Mathematics. — *Een betrekking voor de polynomen van* LAGUERRE *en van* HERMITE. By O. BOTTEMA. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of November 24, 1945.)

1. Wij bewijzen voor de polynomen $L_n^{(\alpha)}$ van LAGUERRE [1]) de volgende betrekking

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n+\alpha}{m} L_n^{(\alpha)}(x) \,.\, t^n = \\ &= \frac{1}{(1-t)^{m+1+\alpha}} \,.\, e^{-\frac{xt}{1-t}} L_m^{(\alpha)}\left(\frac{xt}{1-t}\right), (|t| < 1) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

Het bewijs geven wij door middel van volledige inductie. Voor $m = 0$ luidt (1):

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)\, t^n = \frac{1}{(1-t)^{1+\alpha}}\, e^{-\frac{xt}{1-t}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

en wij krijgen dus de bekende formule, waardoor $L_n^{(\alpha)}$ met behulp van een voortbrengende functie wordt gedefinieerd.

Veronderstellen wij dat (1) juist is voor een zekere waarde van m. Wij vermenigvuldigen beide leden met $t^{m+1+\alpha}$ en differentiëren naar t. Links ontstaat dan

$$(m+1)\, t^{m+\alpha} \sum_{0}^{\infty} \binom{m+n+\alpha+1}{m+1} L_n^{(\alpha)}(x) \,.\, t^n \quad . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

In het rechterlid krijgen wij

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{t}{1-t}\right)^{m+1+\alpha} e^{-\frac{xt}{1-t}} L_m^{(\alpha)}\left(\frac{xt}{1-t}\right)\right] = \\ &= \frac{t^{m+\alpha}}{(1-t)^{m+\alpha+2}} \,.\, e^{-\frac{xt}{1-t}} \left[(m+1+\alpha)\, L_m^{(\alpha)} - \frac{xt}{1-t} L_m^{(\alpha)} + \frac{xt}{1-t} (L_m^{(\alpha)})'\right] \end{aligned}\right\}, \quad (4)$$

wat op grond van de betrekking

$$y \frac{d}{dy} L_m^{(\alpha)}(y) = -(\alpha + m + 1 - y)\, L_m^{(\alpha)}(y) + (m+1)\, L_{m+1}^{(\alpha)}(y) \qquad (5)$$

[1]) De notatie voor deze polynomen is niet overal dezelfde; wij nemen

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha}) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-r} \frac{(-x)^r}{r!}.$$

overgaat in

$$\frac{t^{m+\alpha}}{(1-t)^{m+2+\alpha}} \cdot e^{-\frac{xt}{1-t}} (m+1) L_{m+1}^{(\alpha)} \left(\frac{xt}{1-t}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Uit (3) en (6) volgt, dat (1) juist is voor $m+1$.

2. Uit (1) kan men een analoge betrekking afleiden voor de polynomen van HERMITE door gebruik te maken van:

$$\left.\begin{aligned} H_{2n}(x) &= (-1)^n 2^{2n} n! \, L_n^{(-1/2)}(x^2) \\ H_{2n+1}(x) &= (-1)^n 2^{2n+1} n! \, x \, L_n^{(\frac{1}{2})}(x^2) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Wij vinden respectievelijk:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-\frac{1}{2}}{m} \cdot \frac{(-1)^n t^n}{2^{2n} n!} H_{2n}(x) = \\ &= \frac{(-1)^m}{2^{2m} m! (1-t)^{m+\frac{1}{2}}} \cdot e^{-\frac{x^2 t}{1-t}} H_{2m}\left(x \sqrt{\frac{t}{1-t}}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (8^a)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n+\frac{1}{2}}{m} \cdot \frac{(-1)^n t^{n+\frac{1}{2}}}{2^{2n+1} n!} H_{2n+1}(x) = \\ &= \frac{(-1)^m}{2^{2m+1} m! (1-t)^{m+1}} \cdot e^{-\frac{x^2 t}{1-t}} H_{2m+1}\left(x \sqrt{\frac{t}{1-t}}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (8^b)$$

3. Wij noemen enige bijzondere gevallen van (1) en (8). Voor $t = \frac{1}{2}$ gaat (1) over in

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n+\alpha}{m} \cdot \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{2^n} = 2^{m+1+\alpha} \cdot e^{-x} \cdot L_m^{(\alpha)}(x) \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

terwijl men voor (8) vindt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-\frac{1}{2}}{m} \cdot \frac{(-1)^n}{2^{3n} \cdot n!} H_{2n}(x) = \frac{(-1)^m}{2^{m-\frac{1}{2}} \cdot m!} \cdot e^{-x^2} H_{2m}(x) \quad (10^a)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n+\frac{1}{2}}{m} \cdot \frac{(-1)^n}{2^{3(n+\frac{1}{2})} \cdot n!} H_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^m}{2^m m!} \cdot e^{-x^2} \cdot H_{2m+1}(x). \quad (10^b)$$

Voor $m = 0$ volgt uit (8)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{2^{2n} n!} H_{2n}(x) = \frac{1}{(1-t)^{1/2}} \cdot e^{-\frac{x^2 t}{1-t}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11^a)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{2^{2n} \cdot n!} H_{2n+1}(x) = \frac{x}{(1-t)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{x^2 t}{1-t}}. \quad . \quad . \quad . \quad (11^b)$$

4. Hier volgt een toepassing der verkregen formules. Onlangs hebben TRICOMI en DOETSCH [2]) de volgende betrekking afgeleid:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{\Gamma(\alpha+n+1)} t^n = e^t (xt)^{-\frac{1}{2}\alpha} J_\alpha(2\sqrt{xt}) \qquad (\alpha > -1). \; . \quad (12)$$

---

[2]) TRICOMI, Rend. Lincei 21, 332—335 (1935).
DOETSCH, idem 22, 300—304 (1935).

Een oudere relatie, die verband legt tussen de polynomen van LAGUERRE en de Besselse functies is de formule van LE ROY

$$n!\, e^{-x}\, x^{\frac{1}{2}\alpha}\, L_n^{(\alpha)}(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{n+\frac{1}{2}\alpha}\, J_\alpha(2\sqrt{xt})\, dt. \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Wij leiden (13) uit (12) af op de volgende wijze:

$$\int_0^\infty e^{-t}\, t^{n+\frac{1}{2}\alpha}\, J_\alpha(2\sqrt{xt})\, dt = \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}\alpha}\, e^{-2t}\, t^{n+\alpha} \left[\sum_{p=0}^{\infty} \frac{L_p^{(\alpha)}(x)\,.\, t^p}{\Gamma(\alpha+p+1)}\right] dt =$$

$$= x^{\frac{1}{2}\alpha} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{L_p^{(\alpha)}(x)}{\Gamma(\alpha+p+1)} \int_0^\infty e^{-2t}\, t^{n+p+\alpha}\, dt =$$

$$= x^{\frac{1}{2}\alpha} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{L_p^{(\alpha)}(x)}{\Gamma(\alpha+p+1)} \cdot \frac{1}{2^{n+p+\alpha+1}} \int_0^\infty e^{-\tau}\, \tau^{n+p+\alpha}\, d\tau =$$

$$= \frac{n!\, x^{\frac{1}{2}\alpha}}{2^{n+\alpha+1}} \sum_{p=0}^{\infty} \binom{n+p+\alpha}{n} \frac{L_p^{(\alpha)}(x)}{2^p}.$$

Op grond van (9) is dit gelijk aan

$$n!\, e^{-x}\, x^{\frac{1}{2}\alpha}\, L_n^{(\alpha)}(x).$$

5. De betrekking (1) kan worden benut om zekere bepaalde integralen te berekenen, waarvan de integrand het product van twee functies van LAGUERRE bevat.

Stelt men $\dfrac{t}{1-t} = a$, dus $t = \dfrac{a}{1+a}$, dan wordt (1)

$$e^{-ax}\, L_m^{(\alpha)}(ax) = \frac{1}{(1+a)^{m+1+\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n+\alpha}{m} \cdot \frac{a^n}{(1+a)^n}\, L_n^{(\alpha)}(x) \quad (14)$$

welke betrekking opgevat kan worden als de ontwikkeling van de in het linkerlid staande functie naar polynomen van LAGUERRE. Hieruit volgt

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty x^\alpha\,.\, e^{-(a+1)x}\, L_m^{(\alpha)}(ax)\, dx &= \frac{1}{(1+a)^{m+1+\alpha}} \binom{m+\alpha}{m}\, \Gamma(\alpha+1) = \\ &= \frac{\Gamma(m+1+\alpha)}{m!} \cdot \frac{1}{(1+a)^{m+1+\alpha}} \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

of wel, als men $\dfrac{a+1}{a} = \lambda$ stelt

$$\int_0^\infty x^\alpha\,.\, e^{-\lambda x}\, L_m^{(\alpha)}(x)\, dx = \frac{\Gamma(m+1+\alpha)}{m!} \cdot \frac{(\lambda-1)^m}{\lambda^{m+1+\alpha}}. \quad . \quad . \quad (16)$$

Algemener krijgt men door beide leden van (14) met $x^{\alpha} \,.\, e^{-x} L_p^{(\alpha)}(x)$ te vermenigvuldigen:

$$\int_0^\infty x^\alpha \,.\, e^{-(a+1)x} L_m^{(\alpha)}(a\,x) \,.\, L_p^{(\alpha)}(x)\,dx =$$

$$= \binom{m+p+\alpha}{m} \frac{a^p}{(1+a)^{m+p+1+\alpha}} \int_0^\infty e^{-x}\, x^\alpha \,\{L_p^{(\alpha)}(x)\}^2\,dx$$

of, daar de integraal in het rechterlid gelijk is aan $\dfrac{\Gamma(p+\alpha+1)}{p!}$:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty x^\alpha \,.\, e^{-(a+1)x} L_m^{(\alpha)}(a\,x) \,.\, L_p^{(\alpha)}(x)\,dx = \\ &= \frac{\Gamma(m+p+\alpha+1)}{p!\,m!} \cdot \frac{a^p}{(1+a)^{m+p+1+\alpha}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (17)$$

welk resultaat men nog schrijven kan in de meer symmetrische gedaante

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty x^\alpha\, e^{-(a+b)x} L_m^{(\alpha)}(a\,x) \,.\, L_p^{(\alpha)}(b\,x)\,dx = \\ &= \frac{\Gamma(m+p+\alpha+1)}{m!\,p!} \cdot \frac{a^p\, b^m}{(a+b)^{m+p+\alpha+1}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (18)$$

6. Stelt men in (8^a) $\dfrac{t}{1-t} = a^2$, dus $t = \dfrac{a^2}{1+a^2}$, dan krijgt men

$$e^{-a^2x^2} H_{2m}(a\,x) = \frac{2^{2m}\, m!\,(-1)^m}{(1+a^2)^{m+\frac{1}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-\frac{1}{2}}{m} \frac{(-1)^n a^{2n}}{2^{2n}\, n!\,(1+a^2)^n} H_{2n}(x) \quad (19)$$

waaruit volgt

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a^2+1)x^2} H_{2m}(a\,x)\,dx &= \frac{(-1)^m\, 2^{2m} \,.\, m!}{(1+a^2)^{m+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})}{m!\,\Gamma(\frac{1}{2})} \sqrt{\pi} = \\ &= \frac{(-1)^m\,(2m)!}{m!\,(1+a^2)^{m+\frac{1}{2}}} \sqrt{\pi} \end{aligned}\right\} . \quad (20)$$

Stelt men nog $\dfrac{a^2+1}{a^2} = s$, dan kan men, daar $H_{2m}(x)$ een even functie is, (20) als volgt schrijven

$$\int_0^\infty e^{-sx^2} H_{2m}(x)\,dx = \frac{(2m)!}{m!} \frac{(1-s)^m}{s^{m+\frac{1}{2}}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} . \quad . \; . \; . \quad (21)$$

Een algemenere formule wordt verkregen, door beide leden van (19) te vermenigvuldigen met $e^{x^2} . H_{2p}(x)$. Men verkrijgt dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a^2+1)x^2} H_{2m}(ax) \, . \, H_{2p}(x)\, dx =$$

$$= \frac{(-1)^m 2^{2m} m!}{(1+a^2)^{m+\frac{1}{2}}} \binom{m+p-\frac{1}{2}}{m} \cdot \frac{(-1)^p a^{2p}}{2^{2p} . p! (1+a^2)^p} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \{H_{2p}(x)\}^2 dx$$

of, daar de integraal in het rechterlid gelijk is aan $2^{2p} . (2p)! \sqrt{\pi}$:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a^2+1)x^2} H_{2m}(ax) \, . \, H_{2p}(x)\, dx = \\ &\qquad = (-1)^{m+p} . 2^{2(m+p)} \Gamma(m+p+\tfrac{1}{2}) \frac{a^{2p}}{(1+a^2)^{p+m+\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (22)$$

welke betrekking men nog schrijven kan in de symmetrische gedaante

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a^2+b^2)x^2} . H_{2m}(ax) \, . \, H_{2p}(bx)\, dx = \\ &\qquad = (-1)^{m+p} . 2^{2(m+p)} . \Gamma(m+p+\tfrac{1}{2}) \cdot \frac{a^{2p}\, b^{2m}}{(a^2+b^2)^{p+m+\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (23)$$

Een overeenkomstig resultaat voor een integraal waarbij het product van twee polynomen van HERMITE van *oneven* index voorkomt, wordt met dezelfde methode van (8^b) verkregen. Men heeft

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a^2+b^2)x^2} H_{2m+1}(ax) \, . \, H_{2p+1}(bx)\, dx = \\ &\qquad = (-1)^{m+p} . 2^{2(m+p+1)} \Gamma(m+p+\tfrac{3}{2}) \cdot \frac{a^{2p+1}\, b^{2m+1}}{(a^2+b^2)^{p+m+\frac{3}{2}}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (24)$$

7. De in de beide vorige paragrafen verkregen uitkomsten kunnen op hun beurt gebruikt worden om met behulp der relatie (1) integralen van nog algemeene vorm te berekenen. Wij vermenigvuldigen daartoe beide leden van (14) met $x^{\alpha} . e^{-(b+1)x} L_p^{(\alpha)}(bx)$. Na toepassing van (17) ontstaat dan

$$\int_0^{\infty} e^{-(a+b+1)x} . x^{\alpha} . L_m^{(\alpha)}(ax) \, . \, L_p^{(\alpha)}(bx)\, dx =$$

$$= \frac{1}{(1+a)^{m+1+\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n+\alpha}{m} \cdot \frac{a^n}{(1+a)^n} \cdot \frac{\Gamma(p+n+\alpha+1)}{n!\, p!} \cdot \frac{b^n}{(1+b)^{p+n+\alpha+1}} =$$

$$= \frac{1}{m!\, p! (1+a)^{m+1+\alpha} (1+b)^{p+1+\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+n+\alpha)!\, (p+n+\alpha)!}{n!\, (n+\alpha)!} \frac{(ab)^n}{(1+a)^n (1+b)^n} =$$

$$= \frac{\Gamma(m+\alpha+1)\,.\,\Gamma(p+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\,.\,m!\,p!\,(1+a)^{m+1+\alpha}(1+b)^{p+1+\alpha}} \times$$

$$F\left(m+\alpha+1, p+\alpha+1, \alpha+1, \frac{ab}{(1+a)(1+b)}\right)$$

waaruit met behulp der transformatieformule voor hypergeometrische functies:

$$F(a, b, c, y) = (1-y)^{c-a-b}\, F(c-a, c-b, c, y)$$

volgt:

$$\int_0^\infty e^{-(a+b+1)x}\, x^\alpha\,.\, L_m^{(\alpha)}(ax)\,.\, L_p^{(\alpha)}(bx)\, dx =$$

$$= \frac{\Gamma(m+\alpha+1)\,.\,\Gamma(p+\alpha+1)\,.\,(1+a)^p\,(1+b)^m}{m!\,p!\,\Gamma(\alpha+1)\,.\,(1+a+b)^{m+p+\alpha+1}} \times$$

$$F\left(-m, -p, \alpha+1, \frac{ab}{(1+a)(1+b)}\right).$$

Zonder moeite kan men deze uitkomst schrijven in de meer symmetrische gedaante:

$$\left.\begin{array}{c} \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda x}\, x^\alpha\, L_m^{(\alpha)}(ax)\,.\, L_p^{(\alpha)}(bx)\, dx = \\ \displaystyle\frac{\Gamma(m+\alpha+1)\,.\,\Gamma(p+\alpha+1)}{m!\,p!\,\Gamma(\alpha+1)}\,.\,\frac{(\lambda-a)^m(\lambda-b)^p}{\lambda^{m+p+\alpha+1}}\,. \\ \displaystyle F\left(-m, -p, \alpha+1, \frac{ab}{(\lambda-a)(\lambda-b)}\right) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

Voor de polynomen van HERMITE vindt men overeenkomstige resultaten, b.v. door in (25) resp. $\alpha = -\frac{1}{2}$ en $\alpha = \frac{1}{2}$ te substitueren en de betrekkingen (7) toe te passen. Na enige herleiding ontstaat

$$\left.\begin{array}{c} \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda^2 x^2} H_{2m}(ax)\,.\, H_{2p}(bx)\, dx = \\ \displaystyle = (-1)^{m+p}\,.\,2^{2m+2p-1}\,.\,\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\,.\,\Gamma(p+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}\,. \\ \displaystyle\frac{(\lambda^2-a^2)^m(\lambda^2-b^2)^p}{\lambda^{2m+2p+1}}\,.\, F\left(-m, -p, \tfrac{1}{2}, \frac{a^2 b^2}{(\lambda^2-a^2)(\lambda^2-b^2)}\right) \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (26^a)$$

$$\left.\begin{array}{c} \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda^2 x^2} H_{2m+1}(ax)\,.\, H_{2p+1}(bx)\, dx = \\ \displaystyle = (-1)^{m+p}\,.\,2^{2m+2p+1}\,.\,\frac{\Gamma(m+\frac{3}{2})\,.\,\Gamma(p+\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})}\,. \\ \displaystyle\frac{ab(\lambda^2-a^2)^m(\lambda^2-b^2)^p}{\lambda^{2m+2p+3}}\, F\left(-m, -p, \tfrac{3}{2}, \frac{a^2 b^2}{(\lambda^2-a^2)(\lambda^2-b^2)}\right) \end{array}\right\} \quad . \quad (26^b)$$

De hypergeometrische functies in de rechterleden van (25) en (26) zijn polynomen van het vierde argument en van een graad gelijk aan het kleinste der getallen $m + 1$ en $p + 1$.

8. De betrekkingen (25) en (26) schijnen wel de meest algemene bepaalde integralen te bevatten, die men met behulp van de betrekking (1) kan berekenen. De vorige formules (14, 16, 18, 21, 23, 24) zijn daarvan bijzondere gevallen. Formule (21) werd het eerst afgeleid door DOETSCH [3]) uit een beschouwing over de eigenschappen van de differentiaalvergelijking van de lineaire warmtegeleiding; dezelfde leidde ook nog een bijzonder geval af van (26), nl. dat waarbij $\lambda = a$. De relaties (25) en (26) zijn echter op hun beurt bijzondere gevallen van de nog meer algemene betrekkingen, die door MAYR [4]) zijn afgeleid voor de integralen

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}\, x^{\sigma-1}\, L_m^{(\alpha)}(ax)\,.\, L_p^{(\beta)}(bx)\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (27^a)$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda^2 x^2}\,.\, x^{\sigma-1}\, H_\nu(ax)\,.\, H_\mu(bx)\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (27^b)$$

die als oplossingen van bepaalde differentiaalvergelijkingen uitgedrukt kunnen worden door polynomen van APPELL. Onze resultaten (25) en (26) komen, afgezien van een door hem niet nader expliciet bepaalde constante factor, bij MAYR voor (l.c. pg. 601, 603). Dezelfde merkt op dat zekere integralen van de gedaante (27^a) voor de golfmechanica van betekenis zijn. Bepaalde gevallen van deze door SCHRÖDINGER [5]) beschouwde uitdrukkingen kunnen dus ook met (25) worden berekend.

---

[3]) DOETSCH, Integraleigenschaften der Hermiteschen Polynome, Math. Zeitschr. **32**, 587—599 (1930).

[4]) MAYR, Integraleigenschaften der Hermiteschen und Laguerreschen Polynome, Math. Zeitschr. **39**, 597—604 (1935).

[5]) SCHRÖDINGER, Ann. der Physik **80**, 847 (1926).