. F. MONNA. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of November 24, 1945.)

§ 1. Dans un article précédent [1]) j'ai énoncé une propriété de maximum portant sur les distributions de masse positive sur la frontière Σ d'un ensemble ouvert Ω à frontière bornée entièrement extérieure. Dans ce qui suit nous donnerons une démonstration plus simple, d'où résultera aussi le rapport avec un problème déjà traité.

Théorème. *Soit θ une distribution de masse positive dans Ω avec potentiel V. Soit $\varrho(e)$ une distribution de masse positive sur Σ, dont le potentiel U satisfait à*

$$\left.\begin{array}{l} U \leqq V \text{ dans } \Omega + \Sigma \\ U = V \text{ sur le complément de } \Omega + \Sigma \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Alors l'intégrale

$$F[\lambda] \equiv \int\limits_{\Sigma} (U - 2\,V)\, d\varrho\,(e_Q). \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

atteint un minimum pour la distribution $\varrho = \underline{\mu}$ et un maximum pour $\varrho = \overline{\mu}$. Ici $\underline{\mu}$ signifie la distribution sur Σ, résultant du balayage de θ sur Σ, $\overline{\mu}$ celle résultant de l'extrémisation de θ. On a

$$\varrho\,(e) = \lambda_e\, \overline{\mu}\,(e) + (1 - \lambda_e)\, \underline{\mu}\,(e). \qquad (0 \leqq \lambda \leqq 1)\,. \quad \ldots \quad (3)$$

Démonstration. Quant á la propriété de minimum et la relation (3) nous renvoyons à l'article mentionné et la littérature là donnée. Il s'agit donc de la propriété de maximum. Pour là, nous démontrons que, étant donnée une distribution ϱ non identique à $\overline{\mu}$, il existe une variation finie $\delta\varrho$, dont la variation correspondante δF est positive. La variation $\delta\varrho$ doit etre permise, c.à.d. le potentiel de la distribution $\varrho + \delta\varrho$ doit satisfaire aux conditions (1). La variation $\delta\lambda$, correspondant avec $\delta\varrho$, suit de (3): [2])

$$\delta\,\lambda = \frac{\delta\,\varrho}{\overline{\mu} - \underline{\mu}}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

[1]) Sur un principe de variation de GAUSS dans la théorie du potentiel. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **44**, 50—61 (1941).

[2]) Il faut remarquer, que $\varrho = 0$ sur tous les ensembles où $\overline{\mu} = \underline{\mu} = 0$; sur ces ensembles on a $\delta\varrho = 0$.

On trouve, aux termes du 2e ordre en $\delta\lambda$ près, si l'on pose

$$\iint \frac{1}{r}\, d\varrho\, d\sigma = I(\varrho, \sigma),$$

$$\delta F = \{2I(\lambda\bar{\mu}, \delta\lambda\bar{\mu}) - 2I(\delta\lambda\bar{\mu}, \lambda\underline{\mu}) - 2I(\lambda\bar{\mu}, \delta\lambda\underline{\mu}) + 2I(\lambda\underline{\mu}, \delta\lambda\underline{\mu})\} +$$

$$+ \{2I(\underline{\mu}, \delta\lambda\bar{\mu}) - 2I(\underline{\mu}, \delta\lambda\underline{\mu}) + 2\int_{\Sigma} V d(\delta\lambda\,.\,\underline{\mu}) - 2\int V d(\delta\lambda\,.\,\bar{\mu})\}$$

$$= \delta_1 F + \delta_2 F.$$

Il suit de cette formule, que $\delta_2 F$ est égale à la variation de F pour $\lambda = 0$, si la distribution $\underline{\mu}$ correspondant à $\lambda = 0$ est variée par $\delta\varrho$ (la question si $\delta\varrho$, variation permise pour ϱ, est une variation permise pour $\underline{\mu}$, reste ouverte). Or, F atteint son minimum pour $\lambda = 0$ et nous savons que ce minimum n'est atteint que pour la distribution $\underline{\mu}$ [3]). De plus, pour cela il n'est pas nécessaire d'imposer les conditions (1). Il s'ensuit

$$\delta_2 F > 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (5)$$

Il ne reste donc que de déterminer une variation $\delta\varrho$ telle que $\delta_1 F \geqq 0$. Pour cela nous réduirons $\delta_1 F$. Posons

$$\bar{U}_\lambda = \int_{\Sigma} \frac{d\lambda\bar{\mu}}{r}, \qquad \underline{U}_\lambda = \int_{\Sigma} \frac{d\lambda\underline{\mu}}{r}.$$

Il suit

$$\tfrac{1}{2}\delta_1 F = \int_{\Sigma} (\bar{U}_\lambda - \underline{U}_\lambda)\, d(\delta\lambda\,.\,\bar{\mu}) - \int_{\Sigma} (\bar{U}_\lambda - \underline{U}_\lambda)\, d(\delta\lambda\,.\,\underline{\mu}). \; . \; . \qquad (6)$$

A cause de (3) on a

$$\bar{U}_\lambda - \underline{U}_\lambda = \int_{\Sigma} \frac{d\varrho}{r} - \int \frac{d\underline{\mu}}{r}. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (7)$$

De plus (voir [1]))

$$\int \frac{d\bar{\mu}}{r} \leqq \int \frac{d\varrho}{r} \leqq \int \frac{d\underline{\mu}}{r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (8)$$

Aux points stables de Σ le membre à droite de (8) est égal aux membre à gauche, de sorte que dans ces points

$$\bar{U}_\lambda = \underline{U}_\lambda \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (9)$$

Le balayage n'apporte pas de masse sur l'ensemble des points irréguliers, c.à.d. là on a $\underline{\mu} = 0$. L'extrémisation n'apporte pas de masse sur les points

---

[3]) C. DE LA VALLÉE POUSSIN. Les méthodes nouvelles de la théorie du potentiel et le problème généralisé de DIRICHLET. Act. Sci. et industr. 578 (Paris 1937).

instables et là est $\overline{\mu} = 0$. Puisque chaque point irrégulier est instable, on a $\underline{\mu} = \overline{\mu} = 0$ sur l'ensemble des points irréguliers. Il s'ensuit que dans (6) les intégrales ne doivent être étendues que sur les points de Σ qui sont instable mais régulier. Pour cet ensemble E on a (sauf dans un cas qui sera exclu) $\overline{\mu} = 0$ et $\underline{\mu} > 0$. En effet si l'on avait $\underline{\mu} \equiv 0$ sur E, alors $\underline{\mu}$ était $\neq 0$ seulement sur l'ensemble des points stables et il résultera du théorème d'unicité de l'extrémisation [4]) que $\overline{\mu} = \underline{\mu}$ sur tout Σ; la propiété de maximum n'existe alors pas. Ce cas excluant on a donc $\overline{\mu} = 0$ et $\underline{\mu} > 0$ sur E; en particulier E n'est pas vide (même a une capacité > 0, puisque $\underline{\mu} = 0$ sur les ensembles de capacité zéro). On a donc

$$\tfrac{1}{2}\,\delta_1 F = \int_E (\underline{U}_\lambda - \overline{U}_\lambda)\, d(\delta\lambda \,.\, \underline{\mu}). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (10)$$

Puisque ϱ n'est pas identiquement égal á $\overline{\mu}$ sur Σ, sur E, ϱ n'est certainement pas égal à $\overline{\mu}$. Autrement la distribution ϱ ne porterait que de la masse sur l'ensemble des points stables et alors on aurait $\varrho = \overline{\mu}$. Il s'ensuit que λ n'est pas $= 1$ sur tous les sous-ensembles de E. On voit aussi qu'il y a des sous-ensembles où $\lambda \neq 1$ et $\underline{\mu} > 0$. Autrement on avait en particulier, puisque $\underline{\mu}(E) > 0$, $\varrho(E) = \overline{\mu}(E) = 0$, où suivrait $\varrho \equiv \overline{\mu}$ et donc $\lambda \equiv 1$.

Considérons, pour $\varepsilon > 0$ donné, la variation

$$\delta\varrho = \varepsilon(\overline{\mu} - \varrho)$$

et

$$\delta\lambda = \varepsilon\,\frac{\overline{\mu} - \varrho}{\overline{\mu} - \underline{\mu}}.$$

Pour tous les sous-ensembles de E on a $\delta\varrho \leqq 0$ et $\delta\lambda \geqq 0$. A cause de (7) et (8) il suit que pour ce $\delta\varrho$ et $\delta\lambda$ on a

$$\delta_1 F \geqq 0.$$

$\varepsilon(\overline{\mu} - \varrho)$ est une variation permise. En effet, c'est le cas pour $\overline{\mu} - \varrho$, qui donne l'accroissement de ϱ à $\overline{\mu}$. Le potentiel de la distribution $\varepsilon(\overline{\mu} - \varrho)$ est donc zéro sur le complément de $\Omega + \Sigma$, tandis que à fortiori $U \leqq V$ reste vrai sur $\Omega + \Sigma$.

En prenant $\varepsilon = 1$, on voit que F pour $\overline{\mu}$ est plus grand que F pour ϱ. Il suit de ce qui précède que F ne peut atteindre un maximum pour aucun $\varrho \not\equiv \overline{\mu}$. En variant ainsi, ϱ tend vers $\overline{\mu}$ sur E et donc (voir ce qui précède) sur tout Σ. Le théorème est donc montré.

Nous montrons encore que, si $\lambda \not\equiv 1$, l'ensemble des points stables de Σ contient des sous-ensembles où $\overline{\mu} > 0$ et $\lambda \neq 1$. Autrement on avait $\varrho = \overline{\mu}$ sur tous les sous-ensembles de l'ensemble des points stables, sauf éventuellement sur ceux où $\overline{\mu} = 0$. Alors l'ensemble des points instables ne

---

[4]) M. BRELOT. Critères de régularité et de stabilité. Bull. Ac. Royale de Belgique **25**, 136 (1939).

portait pas de masse, puisque autrement le potentiel ne serait pas conservé hors $\Omega + \Sigma$. Il suivrait du théorème d'unicité déjà mentionné qu'alors $\varrho = \bar{\mu}$ sur Σ et donc $\lambda \equiv 1$.

La masse totale de la distribution-ϱ est égale à celle de la distribution θ si Ω est borné (intégration sur un surface contenant $\Omega + \Sigma$). Si Ω n'est pas borné on a une déperdition de masse [5]).

2. Dans ce qui suit sera supposé que Ω est borné. Si l'on prend pour θ la masse 1, placée au point P de Ω, on trouve sur Σ une distribution $\varrho^P(e)$, fonction de P. Déjà l.c. [1]) était considéré l'intégrale

$$\varphi(P) = \int_{\Sigma} f(Q)\, d\varrho^P(e_Q) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

où $f(Q)$ est une fonction continue sur Σ. Etant donné $f(Q)$, à l'ensemble des ϱ correspond un ensemble de fonctions $\varphi(P)$, tous définies dans Ω. Pour $\varrho^P = \underline{\mu}^P$ cette fonction est égale à la solution du problème de DIRICHLET généralisé $\underline{\varphi}(P)$ pour valeurs-frontières $f(Q)$ (WIENER); pour $\varrho^P = \bar{\mu}^P$, φ égale la fonction $\bar{\varphi}(P)$, que l'on construit à l'aide d'une approximation de $\Omega + \Sigma$ par une suite décroissante d'ensembles ouverts (KELDYCH–LAVRENTIEFF–BRELOT) [6]). Dans ces cas spéciaux $\varphi(P)$ est une fonction harmonique de P; la question si c'est le cas en général sera traité plus tard. L.c. [1]) est montré que dans Ω on a

$$\underline{\varphi}(P) \leqq \varphi(P) \leqq \bar{\varphi}(P) \text{ ou } \bar{\varphi}(P) \leqq \varphi(P) \leqq \underline{\varphi}(P) \quad . \quad (12a, 12b)$$

Si $f(Q)$ est tel, que $f(Q)$ peut être étendu à une fonction qui est sous-harmonique (super-harmonique) dans un ensemble ouvert contenant Ω, alors on a la première (seconde) inégalité; dans le cas général on ne peut pas discerner entre ces deux relations.

On peut étudier $\varphi(P)$ au voisinage de la frontière, donc les propriétés de φ si P tend vers le point-frontière Q. On obtient une théorie analogue à celle, déjà connue, de $\underline{\varphi}$ et $\bar{\varphi}$.

Un point Q de Σ sera appelé ϱ-régulier si on a pour chaque fonction continue $f(Q)$ sur Σ que $\varphi(P) \to f(Q)$ si $P \to Q$.

On a le critère suivant:

Pour que le point Q_0 soit ϱ-régulier, il faut et il suffit que pour une seule fonction $f(Q)$ avec $f(Q_0) = 0$ et $f(Q) > 0 (Q \neq Q_0)$ on a pour la fonction correspondante $\varphi(P) \to 0$ si $P \to Q_0$.

La démonstration est analogue à celle dans le cas de la fonction de WIENER et repose seulement sur le fait que φ dépend linéairement de f et que de $|f(Q| \leqq \varepsilon$ il suit que $|\varphi| \leqq \varepsilon$.

Nécessaire et suffisant pour que Q_0 soit ϱ-régulier est que $\varrho^P(e)$ tend vers la masse 1 dans Q_0 si $P \to Q_0$.

---

[5]) voir l.c. [3]) p. 34.

[6]) voir l.c. [4]) p. 125—137.

Dans un point-frontière stable on a $\overline{\varphi}(P) \rightarrow f(Q)$ si $P \rightarrow Q$, dans un point régulier $\underline{\varphi}(P) \rightarrow f(Q)$ et puisque chaque point-frontière stable est régulier, il suit de (12a, 12b).

Les points-frontière stables de Σ sont ϱ-réguliers. Les points ϱ-réguliers sont partout dense sur Σ.

Par contre on a

Un point irrégulier est ϱ-irrégulier.

En effet, soit R un point fixe dans Ω; on a

$$\int \frac{d\overline{\mu}^P}{RQ} \leqq \int \frac{d\varrho^P}{RQ} \leqq \int \frac{d\underline{\mu}^P}{RQ} \leqq \frac{1}{PR}.$$

Si on avait

$$\int \frac{d\varrho^P}{r} \rightarrow \frac{1}{RQ} \quad \text{si } P \rightarrow Q, \text{ il suivrait} \int \frac{d\underline{\mu}^P}{RQ} \rightarrow \frac{1}{RQ},$$

de sorte que la fonction de GREEN de Ω tendrait vers 0 dans Q; alors Q était régulier.

Cependant on n'a pas que chaque point régulier est ϱ-régulier. On le voit déjà dans le cas où $\varrho^P = \overline{\mu}^P$; la ϱ-régularité est alors identique avec la stabilité. Sauf quand $\overline{\mu} \equiv \underline{\mu}^P$ il y a alors des points réguliers qui sont instables. En effet si $\overline{\mu}^P \equiv \underline{\mu}^P$, alors $\overline{\varphi}(P) = \underline{\varphi}(P)$ pour tout $f(Q)$ et l'ensemble des points stables est identique à celui des points réguliers. Si inversement ces ensembles sont identique, les intégrale

$$\int_\Sigma \frac{d\overline{\mu}^P}{r} \quad \text{et} \quad \int_\Sigma \frac{d\underline{\mu}^P}{r}$$

sont égales sur le complément de $\Omega + \Sigma$ et aux points réguliers (égal au potentiel de la masse 1 dans P). En vertu d'un théorème d'unicité [7]) il suit alors $\overline{\mu}^P \equiv \underline{\mu}^P$.

Remarquons que $\varrho^P(e)$ est resté indéterminé comme fonction de P (on peut prendre p. ex. $\varrho^P = \underline{\mu}^P$ dans $\Omega_1 \subset \Omega$ et $\varrho^P = \overline{\mu}^P$ dans $\Omega - \Omega_1$). Il est donc clair qu'il faut imposer des conditions à $\varrho^P(e)$ afin de pouvoir obtenir des propriétés générales. Nous exigeons:

Pour chaque $e \subset \Sigma$, $\varrho^P(e)$ est une fonction harmonique de P.

Alors nous pouvons montrer

Sauf quand $\varrho^P(e)$ est identique à $\underline{\mu}^P(e)$, il y a des points réguliers qui sont ϱ-irréguliers.

Supposons, que chaque point régulier était ϱ-régulier. Les fonctions

$$\int_\Sigma f(Q)\, d\underline{\mu}^P \quad \text{et} \quad \int_\Sigma f(Q)\, d\varrho^P$$

[7]) M. BRELOT. Fonctions sous-harmoniques et balayage. Bull. Ac. Royale de Belgique **24**, 301—312, 421—436 (1938) en part. p. 421.

étaient harmonique dans Ω, continues sur Σ et y prenaient des valeurs-frontières $f(Q)$, sauf dans les points d'un ensemble de capacité zéro. Puisque dans un ensemble ouvert il ne puissent pas exister deux fonctions harmoniques différentes qui prennent sur la frontière, sauf sur un ensemble de capacité zéro, les mêmes valeurs-frontières, il suit que $\varphi(P) = \underline{\varphi}(P)$ $(P \in \Omega)$ pour toute continue $f(Q)$.

En vertu de la définition les potentiels

$$\int \frac{d\,\underline{\mu}^P}{r} \quad \text{et} \quad \int \frac{d\,\varrho^P}{r}$$

sont egaux hors Ω. Si nous montrons qu'ils sont égaux dans les points réguliers, il résulte du théorème d'unicité (l.c. 7) que $\underline{\mu}^P \equiv \varrho^P$. Afin de montrer ceci, nous suivons une méthode de BRELOT (l.c. 7) p. 424). Soit Q_0 un point régulier de Σ et $\{\Omega_n\}$ une suite croissante d'ensembles ouverts réguliers contenus dans Ω avec limite Ω. Si $\underline{\mu}_n^P$ désigne la distribution sur Σ_n, obtenue par balayage sur Σ_n de la masse 1 dans P (P est fixe) et $U_n(R)$ le potentiel de cette distribution, alors si $n \to \infty$, $U_n(R)$ tend vers une fonction $W(R)$, qui égale $1/PR$ sur le complément de Ω et qui dans Ω égale la solution généralisée pour valeurs-frontières $1/PQ$; — W est presque-sousharmonique et égale à

$$\left(\overline{\left(-\frac{1}{PR}\right)}, -\frac{1}{PR}\right).$$

Soit σ une sphère de centre Q_0 et rayon ε. On a (médiation spatiale)

$$\int_\sigma U_n(R)\,dm = \int_\sigma dm \int_{\Sigma_n} \frac{d\,\underline{\mu}_n^P}{r} = \int_{\Sigma_n} d\,\underline{\mu}_n^P \int_\sigma \frac{dm}{r}.$$

Puisque $\int_\sigma \frac{dm}{r}$ est une fonction continue partout, la limite pour $n \to \infty$ existe et vaut

$$\int_\Sigma d\,\underline{\mu}^P \int_\sigma \frac{dm}{r} = \int_\Sigma d\,\varrho^P \int \frac{dm}{r} = \int_\sigma U(R)\,dm$$

où $U(R)$ désigne le potentiel de ϱ^P. En désignant par M_σ la médiation spatiale sur σ on a donc

$$\lim_{n\to\infty} M_\sigma U_n = M_\sigma U.$$

On en tire

$$M_\sigma(-U) = M_\sigma(-W)$$

et si $\varepsilon \to 0$,

$$-U(Q_0) = -\widehat{W}(Q_0) = -\frac{1}{PQ_0}$$

et ceci est, Q_0 étant régulier, la valeur de $\int \frac{d\mu}{r}$ dans Q_0, ce qu'il faut montrer [8]).

L'inverse, c.à.d. si $\varrho^P \equiv \underline{\mu}^P$ les points réguliers sont ϱ-réguliers et inversement, est évident.

La même démonstration est valable pour le théorème suivant plus général *Sauf quand $\varrho^P \equiv \underline{\mu}^P$, l'ensemble des points ϱ-irréguliers a une capacité positive.*

Il suit de ce qui précède que la différence de $\varphi(P)$ et $\underline{\varphi}(P)$ au voisinage de Σ se trouve sur l'ensemble des points réguliers instables de Σ.

Cependant la distribution générale ϱ^P manque de quelques propriétés fondamentales de $\underline{\mu}^P$ et $\bar{\mu}^P$. Ainsi, ce n'est pas vrai qu'il n'y a pas de masses sur l'ensemble des points ϱ-irréguliers, comme est le cas pour $\bar{\mu}^P$ et $\underline{\mu}^P$. On le voit par l'exemple de $\varrho^P = \frac{1}{2}(\underline{\mu}^P + \bar{\mu}^P)$. Alors les points ϱ-irréguliers sont les points instables donc *a*) les points irréguliers et *b*) les points réguliers instables. Sur ce dernier ensemble $\underline{\mu}^P$ et donc ϱ^P n'est pas identiquement nulle.

De plus, le théorème d'unicité du balayage et de l'extrémisation n'est plus vrai en général. Une distribution de masse sur Σ n'est pas déterminée par la valeur du potentiel sur le complément de $\Omega + \Sigma$ et aux points ϱ-réguliers. *P* ex. les distributions $\bar{\mu}^P$ et $\frac{1}{2}(\bar{\mu}^P + \underline{\mu}^P)$, ont même potentiel hors $\Omega + \Sigma$ et aux points stables, donc aux points qui sont réguliers pour les deux distributions.

Remarque. On obtient des distributions ϱ^P, en appliquant le procédé de WIENER–BRELOT, que j'ai généralisé pour ensemble quelconques [9]), à un sous-ensemble arbitraire de $\Omega + \Sigma$ avec frontière Σ. La distribution ainsi obtenue ne porte pas de masse sur l'ensemble des points ϱ-irréguliers. L'application de ce procédé n'épuise donc pas l'ensemble des ϱ^P permis.

3. Il y a de la connexion entre l'étude de la distribution générale $\varrho^P(e)$ et le problème suivant, traité antérieurement et ne résolu que dans un cas particulier [10]).

A chaque ensemble ouvert borné Ω avec valeurs-frontières $f(Q)$ on fait correspondre une fonction $\varphi(P)$ harmonique dans Ω tel que

1. *$\varphi(P)$ est égal à la solution du problème de* DIRICHLET *si celle existe;*
2. *$\varphi(P)$ est une fonctionnelle linéaire bornée de $f(Q)$;*
3. *Si $\Omega_1 + \Sigma_1 \subset \Omega$ et $\varphi(P)$ corresponds à Ω et $f(Q)$, alors $\varphi(P)$ corresponds à $\Omega' = \Omega - (\Omega_1 + \Sigma_1)$ pour valeurs-frontières f sur Σ et φ sur Σ_1.*

---

[8]) Par $\hat{W}$ on désigne la fonction sous-harmonique, uniquement déterminée, qui est presque partout (c. à. d. sauf sur un ensemble de capacité nulle) égale à W.

[9]) Extension du problème de DIRICHLET pour ensembles quelconques. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **43**, 497—511 (1940).

[10]) A. F. MONNA. On the DIRICHLET problem and the method of sweeping out. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **42**, 491—498 (1939).

L'ensemble des $\varphi(P)$ n'est pas vide: $\underline{\varphi}(P)$ satisfait aux conditions. On demande à montrer que c'est la seule solution.

Il est déjà montré, que chaque fonction φ est de la forme

$$\varphi(P)=\int_{\Sigma} f(Q)\, d\,\varrho^P(e_Q),$$

et il résulte des démonstrations l.c. 10) que la distribution ϱ^P dans cette intégrale satisfait aux conditions, imposées aux distributions de § 1 [11]. Il suit alors de ce qui précède dans le cas où Ω n'a qu'une frontière entièrement extérieure:

Chaque fonction $\varphi(P)$ qu'on peut ajouter à Ω au sens indiqué satisfait dans chaque point P à une des inégalités

$$\underline{\varphi}(P) \leqq \varphi(P) \leqq \overline{\varphi}(P) \quad ou \quad \underline{\varphi}(P) \geqq \varphi(P) \geqq \overline{\varphi}(P).$$

Remarquons que, à cause de la première condition — qui ne fut pas posée aux §§ 1 et 2 — on ne peut pas avoir dans Ω, $\overline{\varphi}=\varphi(P)$, c.à.d. $\overline{\varphi}$ n'est pas une fonction permise (sauf quand $\overline{\varphi}\equiv\underline{\varphi}$). En effet, KELDYCH et LAVRENTIEFF ont donné un exemple d'un domaine régulier pour lequel $\overline{\varphi}$ **ne** coïncide pas avec la solution du problème de DIRICHLET [12].

Il suit de ces inégalités que $\varphi(P)=\underline{\varphi}(P)$ si pour tout P dans Ω on a $\overline{\varphi}(P)=\underline{\varphi}(P)$. Or, ce dernier est vrai lorsque l'ensemble des points instables de Σ a une capacité nulle. Puisque l'ensemble des points irréguliers a une capacité nulle, il suit:

Le problème posé a une solution unique si Ω n'a qu'une frontière extérieure et si l'ensemble des points réguliers instables a une capacité nulle.

Il suit des propriétés géométriques des points instables que cette condition est moins restrictive que celle donnée l.c. 10).

A ce problème s'attache encore un autre. $\underline{\varphi}(P)$ satisfait aux conditions du commencement de ce paragraphe et on a

$$\underline{\varphi}(P)=\int_{\Sigma} f(Q)\, d\,\underline{\mu}^P(Q).$$

La question se pose si ici $\underline{\mu}^P$ est déterminé uniquement. *C.à.d. de*

$$\underline{\varphi}(P)=\int_{\Sigma} f(Q)\, d\varrho^P(Q),$$

suit-il nécessairement $\varrho^P\equiv\underline{\mu}^P$?

---

[11]) Il n'est pas indiqué l.c. [10]) que le potentiel de ϱ^P dans cette intégrale est $\leqq 1/PQ$ sur Σ; cependant, cela résulte immédiatement des autres inégalités à l'aide de la propriété que la valeur d'une fonction super-harmonique dans un point est égale à la plus limite de la fonction dans ce point sur tout quasi-voisinage.

[12]) Voir: M. BRELOT. Problème de DIRICHLET et majorantes harmoniques. Bull. des sci. math. t. **53**, 79—96, 115—128 (1939).

La réponse est affirmative. Soit R un point dans le complément de $\Omega + \Sigma$, alors on a $\underline{\varphi} = \dfrac{1}{PR}$ si $f(Q) = {}^1/RQ$, de sorte que

$$\int\limits_{\Sigma} \frac{d\,\varrho^P}{RQ} = \frac{1}{RP}.$$

L'égalité de ϱ^P et $\underline{\mu}^P$ suit alors du théorème d'unicité déjà utilisé, si nous montrons que cette égalité reste vraie si R est un point-frontière régulier. On le démontre comme antérieurement (p. 59).

Apeldoorn, août 1944.