Mathematics. — *Over parametervoorstellingen met toepassing op* CAYLEY'*s formules voor de voorstelling van den orthogonalen determinant.* By W. VAN DER WOUDE.

(Communicated at the meeting of September 21, 1946.)

Laat een irreducibele m-dimensionale variëteit V_m in een n-dimensionale ruimte door een parametervoorstelling

$$x_i = q_i\,(t_1, t_2, \ldots t_m) \;\; (i = 1, 2 \ldots)$$

gegeven zijn. Hiermee wordt dan aangeduid, dat elk stelsel waarden t_a $(a = 1, \ldots, m)$ een punt van V_m bepaalt — uitgezonderd misschien, wanneer voor zoo'n stelsel niet alle x_i's bepaald zijn — en dat een algemeen punt van V_m door een stelsel t_a bepaald kan worden. Het is dan echter mogelijk, dat sommige punten van V_m niet direct, d.w.z. door het invullen van waarden voor t_a, bepaald zijn.

Zoo kan b.v. de cirkel

$$x^2 + y^2 = 1$$

door

$$x = \frac{2\,t}{1 + t^2}, \; y = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

worden voorgesteld. Het punt $(0, -1)$ van den cirkel wordt echter uit deze parametervoorstelling slechts door een limietovergang $(t \rightarrow \infty)$ gevonden.

Men kan in dit voorbeeld natuurlijk het gebrek opheffen door invoering van homogene coördinaten en parameters, dus door den cirkel voor te stellen door

$$x^2 + y^2 = z^2$$

en (2) te vervangen door

$$x = 2\,st, \; y = s^2 - t^2, \; z = s^2 + t^2.$$

Het is nu verder bekend, dat ook hierna, d.w.z. na zoo'n homogeen maken, soms nog punten der variëteit niet direct uit de parametervoorstelling worden gevonden, ook hoe ze dan toch wel gevonden worden.

Echter is het soms weinig opvallend, dat er als het ware punten aan de parametervoorstelling ontsnappen, waardoor haar gebruik dan eigenaardige gevaren meebrengt.

Het is mijn doel in het volgende eerst een paar eenvoudige m.i. karakteristieke voorbeelden te geven en daarna een toepassing op een vraagstuk van schijnbaar geheel anderen aard, n.l. op de uitdrukking der elementen van een orthogonalen determinant van den n^{den} graad, met de waarde $+1$, in $\frac{1}{2}n(n-1)$ parameters.

Het is n.l. CAYLEY [1]) gelukt deze termen door een dergelijke parametervoorstelling uit te drukken. Er zijn echter gevallen, waarin deze voorstelling niet mogelijk is.

In KOWALEWSKI's Einführung (zie voorafgaande voetnoot) wordt aangetoond, dat er voor $n = 2$ slechts één uitzondering is, die echter door homogeen maken der parameters dadelijk verdwijnt.

Het vraagstuk van deze uitzonderingsdeterminanten [2]) werd kortgeleden nog besproken in de dissertatie van Dr. LELYVELD [3]) en wel in de voorrede. Hij bewijst, dat er voor $n = 2$ en $n = 3$ geen uitzonderingsdeterminanten (in deze beteekenis) bestaan; d.w.z. dat de termen van elken orthogonalen determinant, met waarde $+1$, in de gevallen $n = 2$ en $n = 3$ in 2, resp. 4, homogene parameters kunnen worden uitgedrukt.

Verder bewijst hij, dat voor $n = 4$, ook bij gebruik van homogene parameters, uitzonderingsdeterminanten voorkomen. Deze geeft hij aan in het reëele gebied, voor zoover ze symmetrisch zijn.

In het volgende hoop ik nog aan te toonen, dat men op grond van de voorafgaande eenvoudige opmerking over parametervoorstellingen de eerste resultaten, — geen uitzonderingen voor $n = 2$ en $n = 3$ — dadelijk kan inzien en daarna voor $n = 4$ de uitzonderingsdeterminanten in het reëele gebied alle kan aangeven.

§ 1. Als eerste voorbeeld kies ik een variëteit V in de projectieve vierdimensionale ruimte R_4 voorgesteld door

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= t_5\, t_2 \\ x_2 &= t_1\, t_3 \\ x_3 &= t_2\, t_4 \\ x_4 &= t_3\, t_5 \\ x_5 &= t_4\, t_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1,1)$$

met
$$\Sigma t_i = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1, 1^a)$$

Bepaalt men de doorsnede van V met $x_1 = 0$, dan vindt men a) $t_5 = 0$, b) $t_2 = 0$.

Toch zou men dwalen door de beide vlakken

$$x_1 = x_4 = 0 \text{ en } x_1 = x_3 = 0$$

als de volledige doorsnede van V met $x_1 = 0$ te beschouwen.

Immers stelt (1) voor de variëteit

$$x_1\, x_2\, x_3 + x_2\, x_3\, x_4 + x_3\, x_4\, x_5 + x_4\, x_5\, x_1 + x_5\, x_1\, x_2 = 0$$

de bekende derdegraadsvariëteit in R_4 van SEGRE.

---

[1]) CAYLEY. Sur quelques propriétés des déterminants orthogonales Crelle's Journal 52. Zie verder: G. KOWALEWSKI, Einführung in die Determinantentheorie; Leipzig, Veit & Co., 1909.

[2]) Ik noem „uitzonderingsdeterminant" elken determinant, die uit de gegeven parametervoorstelling slechts door een limietovergang wordt gevonden; dat stemt niet geheel overeen met de definitie van Dr. LELYVELD.

[3]) Afbeeldingen van bewegingen om een punt in R_2, R_3, R_4. Proefschrift Utrecht 1943.

Tot die doorsnede behoort dus ook het vlak

$$x_1 = x_2 + x_5 = 0$$

§ 2. Beschouwen wij deze kwestie iets algemeener.

Laat een variëteit V voorgesteld worden door

$$x_i = q_i(t_1, t_2, \ldots t_\lambda) \ (i = 1, \ldots n) \ldots (2, 1)$$

aangenomen wordt, dat voor zekere waarden $t_\alpha^{(0)}$ $(\alpha = 1, \ldots, \lambda$ elke) x_i gelijk nul is.

Wij beschouwen dan t_α als functie van een parameter u, zoodat

$$t_\alpha^{(0)} = t_\alpha(u_0)$$

Hierdoor zijn dan de x_i functies van u, waarbij

$$x_i(u_0) = 0 \ (i = 1, \ldots n)$$

Wij laten nu u een stelsel waarden doorloopen met u_0 als limiet, dan beschrijft het punt x een kromme op V, waarop ook het limietpunt van deze kromme. Elk punt van V, dat niet dadelijk uit (2, 1) gevonden wordt, d.w.z. dat niet gevonden wordt door eenvoudig bepaalde waarden aan t_α te geven, kan men als limietpunt der parametervoorstelling (2, 1) vinden [4]).

Passen wij deze methode op ons voorbeeld (1, 1) toe.

Het is duidelijk, dat hier voor $x_i = 0$ noodig is, dat drie opeenvolgende (modulo 5) t's gelijk nul zijn.

Wij beschouwen dus functies $t_\alpha(u)$ waarvoor

$$t_5^{(0)} = t_1^{(0)} = t_2^{(0)} = 0 \ (t_\alpha^{(0)} = t_\alpha(u_0))$$

waaruit volgt

$$t_3^{(0)} + t_4^{(0)} = 0$$

Daar het geen zin heeft elke t_α gelijk nul te nemen, kunnen wij aannemen, dat $t_3^{(0)}$ en $t_4^{(0)}$ ongelijk nul zijn. Nu kan men uit t_α, t_β, t_γ — hiermee worden voor het oogenblik t_5, t_1, t_2 bedoeld, echter afgezien van de volgorde — er zeker één b.v. t_α nemen, zoodat $\lim\limits_{u \to 0} \frac{t_\beta}{t_\alpha}$ en $\lim\limits_{u \to 0} \frac{t_\gamma}{t_\alpha}$ eindig zijn.

Laat b.v. t_1 met t_α bedoeld zijn dan stellen wij

$$t_5 = \lambda t_1, \ t_2 = \mu t_1.$$

Voor het limietpunt, bepaald door $u \to u_0$, vinden wij

$$x_1 = 0, \ x_2 = t_3^{(0)}, \ x_3 = -\lambda^{(0)} t_3^{(0)},$$

$$x_4 = \mu^{(0)} t_3^{(0)}, \ x = -t_3^{(0)}.$$

Aldus worden als limietpunten gevonden, de punten van het vlak

$$x_1 = x_2 + x_5 = 0,$$

---

4) Zie B. L. VAN DER WAARDEN: Zur Algebraischen Geometrie, III, Math. Ann. p. 695.

en als meetkundige plaats der limietpunten de vlakken

$$x_i = x_{i-1} + x_{i+1} = 0 \; (i = 1, \ldots 5, \text{ mod. } 5).$$

§ 3. Nog meer eigenaardig is misschien het volgende voorbeeld. Een variëteit wordt, weer in de projectieve R_4, voorgesteld door

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= t_1\, t_3\, t_4 \\ x_2 &= t_2\, t_4\, t_5 \\ x_3 &= t_3\, t_5\, t_1 \\ x_4 &= t_4\, t_1\, t_2 \\ x_5 &= t_5\, t_2\, t_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3,1)$$

met $\Sigma\, t_a = 0$ $(\alpha = 1, \ldots\ldots 5)$ ...... (3, 1^a).

Als doorsnede van deze variëteit met de lineaire ruimte $x_1 = 0$ vindt men voorloopig slechts drie rechten, dan als meetkundige plaats der limietpunten het tweedegraadsoppervlak

$$x_1 = x_2\, x_3 + x_3\, x_4 + x_4\, x_5 = 0.$$

Inderdaad is (3) een voorstelling der variëteit

$$x_1\, x_2 + x_2\, x_3 + x_3\, x_4 + x_4\, x_5 + x_5\, x_1 = 0.$$

§ 4. Voor de toepassing van het voorafgaande citeer ik in deze § en de volgende, gedeeltelijk zonder bewijs, KOWALEWSKI.

Laat $\| a_{ik} \|$ een orthogonale matrix zijn, waarbij

$$| a_{ik} | = +1.$$

Door de hoofdtermen met 1 te vermeerderen ontstaat de determinant $| a^+_{ik} |$, zoodat dus

$$a^+_{ik} = a_{ik} \; (i \neq k), \; a^+_{ii} = a_{ii} + 1.$$

Laat in dezen determinant b_{ik} de cofactor (het algebraïsch complement) zijn van a^+_{ik}. Dan is (zie Einführung, p. 169)

$$\left.\begin{aligned} b_{11} = b_{22} = \quad\quad = b_{nn} &= \tfrac{1}{2}\, | a^+_{ik} | \\ b_{rs} &= -\, b_{sr} \; (r \neq s) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4,1)$$

Is nu verder c_{ik} het algebraïsch complement van b_{ik} in $| b^i{}_k |$, dan is bekend — mits $| a^+_{ik} | \neq 0$ —

$$a^+_{ik} = \frac{c_{ik}}{| a^+_{ik} |^{n-2}},$$

dus

$$a_{rs} = \frac{c_{rs}}{| a^+_{ik} |^{n-2}} \; (r \neq s), \; a_{rr} = -1 + \frac{c_{rr}}{| a^+_{ik} |^{n-2}}$$

Vermenigvuldigen wij de tellers van beide breuken met 2 b_{11} en de noemers met (a_{ik}^{+}), dan vinden wij

$$\left.\begin{aligned} a_{rs} &= \frac{2\,b_{11}\,c_{rs}}{|\,b_{ik}\,|}\ (r \neq s) \\ a_{rr} &= \frac{2\,b_{11}\,c_{rr}}{|\,b_{ik}\,|} - 1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4,2)$$

Daar c_{rs} en $|\,b_{ik}\,|$ polynomia van de graden $(n-1)$ en n in de b_{ik} zijn, is hierdoor elke a_{rs} homogeen en van den graad nul in $\frac{1}{2}n\,(n-1)+1$ parameters uitgedrukt; door het opgeven der homogeniteit kan dit aantal met 1 worden verminderd.

Dit geldt voor elke orthogonale matrix $\|\,a_{ik}\,\|$ mits $|\,a_{ik}^{+}\,| \neq 0$ [5])

§ 5. Omgekeerd: Is $\|\,b_{ik}\,\|$ een scheeve niet singuliere matrix, d.w.z. $b_{rs} = -b_{sr}$ $(r \neq s)$, en is $|\,b_{ik}\,| \neq 0$, terwijl bovendien alle hoofdelementen onderling gelijk zijn, dan wordt door (4, 2), waarin c_{rs} het algebraïsch complement van b_{rs} in $\|\,b_{ik}\,\|$ voorstelt, een orthogonale matrix bepaald met $|\,a_{ik}\,| = +1$ (zie Einführung p. 173 e.v.).

Opmerking. Het valt op, dat het verband tusschen de matrices $\|\,\mathbf{a}_{ik}^{+}\,\|$ en $\|\,b_{ik}\,\|$ in § 4 nauwer was dan tusschen de matrices, die hier in § 5 met dezelfde symbolen werden aangeduid. Immers in § 4 was b_{ik} het algebraïsch complement van a_{ik}^{+} in $|\,a_{ik}^{+}|$; in § 5 is dat in het algemeen niet het geval.

Dat het niet noodig is het verband tusschen $\|\,a_{ik}\,\|$ en $\|\,b_{ik}\,\|$ nauwer te leggen, dan in § 5 geschiedde, kan aldus worden verklaard.

In § 4 leidden wij de formule (4, 2) af, om uitgaande van $\|\,b_{ik}\,\|$, $\|\,a_{ik}\,\|$ terug te vinden. Nu zijn de tweede leden van (4, 2) homogeen en van den graad nul in b_{ik}. Dat beteekent, dat na vermenigvuldiging van alle b_{ik} met een zelfden factor toch (4, 2) dezelfde matrix $\|\,a_{ik}\,\|$ blijft aangeven. In § 5 was het mogelijk geweest aldus, d.w.z. door alle elementen van $\|\,b_{ik}\,\|$ met een zelfden factor te vermenigvuldigen, hetzelfde verband als in § 4 te leggen tusschen $\|\,b_{ik}\,\|$ en $\|\,a_{ik}\,\|$. Uit de gemaakte opmerking blijkt, dat dan toch dezelfde matrix $\|\,a_{ik}\,\|$ gevonden zou zijn. Dus was die vermenigvuldiging overbodig.

Opmerking. Zijn alle termen van den determinant $|\,b_{ik}\,|$ reëel, dan zijn ook die van den determinant $|\,a_{ik}\,|$ alle reëel, daar a_{rs} een rationale functie der b's is. Zijn omgekeerd alle termen van $|\,a_{ik}\,|$ reëel, dan zijn ook die van

[5]) De orthogonale matrices, die na vermeerdering van de termen der hoofddiagonaal met $+1$, een determinant leveren, die gelijk nul is, worden ook aangehaald door LIPSCHITZ, echter uit een geheel ander oogpunt. (R. LIPSCHITZ, Untersuchungen über die Summen von Quadraten; M. Cohen und Sohn, Bonn, 1886; een uitvoerig overzicht in Bull. d. Sc. Math., 2e Serie, T. x (1886, p. 163).) LIPSCHITZ behandelt de transformaties, die dezesommen invariant laten. De matrices, die bovengenoemde eigenschappen bezitten, leveren hierbij aanvankelijk moeilijkheid op. Hij bewijst dan dat men door de teekens van een even aantal kolommen van zoo'n matrix om te keeren steeds een nieuwe matrix kan doen ontstaan, die bruikbaar is.

$|b_{ik}|$ alle reëel of althans al hunne verhoudingen zijn dat, want de termen van $|b_{ik}|$ worden gevonden als cofactoren van die van $|a^+_{ik}|$ of zijn daarmee evenredig. Deze opmerking is later (§ 8) van belang.

§ 6. Uitgaande van een determinant

$$|b_{ik}| = \begin{vmatrix} b_{11}\, b_{12} \ldots b_{1n} \\ b_{21}\, b_{22} \ldots b_{2n} \\ b_{n1}\, b_{n2} \ldots b_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

waarin $b_{11} = b_{22} = \ldots = b_{nn}$ en $b_{rs} = -b_{sr}$ $(r \neq s)$, zal men dus door (4, 2) elken orthogonalen determinant $|a_{ik}|$ kunnen vinden, mits

$$|a^+_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11}+1 & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+1 & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn}+1 \end{vmatrix} \neq 0$$

De determinant a_{ik}, die niet aldus gevonden wordt, noemde ik reeds een uitzonderingsdeterminant. Voor dezen geldt $|a^+_{ik}| = 0$; het is echter niet zeker, dat een determinant $|a_{ik}|$, waarbij $|a^+_{ik}| = 0$, een uitzonderingsdeterminant is.

Nemen wij eerst $n = 2$. Uit

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \mu^2$$

vinden wij door (4, 2) de eenvoudige voorstelling der orthogonale matrix.

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2+\mu^2} & \dfrac{2\lambda\mu}{\lambda^2+\mu^2} \\[2ex] -\dfrac{2\lambda\mu}{\lambda^2+\mu^2} & \dfrac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2+\mu^2} \end{matrix} \right\| \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6,1)$$

Voor $n = 3$ vinden wij uit

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ -\mu & \lambda & \varrho \\ -\nu & -\varrho & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \varrho^2)$$

de elementen der orthogonale matrix uitgedrukt in vier homogene parameters op een wijze, die gewoonlijk naar EULER wordt genoemd.

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\lambda^2+\varrho^2-\mu^2-\nu^2}{S} & \dfrac{2(\mu\lambda-\nu\varrho)}{S} & \dfrac{2(\mu\varrho+\lambda\nu)}{S} \\[2ex] \dfrac{-2(\mu\lambda+\nu\varrho)}{S} & \dfrac{\lambda^2+\nu^2-\mu^2-\varrho^2}{S} & \dfrac{2(\lambda\varrho-\mu\nu)}{S} \\[2ex] \dfrac{2(\mu\varrho-\lambda\nu)}{S} & \dfrac{-2(\lambda\varrho+\mu\nu)}{S} & \dfrac{\lambda^2+\mu^2-\nu^2-\varrho^2}{S} \\[2ex] & S = \lambda^2+\mu^2+\nu^2+\varrho^2 & \end{matrix} \right\| \quad . \quad (6,2)$$

In de projectieve negendimensionale ruimte R_9 noemen wij negen der coördinaten a_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ en de tiende a_0. Wij beschouwen de variëteit V, wier vergelijkingen zijn

$$\sum_{k=1}^{3} a_{ik}\, a_{jk} \begin{cases} a_0^2\,(i=j) \\ 0\ \ (i \neq j) \end{cases} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6{,}3)$$

Zij wordt ook voorgesteld door

$$\left. \begin{array}{l} a_{11} = \lambda^2 + \varrho^2 - \mu^2 - \nu^2, \ a_{12} = 2(\mu\lambda - \nu\varrho), \ldots \ a_{33} = \lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 - \varrho^2 \\ \qquad\qquad a_0 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \varrho^2 \end{array} \right\} \quad (6{,}4)$$

Met elk punt, gegeven door deze parametervoorstelling, correspondeert een orthogonale matrix $\| a_{ik} \|$ met $| a_{ik} | = +1$, gegeven door

$$a_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_0}$$

behalve met die punten, waarvoor $a_0 = 0$, zonder dat alle a_{ik} gelijk nul zijn.

De vraag is nu, of (6, 4) alle punten van V geeft. Mogelijke limietpunten der parametervoorstelling kunnen wij vinden door elke a_{ik} gelijk nul te stellen. Hieruit volgt echter $\lambda = \mu = \nu = \varrho = 0$, d.w.z. de parametervoorstelling (6, 4) heeft geen limietpunten.

Daar nu (6, 4) elk punt der variëteit (6, 3) dadelijk geeft, worden ook alle orthogonale matrices $\| a_{ik} \|$ gevonden door de parametervoorstelling (6, 2).

Het is duidelijk, dat op dezelfde wijze wordt ingezien, dat de orthogonale matrices voor $n = 2$ uit (6, 1) worden aangegeven zonder uitzondering.

§ 7. Voor $n = 4$ gaan wij uit van de scheeve matrix

$$\left\| \begin{array}{cccc} \lambda & \mu & \nu & \pi \\ -\mu & \lambda & \varrho & \sigma \\ -\nu & -\varrho & \lambda & \tau \\ -\pi & -\sigma & -\tau & \lambda \end{array} \right\| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7{,}1)$$

Haar determinant is gelijk aan

$$N = \lambda^4 + (\mu^2 + \nu^2 + \pi^2 + \varrho^2 + \sigma^2 + \tau^2)\,\lambda^2 + \triangle^2,$$

$$\triangle = \mu\,\tau - \nu\,\sigma + \pi\,\varrho.$$

Wij veronderstellen

$$N \neq 0.$$

Dan vinden wij uit (7, 1) door toepassing van (4, 2) de orthogonale matrix $\| a_{ik} \|$ met $| a_{ik} | = +1$, waarvan hieronder de elementen volgen [6]:

---

[6]) Zie het proefschrift van Dr. LELYVELD.

(verder aan te geven door (7, 2)

$$a_{11} = \frac{\lambda^4 - (\mu^2 + \nu^2 + \pi^2 - \varrho^2 - \sigma^2 - \tau^2)\,\lambda^2 - \triangle^2}{N}$$

$$a_{22} = \frac{\lambda^4 - (\mu^2 - \nu^2 - \pi^2 + \varrho^2 + \sigma^2 - \tau^2)\,\lambda^2 - \triangle^2}{N}$$

$$a_{33} = \frac{\lambda^4 - (-\mu^2 + \nu^2 - \pi^2 + \varrho^2 - \sigma^2 + \tau^2)\,\lambda^2 - \triangle^2}{N}$$

$$a_{44} = \frac{\lambda^4 - (-\mu^2 - \nu^2 + \pi^2 - \varrho^2 + \sigma^2 + \tau^2)\,\lambda^2 - \triangle^2}{N}$$

$$a_{12} = \frac{2\,\lambda\,\{\mu\,\lambda^2 - (\nu\,\varrho + \pi\,\sigma)\,\lambda + \tau\,\triangle\}}{N}$$

$$a_{13} = \frac{2\,\lambda\,\{\nu\,\lambda^2 + (\mu\,\varrho - \pi\,\tau)\,\lambda - \sigma\,\triangle\}}{N}$$

$$a_{14} = \frac{2\,\lambda\,\{\pi\,\lambda^2 + (\mu\,\sigma + \nu\,\tau)\,\lambda + \varrho\,\triangle\}}{N}$$

$$a_{21} = \frac{-2\,\lambda\,\{\mu\,\lambda^2 + (\nu\,\varrho + \pi\,\sigma)\,\lambda + \tau\,\triangle\}}{N}$$

$$a_{23} = \frac{2\,\lambda\,\{\varrho\,\lambda^2 - (\mu\,\nu + \sigma\,\tau)\,\lambda + \pi\,\triangle\}}{N}$$

$$a_{24} = \frac{2\,\lambda\,\{\sigma\,\lambda^2 - (\mu\,\pi - \varrho\,\tau)\,\lambda - \nu\,\triangle\}}{N}$$

$$a_{31} = \frac{-2\,\lambda\,\{\nu\,\lambda^2 - (\mu\,\varrho - \pi\,\tau)\,\lambda - \sigma\,\triangle\}}{N}$$

$$a_{32} = \frac{-2\,\lambda\,\{\varrho\,\lambda^2 + (\mu\,\nu + \sigma\,\tau)\,\lambda + \pi\,\triangle\}}{N}$$

$$a_{34} = \frac{2\,\lambda\,\{\tau\,\lambda^2 - (\nu\,\pi + \varrho\,\sigma)\,\lambda + \mu\,\triangle\}}{N}$$

$$a_{41} = \frac{-2\,\lambda\,\{\pi\,\lambda^2 - (\mu\,\sigma + \nu\,\tau)\,\lambda + \varrho\,\triangle\}}{N}$$

$$a_{42} = \frac{-2\,\lambda\,\{\sigma\,\lambda^2 + (\mu\,\pi - \varrho\,\tau)\,\lambda - \nu\,\triangle\}}{N}$$

$$a_{43} = \frac{-2\,\lambda\,\{\tau\,\lambda^2 + (\nu\,\pi + \varrho\,\sigma)\,\lambda + \mu\,\triangle\}}{N}$$

Hierin is

$$\triangle = \mu\,\tau - \nu\,\sigma + \pi\,\varrho$$

$$N = \lambda^4 + (\mu^2 + \nu^2 + \pi^2 + \varrho^2 + \sigma^2 + \tau^2)^2\,\lambda^2 + \triangle^2$$

In de projectieve R_{16} noemen wij zestien der coördinaten a_{ik} $(i, k = 1, \ldots, 4)$ en de zeventiende a_0. Wij beschouwen de variëteit V, wier vergelijkingen zijn

$$\sum_{k=1}^{4} a_{ik}\, a_{jk} \genfrac{}{}{0pt}{}{\nearrow\, a_0^2\ (i=j)}{\searrow\, 0\ \ (i \neq j)}$$

Zij wordt ook voorgesteld door a_{ik} gelijk te stellen aan den teller van de breuk, die in (7, 2) gelijk aan a_{ik} is, dus

$$\left.\begin{array}{c} a_{11} = \lambda^4 - (\mu^2 + \nu^2 + \pi^2 - \varrho^2 - \sigma^2 - \tau^2)\,\lambda^2 - \Delta^2 \\ \text{enz. met} \\ a_0 = N \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (7,3)$$

Evenals in § 6 correspondeert met elk punt, door deze parametervoorstelling direct gegeven, een orthogonale matrix $\| a_{ik} \|$ met $|a_{ik}| = +1$, behalve met die punten, waarvoor $a_0 = 0$.

De vraag is nogmaals of (7, 3) alle punten van V geeft. Om dit te onderzoeken stellen wij weer alle a's gelijk nul, waarbij wij uit $a_{ik} = 0$ $(i \neq k)$ in de eerste plaats afleiden

$$a_{ik} \pm a_{ki} = 0.$$

Aan al deze vergelijkingen en aan

$$a_{ii} = 0$$

wordt dan voldaan door te stellen

$$\text{I}$$

$$\lambda = 0\ ,\ \Delta = 0$$

$$\text{of II}$$

$$\begin{array}{ll} \mu\,\lambda^2 + \tau\,\Delta = 0\ , & \nu\,\varrho + \pi\,\sigma = 0, \\ \nu\,\lambda^2 - \sigma\,\Delta = 0\ , & \mu\,\varrho - \pi\,\tau = 0, \\ \pi\,\lambda^2 + \varrho\,\Delta = 0\ , & \mu\,\sigma + \nu\,\tau = 0, \\ \varrho\,\lambda^2 + \pi\,\Delta = 0\ , & \mu\,\nu + \sigma\,\tau = 0, \\ \sigma\,\lambda^2 - \nu\,\Delta = 0\ , & \mu\,\pi - \varrho\,\tau = 0, \\ \tau\,\lambda^2 + \mu\,\Delta = 0\ , & \nu\,\pi + \varrho\,\sigma = 0, \end{array}$$

In geval I hebben wij dus aan (7, 3) toe te voegen

$$\lambda \to 0\ ,\ \Delta \to 0,$$

(als tevoren beschouwen wij $\lambda, \mu, \ldots, \tau$ als functies van een parameter u).

Wij stellen $\Delta = \lambda\omega$ (7, 4) en gaan de verhouding der a's na voor $\lambda \to 0$, waarbij lim ω eindig wordt verondersteld.

Hierdoor vinden wij de uitzonderingsdeterminanten met de elementen

$$a_{11} = \frac{-\mu^2 - \nu^2 - \pi^2 + \varrho^2 + \sigma^2 + \tau^2 - \omega^2}{N_0}$$

$$a_{22} = \frac{-\mu^2 + \nu^2 + \pi^2 - \varrho^2 - \sigma^2 + \tau^2 - \omega^2}{N_0}$$

$$a_{33} = \frac{\mu^2 - \nu^2 + \pi^2 - \varrho^2 + \sigma^2 - \tau^2 - \omega^2}{N_0}$$

$$a_{44} = \frac{\mu^2 + \nu^2 - \pi^2 + \varrho^2 - \sigma^2 - \tau^2 - \omega^2}{N_0}$$

$$a_{12} = \frac{-2(\nu\varrho + \pi\sigma - \tau\omega)}{N_0} \qquad a_{21} = \frac{-2(\nu\varrho + \pi\sigma + \tau\omega)}{N_0}$$

$$a_{13} = \frac{2(\mu\varrho - \pi\tau - \sigma\omega)}{N_0} \qquad a_{31} = \frac{2(\mu\varrho - \pi\tau + \sigma\omega)}{N_0}$$

$$a_{14} + \frac{2(\mu\sigma + \nu\tau + \varrho\omega)}{N_0} \qquad a_{41} = \frac{2(\mu\sigma + \nu\tau - \varrho\omega)}{N_0}$$

$$a_{23} = \frac{-2(\mu\nu + \sigma\tau - \pi\omega)}{N_0} \qquad a_{32} = \frac{-2(\mu\nu + \sigma\tau + \pi\omega)}{N_0}$$

$$a_{24} = \frac{-2(\mu\pi - \varrho\tau + \nu\omega)}{N_0} \qquad a_{42} = \frac{-2(\mu\pi - \varrho\tau - \nu\omega)}{N_0}$$

$$a_{34} = \frac{-2(\nu\pi + \varrho\sigma - \mu\omega)}{N_0} \qquad a_{43} = \frac{-2(\nu\pi + \varrho\sigma + \mu\omega)}{N_0}$$

$$N_0 = \mu^2 + \nu^2 + \pi^2 + \varrho^2 + \sigma^2 + \tau^2 + \omega^2$$

$$(\mu\tau - \nu\sigma + \pi\varrho = 0)$$

Hierbij werd lim ω eindig verondersteld. Ter aanvulling kan men nog (7, 4) vervangen door

$$\lambda = \omega^+ \Delta$$

en onderstellen

$$\lim . \omega^+ = 0.$$

Men vindt dan geen nieuwe uitzonderingsdeterminanten.

§ 8. In geval II vinden wij, waneer wij de oplossing

$$\lambda = \mu = \nu = \pi = \varrho = \sigma = \tau = 0$$

niet meetellen

$$\left.\begin{array}{l} \mu = \tau, \ \nu = -\sigma, \ \pi = \varrho \\ (\text{of } \mu = -\tau, \ \nu = \sigma, \ \pi = -\varrho) \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \varrho^2 = 0 \end{array}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (8,1)$$

Wij moeten dus μ en τ tot eenzelfde limiet laten naderen, eveneens ν en σ, ook π en ϱ, verder nog stellen

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \varrho^2 = 0;$$

dan vinden wij de verdere limietpunten van V bij deze parametervoorstelling.

Nu rijst de vraag: *wanneer wij ons willen beperken tot de bestaanbare limietpunten, mogen wij dan concludeeren: hieruit worden geen limietpunten gevonden, daar aan* (8, 1) *geen reëele waarden van* $\lambda, \ldots \tau$ *voldoen, behalve*

$$\lambda = \mu = \ldots \tau = 0?$$

Het is duidelijk, dat deze conclusie bij een willekeurige variëteit onjuist zou zijn, daar deze zeer wel bestaanbare punten kan bezitten, die alleen langs complexen weg bereikbaar zijn (b.v. een isoleerpunt van een algebraïsche kromme). Wij zullen hierna bewijzen, dat dit gevaar bij onze variëteit V niet te duchten is. Maar een tweede vraag doet zich terzelfder tijd voor.

Is het mogelijk, dat op onze variëteit V reëele punten voorkomen, die niet door uitsluitend reëele parameterwaarden $\lambda, \ldots \tau$ kunnen worden aangegeven?

Op deze laatste vraag antwoorden wij het eerst. Een reëel punt op V wordt aangegeven door reëele coördinaten a_{ik}. Nu is reeds bewezen — zie de opmerking aan het slot van § 5 —, dat de hierbij behoorende parameterwaarden reëel zijn of dat tenminste hunne verhoudingen dat zijn, daar ze gelijk zijn aan, of evenredig met, de cofactoren van a_{ik}.

Nu blijft dus nog te antwoorden op de eerste vraag: kan elk reëel punt van V als limietpunt gevonden worden?

Er is een correspondentie één aan één tusschen elk reëel punt van V en een orthogonale determinant met reëele termen (de coördinaten van dat punt) en daardoor met den stand van een reëel rechthoekig assenstelsel in de vierdimensionale Euclidische ruimte. Nu kan elke stand van dit assenstelsel uit elken anderen langs reëelen weg bereikt worden; dus geldt ook voor de punten van V, dat elk langs reëelen weg bereikt kan worden.

Ons uitgangspunt was: er worden reëele punten gezocht door te stellen

$$\mu - \tau \to 0, \ \nu + \sigma \to 0, \ \pi - \varrho \to 0$$

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \varrho^2 \to 0.$$

Nu is het duidelijk, dat aan den laatsten eisch slechts voldaan kan worden door van λ, μ, ν, ϱ minstens één langs complexen weg tot zijn limiet te laten naderen, daar het geen zin heeft alle homogene voorkomende parameters tot nul te laten naderen. Maar daaruit blijkt dan, dat er behalve de reeds gevondene bij deze parametervoorstelling geen limietpunten op V zijn.

§ 9. Een enkel woord over de meetkundige beteekenis van de matrices $\| a_{ik} \|$, die de uitzonderingsdeterminanten $| a_{ik} |$ leveren. Daarvoor geldt $| a^{+}_{ik} | = 0$, d.w.z. de karakteristieke vergelijking heeft een wortel -1. Bij een orthogonale transformatie zijn de wortels van deze vergelijking invariant.

Nu kunnen wij elke beweging in R_4 door een orthogonale transformatie herleiden tot twee draaiinge om onderling absoluut-loodrechte vlakken. Het is nu dadelijk zichtbaar, dat een wortel van de hierbij behoorende karakteristieke vergelijking gelijk is aan -1, dan en slechts dan, als de hoek van een dezer draaiingen gelijk π is. Hierdoor is dus elke matrix $\| a_{ik} \|$, waarbij $| a^{+}_{ik} \| = 0$, gekarakteriseerd. Wij zagen, dat zoo'n matrix niet *steeds* een uitzonderingsdeterminant levert; op de vraag, wanneer dat wel of niet gebeurt, gaan wij thans niet in.