Mathematics. — *Een (2,2) congruentie, die een tweevoudig oneindig stelsel van quadratische regelscharen bevat.* By O. BOTTEMA. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of November 24, 1945.)

1. Indertijd hebben wij met behulp van de afbeelding van de lijnenruimte op de punten van R_5 en op grond van de stelling van DARBOUX–SEGRE voor het oppervlak van VERONESE, de stralencongruenties onderzocht welke een tweevoudig oneindig stelsel van quadratische regelscharen bevatten [1]). Afgezien van het triviale geval van de lineaire congruentie (die ∞^3 regelscharen bevat) vonden wij in hoofdzaak *twee* typen:

a. de koordencongruentie (1.3) van een cubische ruimtekromme en de duale congruentie (3.1).

b. een speciale (2.2) congruentie, nl. die der rechten, welke een quadratisch oppervlak Q raken en een rechte l snijden, die Q raakt; de congruentie is zelf-duaal.

Daarbij voegen zich dan nog een (1.2) en de duale (2.1) congruentie, die echter beschouwd kunnen worden als bijzondere gevallen zowel van type *a* als van type *b* en waarbij de cubische ruimtekromme ontaard of wel het oppervlak Q singulier is.

Naderhand hebben wij kennis genomen van een publicatie van BALDUS [2]) over hetzelfde onderwerp, waarin met behulp van de methodes der synthetische meetkunde eveneens de congruenties worden bepaald met ∞^2 regelscharen. Aangezien bij dit onderzoek alleen het type *a* (met het bijzondere geval) gevonden wordt, komen wij hier op de opgave terug, wijzen de oorzaak aan van het onvolledig resultaat van BALDUS en maken nog enige opmerkingen over de congruentie *b*), die naar het schijnt minder bekend is.

2. De gedachtengang van BALDUS is in het kort de volgende. Als een congruentie ∞^2 regelscharen bevat, zal een willekeurige rechte g van de congruentie tot ∞^1 dezer regelscharen behoren en deze ∞^1 regelscharen zullen tezamen de gehele congruentie (die irreducibel verondersteld wordt) opbouwen. In een brandpunt van g wordt g door een consecutieve rechte van de congruentie gesneden; deze laatste rechte behoort dus tot een der genoemde ∞^1 regelscharen, zeg R, waar g zelf toe behoort. Een niet ontaarde regelschaar bevat echter slechts rechten, die elkaar onderling kruisen.

---

[1]) BOTTEMA, Strahlenkongruenzen mit einem zweigliedrigen System von quadratischen Regelscharen, Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **43**, 1276—1281 (1940).

[2]) BALDUS, Über Strahlensysteme, welche unendlich viele Regelflächen 2. Grades enthalten, diss. Erlangen (1910).

De regelschaar R is dus een ontaarde regelschaar. Er zijn, afgezien van verder gaande degeneratie, twee vormen van ontaarde regelscharen, nl. de quadratische kegels en (duaal) de krommen van de tweede klasse.

BALDUS onderscheidt nu *twee* mogelijkheden: de ontaarde regelscharen R_1 en R_2, die bij de beide brandpunten van g behoren, *zijn allebei kegels* dan wel *allebei krommen van de tweede klasse.* Het verdere onderzoek doet dan zien, dat de congruentie een koordencongruentie (1.3) van een cubische ruimtekromme, resp. de duale (3.1) congruentie is. De gevallen waarbij R_1 of R_2 verdere ontaarding vertonen, leiden dan tot de (1.2) of de (2.1) congruentie, die als bijzonder geval van de algemene oplossing te beschouwen is.

Het is wel duidelijk, dat hier de mogelijkheid over het hoofd gezien is, *dat van de beide regelscharen R_1 en R_2 de ene tot een quadratische kegel, de andere daarentegen tot een kromme van de tweede klasse ontaard is.* Deze omstandigheid doet zich bij de congruentie b) zoals wij dadelijk zullen zien, inderdaad voor.

3. In ons bovengenoemd artikel, waarin het vraagstuk analytisch is behandeld, hebben wij het coördinatenstelsel zo gekozen, dat het quadratisch oppervlak Q de vergelijking

$$x_1^2 - x_3^2 + 2\, x_2 x_4 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

verkrijgt, terwijl de singuliere rechte l door

$$x_2 = x_3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

wordt voorgesteld. De rechte l raakt Q in het punt $P \equiv (0001)$. De congruentie der rechten, die aan Q raken en l snijden, kan dan worden weergegeven door

$$\left.\begin{array}{lll} p_{12} = \nu^2 & , \; p_{13} = \nu(\lambda - \mu) & , \; p_{14} = \mu^2 + \lambda^2 \\ p_{34} = \mu^2 - \lambda^2 & , \; p_{42} = \nu(\lambda + \mu) & , \; p_{23} = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

waarin p_{ij} de Plückerse lijncoördinaten en λ, μ, ν drie homogene parameters aanduiden. In de afbeelding van KLEIN correspondeert met de congruentie een op de fundamentale variëteit $\Omega \equiv p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$ gelegen oppervlak van de vierde graad V, dat ontstaan kan door een oppervlak F van VERONESE te projecteren op een R_4 uit een punt dat gelegen is in een vlak, dat een op F gelegen kegelsnede bevat, maar niet op F zelf gelegen is. Het oppervlak V bevat, evenals F, ∞^2 kegelsneden en deze kegelsneden zijn de beeldfiguren van de ∞^2 tot de congruentie behorende regelscharen. Men verkrijgt de analytische voorstelling van een dergelijke regelschaar door in (3) de substitutie

$$\nu = a\lambda + b\mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

uit te voeren, waarbij de niet-homogene parameters a en b niet beide gelijk aan nul zijn. Voor de vergelijking van het quadratische oppervlak, dat deze regelschaar draagt, vindt men

$$\left.\begin{aligned} 2(a+b)x_1x_2-(a^2-b^2)x_1x_3+2x_2^2-2(a-b)x_2x_3-(a+b)^2x_2x_4+ \\ +(a^2+b^2)x_3^2=0 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

en uit het feit, dat men deze vergelijking schrijven kan in de vorm:

$$\{(a+b)x_1+2x_2-(a-b)x_3\}^2-(a+b)^2(x_1^2-x_3^2+2x_2x_4)=0 \qquad (6)$$

volgt, dat dit quadratisch oppervlak de rechte l bevat en aan Q raakt volgens een kegelsnede, die door P gaat. De ∞^2 quadratische oppervlakken zijn omgekeerd door deze voorwaarde bepaald. Van elk der oppervlakken behoort tot de congruentie die regelschaar, welke de rechte l bevat.

4. De beide brandpunten van een rechte g der congruentie zijn haar snijpunt met l en haar raakpunt met Q. Voor de rechte (λ, μ, ν) zijn dit resp. de punten

$$G_1 \equiv \{\nu, 0, 0, \lambda+\mu\} \text{ en } G_2 \equiv \{-\nu(\lambda+\mu), \nu^2, \nu(\lambda-\mu), -2\lambda\mu\}.$$

De beide ontaarde regelscharen R_1 en R_2, die bij deze punten behoren, zijn resp. de *kegel* met G_1 tot top, welke Q omhult en de *kegelsnede* welke de doorsnede is van Q met het vlak door l en g en die dus in G_2 aan g raakt. De aldus beschreven regelscharen vormen tevens de gehele verzameling ontaarde regelscharen, die de congruentie bevat. Immers de discriminant van (5) is

$$D \equiv (a+b)^4(a-b)^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Voor $a+b=0$ ontstaat $(x_2-ax_3)^2=0$, dus een kegelsnede waarvan het vlak door l gaat; voor $a-b=0$ de kegel $(ax_1+x_2)^2-a^2(x_1^2-x_3^2+ + 2x_2x_4)=0$, die Q omhult en het op l gelegen punt (a001) tot top heeft.

5. De ∞^2 quadratische oppervlakken (5), die de regelscharen der congruentie dragen, bevatten elk nog een tweede regelschaar. Onderzoekt men de verzameling der rechten van deze toegevoegde regelscharen, dan blijkt deze niet een congruentie maar een complex te zijn en wel het tangentencomplex van Q. Men kan de overeenkomstige vraag stellen voor de onder a) genoemde koordencongruentie; ook daar vormen de toegevoegde regelscharen een complex: het secantencomplex der cubische ruimtekromme.

6. De (2,2) congruentie welke bestaat uit de rechten, die een quadratisch oppervlak Q raken en een *willekeurige* rechte l snijden, is in de lijnenmeetkunde welbekend [1]). Aangezien er steeds een projectieve transformatie bestaat, die Q invariant laat en twee punten van Q toevoegt aan twee willekeurige andere punten van Q, zijn alle congruenties, waarbij l met Q twee *verschillende* punten gemeen heeft, onderling projectief. Het geval, waarbij l aan Q raakt, schijnt niet de aandacht te hebben getrokken.

1) STURM, Liniengeometrie, II (1893), 328—329.