Mathematics. — *Sur les espaces linéaires normés.* I. By A. F. MONNA. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of October 26, 1946.)

I. *Classification des espaces.*

§ 1. Soit E un espace linéaire dont les coefficients appartiennent à un corps K. Préalablement on ne suppose de K qu'il soit commutatif; on ne suppose pas que les éléments de K soient des nombres réels. Soit E un espace métrique et, en désignant par θ l'élément unique de E tel que $x+\theta=\theta+x=x$ pour tout x en E, supposons que la distance (x, y) de x et y en E vérifie la relation

$$(x, y)=(x-y, \theta)=\|x-y\|. \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

(x, y) est réel.

Comme on sait, on appelle un pareil espace E *normé* si l'on a pour tout x en E et a en K

$$\|a x\|=|a| \cdot \|x\|. \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Cependant la relation (2) n'a que de sens que si l'on impose à K une condition de plus: il faut qu'une valuation sur K soit donnée. Remarquons que la relation $\| ax \| = a \,.\, \| x \|$ n'a aucun sens, même si K est le corps des nombres réels (en effet $\| ax \|$ et $\| x \|$ sont tous les deux $\geqq 0$).

Dans tout ce qui suit nous supposons donc que sur le corps K est donnée une valuation, dont les valeurs sont des nombres réels.

Les espaces que nous allons considérer satisfassent tous à (1) et (2).

Soit désigné par N_K l'ensemble des valeurs $|a|$ des éléments a de K; soit N_E l'ensemble des normes $\| x \|$ des éléments x de E.

N_K se compose d'un groupe multiplicatif de nombres >0 et du nombre 0. En effet si α et β appartiennent à N_K, ils existent des éléments a et b de K avec $|a|=\alpha$, $|b|=\beta$; alors $|ab|=\alpha\beta$ et, si $\beta \neq 0$, $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{\alpha}{\beta}$ de sorte que $\alpha\beta$ et $\frac{\alpha}{\beta}$ appartiennent à N_K. A ce propos on ne peut rien dire de N_E.

Pour autant que je sais on n'a considéré que le cas où on a

$$N_E \subset N_K. \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Cette condition implique qu'on peut normer chaque vecteur de E: étant donné le vecteur x, on a $\| x \| \in N_K$ et il existe donc un élément a de K tel que $|a| = \| x \|$. On a alors

$$\left\|\frac{x}{a}\right\|=\frac{\|x\|}{|a|}=1.$$

Sans cette condition ceci n'est pas toujours possible.

Dans ce qui suit on ne suppose pas (3), *à moins que cela est expressément indiqué.*

On peut distinguer deux cas:

A. La valuation de K est archimédienne.

En vertu d'un théorème connu, K est alors isomorphe à un corps à valuation absolue composé de nombres réels ou complexes.

Les espaces, résultants du cas où K est identique au corps des nombres réels ou complexes, ont été déjà amplement traités. Pour autant que je sais on n'a pas étudié le cas où K est un vrai sous-corps des dits corps. Il donne lieu à des difficultés auxquelles nous viendrons plus tard.

B. La valuation de K est non-archimédienne.

Supposons qu'il n'existe aucun couple x et y de E avec x et $y \neq \theta$ tel que

$$\|x+y\| \leqq \max(\|x\|, \|y\|).$$

Alors on aurait pour tout x et $y \neq \theta$

$$\max(\|x\|, \|y\|) < \|x+y\| \leqq \|x\| + \|y\|.$$

En particulier

$$\|x\| = \max(\|x\|, \|x\|) < \|2x\| = |2| \cdot \|x\|,$$

donc puisque $\|x\| \neq 0$,

$$1 < |2|.$$

Plus général $1 < |n|$. Alors la valuation de K serait archimédienne: contradiction.

La supposition B conduit donc à deux cas:

1. pour *tout* x et y de E on a

$$\|x+y\| \leqq \max(\|x\|, \|y\|).$$

2. ils existent des couples x et y de E avec x, $y \neq \theta$ tels que

$$\|x+y\| \leqq \max(\|x\|, \|y\|).$$

Les espaces du cas $B1$ seront appelés *totalement-non-archimédiens*. Au cas $B2$ nous parlons des espaces *semi-non-archimédiens*.

Remarques. 1. Si pour tout x, y de E on a $\|x+y\| \leqq \max(\|x\|, \|y\|)$, la valuation de K est non-archimédienne. En effet, on a

$$\|nx\| = |n| \,.\, \|x\| \leqq \|x\| \text{ donc } |n| \leqq 1.$$

Ceci justifie le nom totalement-non-archimédien.

2. Dans les cas $B1$ et $B2$ on peut immédiatement indiquer des couples qui vérifient l'inégalité triangulaire rigoureuse, p. ex. le couple x, x:

$$\|x+x\| = \|2x\| = |2| \cdot \|x\| \leqq \|x\|.$$

3. Même au cas A ils existent de tels couples; par exemple les vecteurs x et y tels que

$$\|x+y\| = \|y\|, \qquad \|x\| \geqq \|y\|,$$

donc dans un espace euclidien les triangles à côtés égaux et dont la troisième côté est plus petite.

4. Supposons a) E lui-même est un corps b) $\| xy \| = \| x \| \cdot \| y \|$ c) la valuation de K est non-archimédienne. Alors E est totalement-non-archimédien. On peut suivre une marche de démonstration de V. D. WAERDEN [1]).

5. Il serait désirable d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour discerner entre les cas $B1$ et $B2$ et entre A et $B2$.

6. Pour les espaces du type A voir le livre connu de BANACH [2]).

7. J'ai donné un exemple d'un espace semi-non-archimédien dans l'article $M1$: Over een lineaire P-adische ruimte, Proc. Nederl. akad. v. Wetensch. 52, 74—82 (1943).

J'ai commencé à étudier les espaces totalement-non-archimédiens pour lesquels $N_E \subset N_K$ dans les articles:

$M2$: Over niet-archimedische lineaire ruimten, idem 52, 308—321 (1943),

$M3$: Lineaire functionaalvergelijkingen in niet-archimedische Banachruimten, idem 52, 654—661 (1943),

$M4$: Over geordende groepen en lineaire ruimten, idem 53, 178—182 (1944).

Un résultat de $M2$ sera corrigé ci-après [3]).

Dans ce qui suit nous traitons principalement les espaces totalement-non-archimédiens, cependant sans la condition supplémentaire (3).

II. *Propriétés topologiques des espaces linéaires totalement-non-archimédiens.*

§ 2.

Théorème 1. *Chaque espace linéaire totalement-non-archimédien est de dimension* 0.

Démonstration. Il suit de l'inégalité triangulaire rigoureuse que chaque ε-voisinage fermé d'un point arbitraire x_0 de E: $\| x - x_0 \| \leqq \varepsilon$ est ouvert, d'où résulte le théorème.

Dans ce qui suit nous étudions les propriétés des espaces totalement-non-archimédiens localement compacts. *Nous supposons que la valuation de K est non-triviale.* Il sera mentionné expressément si la démonstration d'un théorème reste vraie si la valuation est triviale. Plus tard nous ferons quelques remarques à propos du cas de la valuation triviale.

---

1) B. L. V. D. WAERDEN, Moderne algebra I. p. 248 (Berlin 1937).

2) S. BANACH, Théorie des opérations linéaires (Warszawa 1932).

3) Dans M 2 et M 3 je suis parti d'un groupe ordonné multiplicatif abélien P, complété d'un élément 0, vérifiant d'ailleurs quelques autres axiomes. Cependant j'ai montré dans M 4 que ceci ne présente pas une généralisation par rapport au cas où N_K consiste de nombres réels.

Théorème 2. *L'espace linéaire totalement-non-archimédien* [4]) E *est supposé localement compact. On a les propriétés suivantes:*

1. *l'ensemble* N_E *a* 0 *comme seul point d'accumulation;*
2. *le corps* K *est localement-totalement-borné;*
3. E *est complet;*
4. *soit* $C \in N_E$*; alors* E *ne contient qu'un nombre fini d'éléments* $e_i (1 \leqq i \leqq n)$ *tels que*

$$\| e_i \| = C \; (i = 1, \ldots, n), \qquad \| e_i - e_j \| = C \; (i \neq j).$$

Démonstration. 1. D'abord on a: si $\{ x_n \}$ est une suite convergente, alors ou $\lim\limits_{n \to \infty} \| x_n \| = 0$ ou $\| x_n \| =$ const. pour presque tout n. En effet, si $\lim x_n = x$ et $\lim \| x_n \| \neq 0$, on a

$$\| x_n \| = \| x_n - x + x \| = \max (\| x - x_n \|, \| x \|) = \| x \|$$

pour toutes les valeurs de $n > N$ telles que $\| x - x_n \| < \| x \|$.

Puisque E est localement compact il existe une sphère compacte B: $\| x \| \leqq \varepsilon$. Soit B_1 la sphère $\| x \| \leqq \varepsilon_1$. La valuation de K n'étant pas triviale, il existe un élément a de K tel que $| a | \leqq \varepsilon / \varepsilon_1$. Pour tout ax avec $x \in B_1$ on a $\| ax \| \leqq \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \varepsilon_1 = \varepsilon$, donc $ax \in B$. B_1 est donc compact et, plus général, il en résulte que chaque ensemble fermé borné est compact.

Soit ensuite V un ensemble compact et donc borné de E, N_V l'ensemble des normes $\| x \|$ pour $x \in V$. Alors ou $0 \in \overline{N}_V$ ou bien N_V est fini. En effet, supposons que $a \neq 0$ est un point d'accumulation de N_V, $a_i \to a$, $a_i \in N_V$, $a_i \neq a$ et $\{ x_i \}$ une suite de points de V avec $\| x_i \| = a_i \to a$, alors en vertu de la compacité de V il existerait une suite partielle $\{ x_{i'} \}$ avec la limite x telle que $\| x_{i'} \| = a_{i'} \to a = \| x \|$, en contradiction avec la propriété du premier alinéa.

Il résulte de ce qui précède que seulement 0 peut être un point d'accumulation de N_E; 0 est certainement point d'accumulation puisque N_K et donc N_E contiennent des nombres arbitrairement petits.

2. Il y a équivalence métrique (au facteur $\| x_0 \|$ près) entre le corps K et l'ensemble ax_0 pour a dans K et x_0 fixé. Comme sous-ensemble de E ce dernier ensemble est localement totalement borné; donc K possède cette propriété.

3. Parmi les espaces métriques on peut caractériser les espaces complets par la propriété suivante: toute suite $B_1 \supset B_2 \supset \ldots\ldots$ de sphères dont les

[4]) Supposons que l'espace E est archimédien (le cas A de la partie I) et localement compact. On montre, comme au cas totalement-non-archimédien, que E est complet; nous verrons (§ 5), qu'on peut alors supposer, sans restreindre la généralité, que K est complet. En ce cas K est un corps de nombres réels ou complexes, et en nous bornant au cas de nombres réels, K est identique au corps des nombres réels. Ce cas a été déjà traité par BANACH l.c. 2).

diamètres convergent vers 0 possède une intersection $B_1 B_2 \ldots\ldots$ non vide. En utilisant cette propriété, la propriété 3 devient triviale lorsqu'on remarque que chaque sphère B est compacte (on fait usage du fait que la valuation est non triviale; voir 1).

4. Supposons qu'il existe une infinité dénombrable d'éléments e_i tels que $\| e_i \| = C$, $\| e_i - e_j \| = C$ $(i \neq j)$. Soient U_ε le voisinage $\| x \| \leqq \varepsilon$ de θ et a un élément de K avec $0 < | a | < \frac{\varepsilon}{C}$. Un tel élément existe puisque la valuation de K est non triviale.

L'ensemble V des éléments ae_1, $ae_2, \ldots$ est contenu dans U_ε puisque

$$\| a e_i \| = | a | \cdot \| e_i \| \leqq \frac{\varepsilon}{C} C = \varepsilon.$$

De plus

$$\| a e_i - a e_j \| = | a | \cdot \| e_i - e_j \| = | a | \cdot C.$$

Il s'ensuit que V n'admet pas de point d'accumulation, en contradiction avec la compacité locale de E.

Le théorème est ainsi démontré.

Conséquences. 1. Il suit de la propriété 1 que la valuation de K est discrète. Autrement N_K serait partout dense. En considérant les points ax de E (x fixé, a parcourt K), on voit que N_E serait alors partout dense aussi.

2. On tire de la propriété 4 qu'il n'existe qu'un nombre fini d'éléments a_i de K tels que $| a_i | = 1$, $| a_i - a_j | = 1$ $(i \neq j)$. C'est aussi une conséquence de 2. En effet, le plus petit corps complet contenant K est localement compact et pour ces corps la propriété est déjà connue [5]). Il suffit alors de remarquer que l'ensemble N_E ne change pas si l'on passe de K au dit corps complet (comparer le début de la démonstration de la propriété 1).

4. La propriété 1 du théorème 2 s'étend aux espaces totalement-non-archimédiens localement-totalement-bornés car N_E ne change pas si l'on passe de E à l'espace complet le plus petit contenant E, qui est localement compact donc vérifie 1°. J'ai montré ailleurs que N_E est dénombrable pour les espaces totalement-non-archimédiens séparables [6]).

---

[5]) F. LOONSTRA, Im Kleinen kompakte nichtarchimedisch bewertete Körper. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 45, 665—668 (1942).

J. DE GROOT und F. LOONSTRA, Topologische Eigenschaften bewerteter Körper. Idem p. 658—664.

[6]) Sur l'approximation de fonctions abstraites, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 49, 404—408 (1946).

Remarquons qu'un espace, dont N_E a 0 comme seul point d'accumulation, est semi-non-archimédien ou totalement-non-archimédien.

§ 3. Le but de ce paragraphe sera de montrer une inversion du théorème 2. Rappelons que la valuation de K est discrète si N_E admet 0 comme seul point d'accumulation. Alors N_K consiste des nombres

$$\varrho^n \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

si ϱ est un nombre > 1. Dans tout ce qui suit ϱ a partout cette signification. Sans mention contraire la valuation de K est supposée non-triviale.

Théorème 3. *Soit E un espace linéaire totalement-non-archimédien dont N_E n'admet pas d'autre point d'accumulation que 0. Soit L un sous-espace linéaire fermé de E; $L \neq E$. Soit $C \in N_E$; $C \neq 0$. Alors $E - L$ contient un élément x_0 tel que*

$$C \leqq \|x_0\| \leqq C\varrho$$

$$\|x_0 - x\| \geqq \|x_0\| \text{ pour tout } x \in L.$$

Démonstration. Soient $y \in E - L$ et d la plus petite distance de y à L, c. à d. la borne inférieure des nombres $\|y - x\|$ pour $x \in L$; $d \neq 0$ puisque L est fermé. N_E n'admettant pas d'autre point d'accumulation que 0, il existe en L un point x' où la plus petite distance est atteinte. On a donc

$$\|y - x'\| \leqq \|y - x\| \text{ pour tout } x \in L.$$

Posons $y - x' = z$. Alors $\|z\| = d$ et $\|z + x' - x\| \geqq d$. Puisque $x' - x \in L$, donc

$$\|z - x\| \geqq d \text{ pour } x \in L.$$

Soit alors a un élément de K tel que

$$\frac{C}{d} \leqq |a| \leqq \frac{C}{d}\varrho.$$

Un pareil élément existe. En effet, soit $\alpha \in N_K$ le plus petit des nombres $\geqq \frac{C}{d}$ de N_K. On a $\alpha \geqq \frac{C}{d}$ et $\frac{\alpha}{\varrho} < \frac{C}{d}$, donc $\alpha < \frac{C}{d}\varrho$. On voit que chaque élément a avec $|a| = \alpha$ satisfait. Posons alors $x_0 = az$. On a

$$\|x_0\| = |a| \cdot \|z\|,$$

donc

$$C \leqq \|x_0\| \leqq C\varrho.$$

De plus $\|az - ax\| \geqq |a|\, d = |a|\ \|z\| = x_0$ et puisque $ax \in L$,

$$\|x_0 - x\| \geqq \|x_0\|.$$

Remarques. 1. Si l'on suppose $N_E \subset N_K$ on peut déterminer le vecteur x_0 tel que $\|x_0\| = C$, puisqu'alors $\frac{C}{d} \in N_K$.

2. Comparer ce théorème avec le théorème correspondant de RIESZ (voir BANACH, l.c. 2) p. 83).

Théorème 4. *Soit E un espace linéaire totalement-non-archimédien dont N_E n'admet autre point d'accumulation que 0. Soit K complet.*
Alors pour tout r entier l'espace linéaire, formé des points

$$L_r \ldots x = a_1 x_1 + \ldots + a_r x_r$$

où a_i parcourt K et où les x_i sont des points fixés, est fermé.

Démonstration. Puisque K est complet, l'espace L_1 est fermé. Supposons que L_{r-1} est fermé et montrons que L_r est fermé. L_r consiste des points

$$x = y + a x_r$$

où $y \in L_{r-1}$, $a \in K$, x_r pas dans L_{r-1}. Soit $L_r^{(1)}$ la variété $y + x_r$ $(y \in L_{r-1})$; $L_r^{(1)}$ est fermé. Soit z un point d'accumulation de $L_r^{(1)}$. Il existe une suite $y_n + x_r \to z$ $(n \to \infty)$. Donc $y_n \to z - x_r$. Puisque $y_n \in L_{r-1}$ et L_{r-1} est fermé, on a $z - x_r \in L_{r-1}$, donc $z - x_r = y$ ou $z = y + x_r$, q.e.d. θ n'est pas dans $L_r^{(1)}$ et a donc une plus petite distance $\neq 0$ à $L_r^{(1)}$. Puisque N_E n'admet pas d'autres points d'accumulation que 0, il y a des points dans $L_r^{(1)}$ où cette plus petite distance à θ est atteinte. Soit $\bar{x}_r$ un tel point. Alors

$$\bar{x}_r = y_0 + x_r \qquad (y_0 \in L_{r-1})$$

$$\|\bar{x}_r\| \leqq \|y + x_r\| \text{ pour tout } y \in L_{r-1}, \text{ donc } y + x_r \in L_r^{(1)}.$$

$L_r^{(1)}$ est identique à l'ensemble des points $y + \bar{x}_r$ $(y \in L_{r-1})$. En effet, si $u = y + x_r$, $u \in L_r^{(1)}$, on a $u = y + \bar{x}_r - y_0 = y - y_0 + \bar{x}_r$. Or, y et y_0 sont dans L_{r-1}, donc $y - y_0$ dans L_{r-1}, de sorte que u appartient à $y + \bar{x}_r$. Même démonstration pour la propriété inverse. On montre de la même façon que L_r est identique à l'ensemble $y + a\bar{x}_r$. On a maintenant

$$\|\bar{x}_r\| \leqq \|y + \bar{x}_r\|$$

et

$$\|a\bar{x}_r\| \leqq \|ay + a\bar{x}_r\|$$

pour chaque y en L_{r-1} et a en K. Puisque ay parcourt tout L_{r-1}, on a

$$\|a\bar{x}_r\| \leqq \|y + a\bar{x}_r\|.$$

De l'inégalité

$$\|y + a\bar{x}_r\| \leqq \max(\|y\|, \|a\bar{x}_r\|)$$

on obtient

$$\|y + a\bar{x}_r\| = \max(\|y\|, \|a\bar{x}_r\|),$$

valable pour tout y en L_{r-1} et a en K.

Soit alors z un point d'accumulation de L_r. Il existe donc une suite $y_n + a_n\bar{x}_r \to z$ c. à d.

$$\|y_n - y_m + (a_n - a_m)\bar{x}_r\| \leqq \varepsilon \text{ pour } n \text{ et } m > N(\varepsilon).$$

On a en vertu de ce qui précède

$$\| y_n - y_m + (a_n - a_m)\bar{x}_r \| = \max(\| y_n - y_m \|, \| (a_n - a_m)\bar{x}_r \|)$$

donc

$$\| (a_n - a_m)\bar{x}_r \| \leqq \varepsilon \text{ pour } n \text{ et } m > N.$$

$\{a_n\}$ est donc une suite fondamentale et, K étant complet, elle a une limite a. Alors

$$\| y_n - (z - a\bar{x}_r) \| = \| y_n - z + a\bar{x}_r - a_n\bar{x}_r + a_n\bar{x}_r \| \leqq$$
$$\leqq \max(\| y_n + a_n\bar{x}_r - z \|, |a - a_n| \, \|\bar{x}_r\|) \leqq \varepsilon$$

de sorte que $\lim y_n$ existe et vaut $z - a\bar{x}_r$. Puisque y_n est dans L_{r-1} et L_{r-1} est fermé, cette limite y est dans L_{r-1}; donc $z = y + a\bar{x}_r$. q.e.d.

Théorème 5. *Mêmes suppositions que dans le théorème 4. Supposons de plus que pour tout $C \in N_E$ il n'existe en E qu'un nombre fini d'éléments e_i tels que*

$$\left.\begin{array}{ll} C \leqq \| e_i \| \leqq C\varrho & \\ C \leqq \| e_i - e_j \| \leqq C\varrho & (i \neq j). \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Alors il existe en E un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_r$ tels que chaque x de E peut s'écrire dans la forme

$$x = a_1 x_1 + \ldots + a_r x_r$$

où a_i parcourt K $(i = 1, \ldots, r)$.

Démonstration. Supposons que le théorème n'est pas vrai. Soit $C \in N_E$; $C \neq 0$. Supposons qu'on a déjà déterminé r points $x_1, \ldots, x_r$ linéairement indépendants de E tels que

$$\begin{array}{ll} C \leqq \| x_i \| \leqq C\varrho & (i = 1, \ldots, r) \\ C \leqq \| x_i - x_j \| \leqq C\varrho & (i \neq j) \end{array}$$

Soit L_r l'espace linéaire des points

$$x = a_1 x_1 + \ldots + a_r x_r \qquad (a_i \in K).$$

En vertu du théorème précédent L_r est fermé et le théorème 5 étant supposé faux $L_r \neq E$. Le théorème 3 assure donc l'existence en $E - L_r$ d'un point x_{r+1} tel que

$$C \leqq \| x_{r+1} \| \leqq C\varrho$$
$$\| x_{r+1} - x \| \geqq \| x_{r+1} \| \text{ pour tout } x \in L_r.$$

En particulier pour $i = 1, \ldots, r$

$$\| x_{r+1} - x_i \| \geqq \| x_{r+1} \| \geqq C.$$

Or

$$\| x_{r+1} - x_i \| \leqq \max(\| x_{r+1} \|, \| x_i \|) \leqq C\varrho.$$

Donc

$$C \leqq \| x_{r+1} - x_i \| \leqq C\varrho.$$

A partir du système $\{ x_i \}$ $(i = 1, \dots, r)$ à propriétés (4) nous avons ainsi obtenu un système de $r+1$ points avec les propriétés (4). D'après la supposition $L_r \neq E$ pour chaque valeur de r. On obtient donc une suite infinie $x_1, x_2, \dots$ avec les propriétés (4); contradiction.

A côté de l'espace du théorème précédent considérons maintenant l'espace K^r dont les éléments sont les suites $y = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ où $a_i \in K$ et où $(a_1, a_2, \dots, a_r) \neq (b_1, \dots, b_r)$ s'il y a une valeur de i telle que $a_i \neq b_i$. En supposant que la valuation de K est discrète, ce qui est vrai au théorème 5, cet espace devient un espace linéaire normé totalement-non-archimédien si l'on pose

$$\| y \| = \max_{1 \leqq i \leqq r} | a_i |.$$

Bien entendu, l'addition et la multiplication par les constantes de K sont définies de la manière ordinaire.

Considérons encore l'espace E du théorème 5 et *supposons de plus que cet espace est complet*. L'espace K^r précédent sera celui où K est le corps des coefficients de E. En faisant correspondre le point

$$x = a_1 x_1 + \dots + a_r x_r$$

de l'espace E (en vertu du théorème 5 chaque point de E admet une telle représentation unique) au point $(a_1, \dots, a_r)$ de K^r, on obtient une représentation biunivoque, additive et homogène de E sur K^r tout entier. Il suit de $\| x \| \leqq \max \| a_i x_i \|$ que cette transformation de K^r en E est continue. E et K, et donc K^r, étant complets, il suit du théorème 14 de la troisième partie, dont la démonstration sera indépendante des présents théorèmes, que cette transformation est alors bicontinue (donc une homéomorphie). Remarquons maintenant que K, et donc K^r, est localement compact (voir la note 5). On en tire que E est localement compact. Nous avons ainsi obtenu le théorème suivant:

Théorème 6. *Soit E un espace linéaire totalement-non-archimédien satisfaisant à:*

1. *N_E admet le point 0 comme seul point d'accumulation;*
2. *le corps K des coefficients est complet;*
3. *E est complet;*
4. *pour tout $C \in N_E$ il n'existe en E qu'un nombre fini d'éléments e_i tels que*

$$C \leqq \| e_i \| \leqq C_\varrho$$
$$C \leqq \| e_i - e_j \| \leqq C\varrho \qquad (i \neq j).$$

Alors E est localement compact.

Ce théorème est l'inversion du théorème 2. Bien entendu, la condition 4 est plus grave que la propriété 4 de ce théorème. Cependant, cette condition plus grave est aussi nécessaire pour les espaces localement compacts (même démonstration qu'auparavant). Le théorème 5 s'applique donc aux espaces localement compacts de sorte que les points d'un pareil espace puissent s'écrire dans la forme

$$x = a_1 x_1 + \ldots + a_r x_r.$$

Nous avons déjà remarqué que K est localement compact. On trouve les formes possibles de ces corps l.c. 4). A un point près — l'image du point à l'infini au moyen duquel K peut être compacticé — le corps K est homéomorphe à l'ensemble parfait non-dense de CANTOR. L'espace E lui-même est, à un point près, homéomorphe au produit topologique d'un nombre r de tels ensembles de CANTOR: c'est une caractérisation topologique des espaces totalement-non-archimédiens localement compacts.

Il est possible d'introduire dans les espaces totalement-non-archimédiens localement compacts une métrique telle que la condition $N_E \subset N_K$ du § 1 est vérifiée. Si, en effet $x = a_1 x_1 + \ldots + a_r x_r$, il suffit de poser

$$\|x\| = \max |a_i|.$$

On voit que les conditions auxquelles une norme doit satisfaire, sont vérifiées (remarquer que la représentation de x est unique). On a même $N_E \equiv N_K$.

Une métrique satisfaisant à $N_E \subset N_K$ ayant été introduite en E, la remarque 1 après le théorème 3 et la démonstration du théorème 5 font voir qu'on peut trouver r points $x_1, \ldots, x_r$ en E satisfaisant à

$$\|x_i\| = C \qquad (i = 1, \ldots, r;\ C \in N_E;\ C \neq 0),$$
$$\|x_i - x_j\| = C \quad (i \neq j),$$

tel que chaque point x de E peut s'écrire d'une façon unique dans la forme

$$x = a_1 x_1 + \ldots + a_r x_r.$$

Cela nous permet de définir en E une notion d'*indice*. Rappelons d'abord la notion d'indice du corps K. En vertu de la valuation non-archimédienne de K l'ensemble des éléments $|a| < 1$ de K et celui des éléments $|a| \leqq 1$ constituent un groupe additif. Les éléments $|a| \leqq 1$ se partagent en un nombre de classes modulo $|a| < 1$. La supposition que K soit localement compact entraîne que ce nombre est fini. En effet, si ce nombre était infini et si $a_1, a_2, \ldots$ désignaient les représentants d'une infinité de classes différentes entre eux et différentes de la classe-zéro, on aurait

$$|a_i| = 1, \ |a_i - a_j| = 1 \qquad (i \neq j)$$

en contradiction avec la compacité locale. Soit K_0 ce système fini de classes. K_0 est un corps fini puisque de $|a| = 1$, $|b| = 1$ il résulte $|ab| = 1$, $\left|\frac{a}{b}\right| = 1$.

En partant d'un nombre $C \in N_K$ on trouve de la même façon un système fini de classes dans le groupe $|a| \leqq C$. On trouve le même nombre de classes puisque de l'existence d'un système a_i $(i = 1, \ldots, n)$ avec $|a_i| = 1$, $|a_i - a_j| = 1$ $(i \neq j)$ il résulte celle d'un système $\bar{a}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ avec $|\bar{a}_i| = C$, $|a_i - a_j| = C$ $(i \neq j)$ pour chaque $C \in N_K$ et inversement. Ce nombre est appelé l'*indice du corps K*.

Dans un espace localement compact on trouve par la même voie, grâce aux théorèmes précédents, un nombre fini de classes en partant d'un nombre $C \in N_E$; les ensembles des points $\| x \| \leqq C$ et $\| x \| < C$ constituent des groupes additifs. Cependant la méthode précédente ne s'applique plus pour montrer que ce nombre ne dépend pas du nombre C, puisque si $C' \neq C$, $C' \in N_E$, on n'est pas sûr qu'il existe en K un élément a tel que $|a| = C'/C$. L'indépendance résulte alors du théorème 5, modifié pour le cas $N_E \subset N_K$ suivant la remarque précédente. Ce nombre est appelé *l'indice de l'espace*. L'indice de E vaut au moins celui de K. Je n'ai pas réussi à établir une relation entre l'indice de K, l'indice E et le nombre r du théorème 5.