Mathematics. — *Sur les espaces linéaires normés.* II. By A. F. MONNA. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of October 26, 1946.)

§ 4. Au §§ 2 et 3 on a partout supposé que la valuation de K soit non-triviale. Le théorème suivant cependant reste vrai pour une valuation triviale de K.

Théorème 7. *Soit E un espace linéaire totalement-non-archimédien satisfaisant à*

1. *N_E n'admet que le point 0 comme point d'accumulation;*
2. *E est complet;*
3. *soit $0 \ldots < C_i < C_{i+1} < \ldots$ la suite des nombres appartenant à N_E (N_E est dénombrable en vertu de la supposition 1); supposons alors que le nombre de classes modulo $\| x \| < C_i$ dans le groupe $\| x \| \leqq C_i$ est fini, quelle que soit la valeur de i. Soit $\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, \ldots, \xi_{n_i}^{(i)}$ un système de représentants des classes dans $\| x \| \leqq C_i$, différentes entre eux et de la classe-zéro (le nombre des classes est alors $n_i + 1$). Alors chaque x en E peut être développé d'une façon unique en une série*

$$x = \xi_{j_i}^{(i)} + \varepsilon_{i-1}\, \xi_{j_{i-1}}^{(i-1)} + \ldots + \varepsilon_{i-k}\, \xi_{j_{i-k}}^{(i-k)} + \ldots$$

si $\| x \| = C_i$. Les ε_{i-k} ($k = 1, 2, \ldots$) ne prennent que les valeurs 0 et 1, en fonction de x.

Démonstration. Si $\| x \| = C_i$, les décompositions suivantes sont possibles:

$$x = \xi_1^{(i)} + \eta_1$$

$$x = \xi_2^{(1)} + \eta_2$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$x = \xi_{n_i}^{(i)} + \eta_{n_i}.$$

Il en résulte

$$\| x - \eta_k \| = C_i \quad (k = 1, \ldots, n_i)$$

$$\| \eta_k - \eta_l \| = \| \xi_l^{(i)} - \xi_k^{(i)} \| = C_i \quad (k \neq l).$$

On ne peut avoir $\| \eta_k \| = C_i$ pour $k = 1, \ldots, n_i$. En effet, autrement les éléments $\theta, x, \eta_1, \ldots, \eta_{n_i}$ constitueraient un système de $n_i + 2$ représentants de classes différentes, en contradiction avec la supposition. Il existe donc au moins un η_λ tel que $\| \eta_\lambda \| < C_i$ et on a la décomposition

$$x = \xi_{j_i}^{(i)} + \eta_\lambda.$$

Ici j_i et η_λ sont uniquement déterminés. Supposons en effet

$$x = \xi^{(i)}_{j_i} + \eta_\lambda, \quad x = \xi^{(i)}_{j_{i'}} + \eta_{\lambda'}, \quad \|\eta_\lambda\| < C_i, \|\eta_{\lambda'}\| < C_i.$$

Alors

$$\|\xi^{(i)}_{j_i} - \xi^{(i)}_{j'_i}\| = \|\xi^{(i)}_{j_i} - x + x - \xi^{(i)}_{j'_i}\| \leqq \max (\|\xi^{(i)}_{j_i} - x\|, \|x - \xi^{(i)}_{j'_i}\|) =$$
$$= \max (\|\eta_\lambda\|, \|\eta_{\lambda'}\|) < C_i.$$

Il en résulte, la norme de cette différence étant $= C_i$ si $j_i \neq j'_i$

$$\xi^{(i)}_{j_i} = \xi^{(i)}_{j'_i}, \; j_i = j'_i, \; \eta_\lambda = \eta_{\lambda'}.$$

Continuant ainsi on trouve la décomposition

$$x = \xi^{(i)}_{j_i} + \varepsilon_{i-1} \xi^{(i-1)}_{j_{i-1}} + \ldots + \varepsilon_{i-k} \xi^{(i-k)}_{j_{i-k}} + \eta$$

avec $\| \eta \| < C_{i-k}$.

Pour les valeurs suffisamment grandes de k on a $\| \eta \| < \delta$ donc

$$\| x - \sum_k \varepsilon_{i-k} \xi^{(i-k)}_{j_{i-k}} \| < \delta$$

et par suite

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{i-k} \xi^{(i-k)}_{j_{i-k}}, \; \varepsilon_i = 1.$$

Inversement chaque suite de cette forme représente un point de E. Posons pour cela

$$x_{k+1} = \varepsilon_i \xi^{(i)}_{j_i} + \ldots + \varepsilon_{i-k} \xi^{(i-k)}_{j_{i-k}}, \; x_{k+1} \in E.$$

Pour les valeurs suffisamment grandes de k et pour $p > 0$ on voit que $\| x_{k+p+1} - x_{k+1} \| < \delta$. La suite $\{ x_k \}$ est donc une suite fondamentale dans E et, E étant supposé complet, elle a une limite x et

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{i-k} \xi^{(i-k)}_{j_{i-k}}.$$

Remarques. 1. On n'a pas supposé que le corps K soit complet.

2. Le théorème 7 reste vrai si la valuation de K est triviale. Dans ce cas il est possible que la suite $\{ C_i \}$ ne contient pas des nombres arbitrairement petits. En ce cas, on voit que chaque point de l'espace peut être représenté par une combinaison linéaire finie des $\xi^{(i)}_j$. Tous les points de l'espace sont alors isolés, de sorte que l'espace est alors localement compact.

3. Il résulte du théorème 2 que, si la valuation de K est non triviale, le théorème 7 s'applique aux espaces localement compacts.

Faisons de nouveau les restrictions que la valuation de K est non triviale et que K est complet et considérons les espaces localement compacts. Les résultats du paragraphe 3 s'appliquent. On peut donner dans ce cas aux séries du théorème 7 une forme plus simple. Remarquons d'abord que dans ce cas le nombre n_i du théorème 7 est une constante, l'indice de l'espace. Il y a deux cas.

a) L'indice de E est égal à celui de K, soit $= n + 1$.

Soit, dans ce cas ξ_i $(-\infty < i < +\infty)$ un point de E avec $\| \xi_i \| = C_i$ et soit $\lambda_0 = 0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ $(\lambda_i \in K)$ un système S de représentants des classes modulo $|a| < 1$ dans le groupe $|a| \leqq 1$. Alors les éléments

$$\lambda_0 \xi_i, \lambda_1 \xi_i, \ldots, \lambda_n \xi_i$$

de E constituent un système de représentants des classes modulo $\| x \| < C_i$. En appliquant le théorème 7 on trouve:

Chaque point x d'un espace totalement-non-archimédien localement compact (valuation non triviale) dont l'indice $n + 1$ est égal à celui de K, peut être représenté d'une façon unique dans la forme

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{i-k}\, \xi_{i-k}, \quad \|x\| = C_i, \quad \lambda_{i-k} \in S. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

b) L'indice de E est plus grand que celui de K. Ce cas se réduit au cas précédent au moyen du théorème 5, qui s'applique aux espaces localement compacts. Si les points x de E sont représentés par

$$x = a_1\, x_1 + \ldots + a_r\, x_r,$$

considérons, à côté de E, les espaces linéaires E_l des points

$$x = a x_l \; (a \in K;\; i = 1, \ldots, r).$$

Les E_l n'ont que le point θ en commun, de sorte que E est la somme des E_l. Les E_l sont totalement-non-archimédiens et localement compacts (puisque K est localement compact); ils sont complets puisque K est complet. De plus, on voit que l'indice de chaque E_l est égal à celui de K, de sorte qu'on peut appliquer le cas précédent. La valuation de K étant discrète, N_K consiste des nombres ϱ^i où $\varrho > 1$ et i entier. Si

$$\|x_l\| = C^{(l)} \, (l = 1, \ldots, r;\; C^{(l)} \in \{C_i\})$$

l'ensemble N_{E_l} consiste donc des nombres $\varrho^t C^{(l)}$ $(-\infty < t < +\infty)$.

Introduisons les points

$$\xi_i^{(l)} \, (-\infty < i < +\infty;\; l = 1, \ldots, r), \; \|\xi_i^{(l)}\| = \varrho^i\, C^{(l)}.$$

On obtient alors l'énoncé général:

Chaque point x d'un espace totalement-non-archimédien localement compact (valution non triviale) peut être représenté d'une facon unique dans la forme

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{i_1-k}^{(1)}\, \xi_{i_1-k}^{(1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{i_2-k}^{(2)}\, \xi_{i_2-k}^{(2)} + \ldots + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{i_r-k}^{(r)}\, \xi_{i_r-k}^{(r)} . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\lambda_{i_j-k}^{(j)} \in S.$$

Ici r est une constante, dépendant de l'espace. Inversement, chaque pareille combinaison de suites représente un point de l'espace.

On peut simplifier cette représentation encore un peu en introduisant dans E une métrique telle que $N_E \subset N_K$, ce qui est toujours possible, comme nous avons vu, dans les espaces localement compacts. On peut s'arranger que, dans la représentation $x = a_1 x_1 + \ldots + a_r x_r$, les x_j ont tous la même norme. Si $\| x_j \| = \varrho^m$, on introduit alors les points

$$\xi_i \, (-\infty < i < +\infty), \, \| \xi_i \| = \varrho^{i+m}$$

et on obtient la représentation

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{(1)}_{i_1-k} \, \xi_{i_1-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{(2)}_{i_2-k} \, \xi_{i_2-k} + \ldots + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{(r)}_{i_r-k} \, \xi_{i_r-k}$$

ou, par une addition des termes correspondants, ce qui est permis,

$$x = \mu_i \, \xi_i + \mu_{i-1} \, \xi_{i-1} + \ldots$$

où les coefficients des ξ_{i-k} sont maintenant des sommes d'au plus r éléments de S, uniquement déterminées.

Remarques. 1. Par un raisonnement analogue à celui valable pour les corps métrisés (voir 4)), on voit que pour les espaces dont l'indice est égal à celui de K, l'ensemble des points x de l'espace pour lesquels $\| x \|$ est constant, est homéomorphe à l'ensemble parfait non-dense de CANTOR.

2. Comparer les séries précédentes avec une série qui se présente dans la théorie des anneaux topologiques [7]).

Le théorème suivant est une conséquence immédiate des développements en série précédents, si l'on introduit aux espaces la métrique $\max\limits_{1 \leqq i \leqq r} | a_i |$, définie au fin du § 3.

Théorème 8. *Soient E et F deux espaces totalement-non-archimédiens localement compacts. La valuation des corps K_E et K_F des coefficients est supposée non triviale. Supposons: a) le nombre r du théorème 5 est le même pour E et F; b) les corps finis des classes modulo $|a| < 1$ (voir le fin du § 4), définis en K_E et K_F sont isomorphes. Alors il existe une transformation linéaire, biunivoque et bicontinue de E en F.*

Ce théorème exprime ce que l'on aperçoit immédiatement des séries: ce ne sont qu'un nombre fini d'éléments de K, à valeurs 0 ou 1, qui interviennent effectivement. Ces éléments constituent un corps fini, si on calcule avec eux modulo $|a| < 1$ (p. ex. les nombres 0, 1, ..., $P - 1$ dans le corps des nombres P-adiques).

Une autre conséquence est la suivante. Ci-dessus nous avons considéré

---

[7]) D. VAN DANTZIG. Zur topologischen Algebra II. Compositio Mathematica 2, 201—223 (1935) en particulier p. 220.

les espaces de la forme $x = a x_i$ $(a \in K)$; c'étaient des espaces dont l'indice est égal à celui de K. Or, c'est la forme générale de ces espaces. Soit donc E un espace dont l'indice est égal à celui de K. Introduisons en E une métrique telle que $N_E = N_K$ (voir § 3, p. 1054). Soit alors ξ un point de E tel que $\| \xi \| = 1$ et soient a_i $(-\infty < i < +\infty)$ des éléments de K tels que $|a_i| = \varrho^i$ $(-\infty < i < +\infty)$. Pour les points ξ_i de la série (5) on peut alors prendre les points $\xi_i = a_i \xi$. La série (5), qui est la forme générale de E, prend alors la forme

$$\sum_k \lambda_{i-k}\, a_{i-k}\, \xi = \xi \sum_k \lambda_{i-k}\, a_{i-k}$$

qui se réduit, à $a\xi$, puisque K est supposé complet.

§ 5. Dans la seconde partie, sauf le théorème 7, on a partout supposé que le corps K soit complet, bien que ceci n'est pas une condition nécessaire pour les espaces localement compacts (voir le théorème 2). De plus l'espace était partout complet. Remarquons que c'est bien possible que E soit complet sans que K a cette propriété.

Exemple: E est le corps des nombres P-adiques et K le corps des nombres rationnels munit d'une valuation P-adique.

Cependant, E étant complet, et la multiplication par les éléments de K étant définie, il est toujours possible de définir une multiplication par les éléments de $\overline{K}$ (le plus petit corps complet contenant K), sans qu'il soit nécessaire d'adjoindre de nouveaux points à E. Soit $a \in \overline{K}$ et $a_n \to a$, $a_n \in K$. Pour x fixé en E, la suite $\{a_n x\}$ est une suite fondamentale de E, et, E étant complet, elle converge. La limite $\lim\limits_{n \to \infty} a_n x$ existe donc; nous définissons

$$a\, x = \lim_{n \to \infty} a_n\, x.$$

L'unicité de cette définition est immédiate puisque si $b_n \to a$, la suite $\{(a_n - b_n)x\}$ converge vers θ. On voit que les conditions de linéarité sont vérifiées. La condition que K est complet ne signifie donc pas, dans tous ce qui précède, une restriction de la généralité.

§ 6. Faisons quelques remarques sur le cas de la valuation triviale de K, que nous avons partout exclue, sauf au théorème 7. Ce ne sont que des remarques, car je n'ai pas réussi à élucider complètement ce cas.

1. Il ne résulte pas de la compacité locale que E et K possèdent un indice fini. *Exemple:* E soit un corps infini à valuation triviale et K un sous-corps infini (éventuellement $K \equiv E$).

2. Ils existent des espaces localement compacts qu'on ne peut pas représenter dans la forme $x = a_1 x_1 + \ldots + a_r x_r$, ni dans la forme des séries (5) ou (6). *Exemple:* K soit un corps fini, sur lequel on ne peut donc définir qu'une valuation triviale. E soit un sur-corps infini à valuation triviale.

3. Les espaces des deux exemples précédents ne contiennent que des points isolés et par là ils sont localement compacts. Ils ne sont donc pas très intéressants.

Faisons donc la restriction que N_E contiendra des nombres arbitrairement petits. Soit E localement compact. Alors K (à valuation triviale) est un corps fini. Soit, pour cela, $\varepsilon > 0$ donné et soit x_0 un point de E tel que $\| x_0 \| \leqq \varepsilon$. Si maintenant $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ étaient des éléments de K en nombre infini, différents l'un de l'autre, il suivrait $\| \lambda_i x_0 \| = \| x_0 \| \leqq \varepsilon$ et $\| \lambda_i x_0 - \lambda_j x_0 \| = | \lambda_i - \lambda_j | \cdot \| x_0 \| = \| x_0 \|$, de sorte que le voisinage $\| x \| \leqq \varepsilon$ de θ contiendrait la suite non-compacte $\{ \lambda_i x_0 \}$ en contradiction avec la compacité locale de E.

C'est une conséquence immédiate que l'espace, qui n'est pas fini puisque N_E n'est pas fini, ne peut pas s'écrire comme somme d'un nombre fini d'espaces, comme c'est le cas si la valuation de K est non triviale (théorème 5). Un pareil espace contient pour chaque x_0 une infinité de points x pour lesquels on a $\| x \| = \| x_0 \|$. En effet, pour tous les points du voisinage $\| x - x_0 \| < \varepsilon < \| x_0 \|$ on a $\| x \| = \| x_0 \|$; si ce nombre de points x était fini, cet ε-voisinage était fini et chaque point de E était isolé, en contradiction avec la supposition que N_E contient des nombres arbitrairement petits.

Comme exemple d'un pareil espace signalons le suivant. K soit un corps fini et $\overline{K}(x)$ le plus petit corps complet contenant une extension simplement transcendante de K. $\overline{K}(x)$ consiste des séries de puissances d'un indéfini x:

$$a = \lambda_s x^s + \lambda_{s+1} x^{s+1} + \ldots$$

où $\lambda_i \in K$; $| \lambda_i | = 1$ si $\lambda_i \neq 0$; $| a | = | x |^s$; $| x | < 1$. $\overline{K}(x)$ est localement compact.

L'analogie de cette série à la série (5) fait présumer que la série (6) donne la forme générale des espaces totalement-non-archimédiens localement compacts, même si la valuation de K est triviale, dans ce dernier cas sous l'hypothèse que N_E contient des nombres arbitrairement petits. Remarquons que dans (6) n'interviennent qu'un nombre fini d'éléments de K. Cette présomption est soutenue par le théorème 8. Je n'ai pas réussi à la démontrer.

En remplaçant la condition de la compacité locale par celle de la compacité, on montre, si la valuation de K est triviale, la nécessité des conditions suivantes:

1. N_E n'a que 0 comme point d'accumulation;
2. K est fini;
3. E est complet;
4. pour chaque $C \in N_E$, E ne contient qu'un nombre fini de points e_i tels que

$$\| e_i \| = C, \quad \| e_i - e_j \| = C \quad (i \neq j).$$

Une inversion ne m'est pas connue.

Signalons enfin le problème suivant. Dans la théorie des corps métriques (normés) on sait: si l'ensemble des normes N admet un point d'accumulation $\neq 0$, alors chaque point (nombre réel) est point d'accumulation de N. Vue l'analogie entre la théorie des corps métriques et la théorie des espaces linéaires totalement-non-archimédiens, a-t-on la même propriété pour l'ensemble N_E?