Mathematics. — *Ueber den Aussagen- und den engeren Prädikatenkalkül.* I. By J. RIDDER. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of November 30, 1946.)

Durch Hinzufügung der hier folgenden Axiome V und VI (siehe § 2) zu den Axiomen des RUSSELL-WHITEHEAD'schen Aussagenkalküls [1]) entsteht ein System, dessen Gleichwertigkeit mit einer BEELE'schen Algebra in einem Felde von abzählbar unendlich vielen Elementen zeigt, dass der Namen von zweiwertigem Kalkül, mit welchem der R.—W. Aussagenkalkül oft angedeutet wird, nicht ganz richtig gewählt ist; denn dieser lässt sich, ebense wie der in der angegebenen Weise erweiterte Kalkül, auch als mehrwertiger Kalkul auffassen. Beide Kalküle lassen sich intuitiv deuten als Aussagenkalküle einer elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung. [2])

Völlig gleichartige Bemerkungen gelten für den engeren Prädikatenkalkül. [3])

Erster Aufbau des Aussagenkalküls.

§ 1. Von den im folgenden durch grosse lateinische Buchstaben [4]) angedeuteten *elementaren Aussagen* (*elementaren Kalkülformeln*) wird nicht angenommen, dass sie entweder wahr oder falsch sind. Wir lassen sowohl die Möglichkeit von endlich- wie die von abzählbar unendlich vielen elementaren Aussagen zu.

Als undefinierte *Grundverknüpfungen* nehmen wir *oder* und *nicht-* (*Komplement von*), und deuten diese bzw. durch $+$ und durch ein Akzent an. Also $X+Y$ lese man: X oder Y; A' lese man: nicht- (non-) A oder Komplement von A.

Einsetzungsregel E (erster Teil). Aus einer *Kalkülformel* erhält man wieder eine Kalkülformel, wenn man einen in ihr auftretenden grossen lateinischen Buchstaben durch eine Kalkülformel ersetzt (gleichgestaltete Buchstaben durch gleichgestaltete Formeln); dabei sind die grossen lateinischen Buchstaben, λ und ν als Kalkülformeln anzusehen, ferner mit $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ auch $\mathfrak{R}+\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{S}'$. [5])

Definition. $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ ist eine andere Schreibweise von $\mathfrak{A}'+\mathfrak{B}$. [5])

Definition. $\doteq \bar{\nu}$ ist *ein Assertionszeichen.*

---

[1]) Siehe D. HILBERT und W. ACKERMANN, Grundzüge der theoretischen Logik, 2e Aufl. New York, Dover Publ. 1946, Kap. 1.

[2]) Siehe etwa A. KOLMOGOROFF, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin 1933, Kap. 1.

[3]) Siehe ihre Darstellung bei HILBERT und ACKERMANN, loc. cit. 1), Kap. 3.

[4]) Also durch $A, B, C, \ldots$; doch auch $A_1, B_1, C_1 \ldots$; $A_2, B_2, \ldots$; $A_n, \ldots$ (n eine natürliche Zahl).

[5]) Grosse deutsche Buchstaben werden immer Kalkülformeln andeuten.

Definition. Ein Ausdruck, bestehend aus einer Kalkülformel gefolgt durch $\doteq \bar{\nu}$, und entstanden nach endlichmaliger Anwendung von Axiomen, Einsetzungsregel E oder (und) Schlussschema S, ist *ein Theorem*.

So sind die Axiome I bis IV als Theoreme zu betrachten.

Einsetzungsregel E (zweiter Teil). Ist $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ ein Theorem, und $\mathfrak{B}$ eine neue, aus $\mathfrak{A}$ mittels der Einsetzungsregel E (erster Teil) hervorgehende Kalkülformel, so liefert auch $\mathfrak{B} \doteq \bar{\nu}$ ein Theorem.

Axiom I. $[(X + X) \rightarrow X] \doteq \bar{\nu}$.

Axiom II. $[X \rightarrow (X + Y)] \doteq \bar{\nu}$.

Axiom III. $[(X + Y) \rightarrow (Y + X)] \doteq \bar{\nu}$.

Axiom IV. $[(Y \rightarrow Z) \rightarrow \{(X + Y) \rightarrow (X + Z)\}] \doteq \bar{\nu}$.

Schlussschema S. Sind

$$\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu} \text{ und } [\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}] \doteq \bar{\nu}$$

Theoreme, so ist auch

$$\mathfrak{B} \doteq \bar{\nu}$$

ein Theorem. [6])

Definition. $\mathfrak{A} . \mathfrak{B}$ ist eine andere Schreibweise von $(\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}')'$.

Definition. $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}$ ist eine andere Schreibweise von $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) . (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A})$.

Definition. $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ ist eine andere Schreibweise von $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \doteq \bar{\nu}$.

Satz 1. α) $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}$ ist ein Theorem;

β) (Schlussschema) hat man als Theoreme $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}$, so lässt sich auch schreiben $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}$.

Beweis von α). $[\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{A} + \mathfrak{A})] \doteq \bar{\nu}$. (Axiom II u. Einsetzungsregel E)

$[(\mathfrak{A} + \mathfrak{A}) \rightarrow \mathfrak{A}] \doteq \bar{\nu}$. (Axiom I u. Einsetzungsregel E)

Also, nach H.-A., loc. cit. 1), S. 26 (Regel V),

$$[\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}] \doteq \bar{\nu},$$

was sich auch schreiben lässt:

$$\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}.$$

Beweis von β). Statt $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}$ lässt sich auch schreiben:

$$(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \doteq \bar{\nu} \text{ bzw. } (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}) \doteq \bar{\nu}.$$

Also, nach H.-A., S. 26 (Regel V),

$$(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}) \doteq \bar{\nu},$$

oder

$$\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}.$$

Satz 2. α) $\mathfrak{A} . \mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} . \mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}$ (sind Theoreme);

β) (Schlussschema) aus $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}$ folgt, dass sich auch schreiben lässt $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A} . \mathfrak{B}$.

---

[6]) Die Axiome I—IV mit Einzetzungsregel E und Schlussschema S findet man in HILBERT–ACKERMANN, loc. cit. 1), Kap. 1 als Grundlage für den Aufbau des RUSSELL–WHITEHEAD'schen zweiwertigen Aussagenkalküls. Da die Zweiwertigkeit bei der Ableitung von Theoremen und Schlussschemata im zit. Kapitel nirgends benutzt wird, gelten diese auch hier; nur ist unsere Schreibweise eine andere.

Beweis von α). Nach H.-A., S. 29, Formel (12) und Formel (13) (mit unserer Einsetzungsregel E) gilt

$$\{(\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{B}) \to \mathfrak{A}\} \doteq \bar{\nu} \text{ bzw. } \{(\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{B}) \to \mathfrak{B}\} \doteq \bar{\nu},$$

oder in anderer Schreibweise:

$$\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A} \text{ bzw. } \mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}.$$

Beweis von β). Nach Annahme lässt sich schreiben:

$$\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A} \text{ oder } (\mathfrak{C} \to \mathfrak{A}) \doteq \bar{\nu},$$

und

$$\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B} \text{ oder } (\mathfrak{C} \to \mathfrak{B}) \doteq \bar{\nu}.$$

Nach H.-A., S. 31 u. 12, b 3) folgt

$$\{(\mathfrak{C} \to \mathfrak{A})\,.\,(\mathfrak{C} \to \mathfrak{B})\} \doteq \bar{\nu}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Auch hat man das Theorem:

$$[\{(\mathfrak{C} \to \mathfrak{A})\,.\,(\mathfrak{C} \to \mathfrak{B})\} \to \{\mathfrak{C} \to (\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{B})\}] \doteq \bar{\nu}.^{7)} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt, nach Schema S,

$$\{\mathfrak{C} \to (\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{B})\} \doteq \bar{\nu}, \text{ oder } \mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{B}.$$

Satz 3. α) $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$;

β) (Schlussschema) lässt sich schreiben $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}$, so auch $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}$.

Beweis von α).

$\{\mathfrak{A} \to (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\} \doteq \bar{\nu}.$	(Axiom II u. Einsetzungsregel E) .	(3)
$\{\mathfrak{B} \to (\mathfrak{B} + \mathfrak{A})\} \doteq \bar{\nu}.$	(Axiom II u. Einsetzungsregel E)	
$\{(\mathfrak{B} + \mathfrak{A}) \to (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\} \doteq \bar{\nu}.$	(Axiom III u. Einsetzungsregel E)	
$\{\mathfrak{B} \to (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\} \doteq \bar{\nu}.$	(H.-A., S. 26 (Regel V))	(4)

(3) und (4) liefern α).

Beweis von β). Aus $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}$ oder $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}) \doteq \bar{\nu}$, und $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}$ oder $(\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}) \doteq \bar{\nu}$ folgt, nach H.-A., S. 31 u. 12, b 3),

$$\{(\mathfrak{A} \to \mathfrak{C})\,.\,(\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})\} \doteq \bar{\nu}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Auch hat man das Theorem:

$$[\{(\mathfrak{A} \to \mathfrak{C})\,.\,(\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})\} \to \{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \to \mathfrak{C}\}] \doteq \bar{\nu}.^{7)} \quad . \quad . \quad , \quad (6)$$

Aus (5) und (6) folgt, nach Schema S,

$$\{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \to \mathfrak{C}\} \doteq \bar{\nu}, \text{ oder } \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}.$$

Definition. $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ ist eine kürzere Schreibweise von: $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$.

---

[7]) Zum Beweise bringe man den Ausdruck [— — — — — — —] in die konjunktive Normalform. Siehe H.-A., loc. cit. 1), S. 31 und 10.

Satz 4. $[\mathfrak{A} . (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})] = [(\mathfrak{A} . \mathfrak{B}) + (\mathfrak{A} . \mathfrak{C})]$.

Beweis. Nach H.-A., S. 31 ist

$$[\{\mathfrak{A} . (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})\} \leftrightarrow \{(\mathfrak{A} . \mathfrak{B}) + (\mathfrak{A} . \mathfrak{C})\}] \doteq \bar{\nu}.$$

Nach Schema S und H.-A., S. 29, Formeln (12) u. (13) folgt daraus

$$[\{\mathfrak{A} . (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})\} \rightarrow \{(\mathfrak{A} . \mathfrak{B}) + (\mathfrak{A} . \mathfrak{C})\}] \doteq \bar{\nu} \quad \ldots \quad (7)$$

und

$$[\{(\mathfrak{A} . \mathfrak{B}) + (\mathfrak{A} . \mathfrak{C})\} \rightarrow \{\mathfrak{A} . (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})\}] \doteq \bar{\nu}; \quad \ldots \quad (8)$$

statt (7) und (8) lässt sich auch schreiben:

$$[\mathfrak{A} . (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})] \subset [(\mathfrak{A} . \mathfrak{B}) + (\mathfrak{A} . \mathfrak{C})],$$

bzw.

$$[(\mathfrak{A} . \mathfrak{B}) + (\mathfrak{A} . \mathfrak{C})] \subset [\mathfrak{A} . (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})].$$

Daraus folgt der Satz.

Satz 5. $(\mathfrak{A} + \mathfrak{A}') \doteq \bar{\nu}$,

und $(\mathfrak{A} . \mathfrak{A}')' \doteq \bar{\nu}$.

Beweis. Das erste Theorem ist eine andere Schreibweise von H.-A., S. 27, Formel (3); das zweite folgt aus dem ersten mit H.-A., S. 31 u. 10, *a* 3).

§ 2. Wir erweitern nun den RUSSELL-Whitehead'schen Aussagenkalkül durch Hinzufügung der hier folgenden Axiome V und VI.

Axiom V. $[\lambda \rightarrow X] \doteq \bar{\nu}$.

Satz 6. $\lambda \subset \mathfrak{A}$.

Das folgt mit Einsetzungsregel E aus Axiom V.

Axiom VI. $[X \rightarrow \nu] \doteq \bar{\nu}$.

Satz 7. $\mathfrak{A} \subset \nu$.

Satz 8. Lässt sich schreiben $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$, so auch $\mathfrak{A} = \nu$, und umgekehrt.

Beweis. Nach Satz 3 lässt sich mit willkürlicher Kalkülformel $\mathfrak{A}$ schreiben:

$$\mathfrak{A} \subset (\nu' + \mathfrak{A}), \text{ oder } \mathfrak{A} \subset (\nu \rightarrow \mathfrak{A}), \text{ oder } \{\mathfrak{A} \rightarrow (\nu \rightarrow \mathfrak{A})\} \doteq \bar{\nu}.$$

Ist nun auch $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$, so folgt mit Schema S

$$(\nu \rightarrow \mathfrak{A}) \doteq \bar{\nu}, \text{ oder } \nu \subset \mathfrak{A},$$

also, wegen Satz 7, auch

$$\mathfrak{A} = \nu.$$

Ist $\mathfrak{K} \doteq \bar{\nu}$ ein Theorem [man nehme für $\mathfrak{K}$ etwa $(X + X) \rightarrow X$], so folgt daraus und aus dem (mit Einsetzungsregel E) aus Axiom VI ableitbaren Theorem $[\mathfrak{K} \rightarrow \nu] \doteq \bar{\nu}$, dass sich schreiben lässt:

$$\nu \doteq \bar{\nu}. \quad \ldots \quad (9)$$

Nehmen wir nun $\mathfrak{A} = \nu$ an, so ist auch

$$\nu \subset \mathfrak{A}, \text{ oder } (\nu \rightarrow \mathfrak{A}) \doteq \bar{\nu}.$$

Dies und (9) liefern nach Schema S

$$\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}.$$

Satz 9. $\mathfrak{A}''$ oder $(\mathfrak{A}')' = \mathfrak{A}$. [8])

Beweis. Wegen H.-A., S. 27, Formeln (4) u. (5) und der Einsetzungsregel E ist immer

$$(\mathfrak{A}'' \rightarrow \mathfrak{A}) \doteq \bar{\nu} \text{ und } (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'') \doteq \bar{\nu},$$

oder in anderer Schreibweise:

$$\mathfrak{A}'' \subset \mathfrak{A} \text{ und } \mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'',$$

somit

$$\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}.$$

Satz 10. Lässt sich schreiben $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, so auch $\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}'$. [8])

Beweis. $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, oder $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, oder

$$(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \doteq \bar{\nu} \text{ und } (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}) \doteq \bar{\nu}.$$

Daraus folgt nach H.-A., S. 27, Formel (6) und dem Schlussschema S

$$(\mathfrak{B}' \rightarrow \mathfrak{A}') \doteq \bar{\nu} \text{ und } (\mathfrak{A}' \rightarrow \mathfrak{B}') \doteq \bar{\nu}$$

oder

$$\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{A}' \text{ und } \mathfrak{A}' \subset \mathfrak{B}',$$

oder

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}'.$$

Satz 11. $\lambda' = \nu$; $\nu' = \lambda$.

Beweis. Nach Axiom V und Einsetzungsregel E ist

$$[\lambda \rightarrow \lambda] \doteq \bar{\nu},$$

also nach Satz 8 auch

$$[\lambda \rightarrow \lambda] = \nu, \text{ oder } (\lambda' + \lambda) = \nu. \qquad (10)$$

Nach Satz 3 ist

$$\lambda' \subset (\lambda' + \lambda); \qquad (11)$$

nach den Sätzen 1 und 6 ist

$$\lambda' \subset \lambda' \text{ und } \lambda \subset \lambda',$$

also nach Satz 3 auch

$$(\lambda' + \lambda) \subset \lambda', \qquad (12)$$

Aus (11) und (12) folgt

$$\lambda' = \lambda' + \lambda. \qquad (13)$$

Da das Gleichheitszeichen, wie sich leicht mit Satz 1 beweisen lässt, die Eigenschaft der Transitivität hat, folgt aus (10) und (13)

$$\lambda' = \nu.$$

---

[8]) Dieser Satz wird bewiesen ohne Benutzung der Axiome V und VI; er gilt somit schon in dem Aussagenkalkül des § 1.

Auch ist nun

$$\lambda'' = \lambda \text{ (Satz 9) und } \lambda'' = \nu' \text{ (Satz 10), somit auch } \nu' = \lambda''.$$

Daraus folgt schliesslich

$$\nu' = \lambda.$$

Satz 5bis. $(\mathfrak{A} + \mathfrak{A}') = \nu$
und

$$(\mathfrak{A} . \mathfrak{A}') = \lambda.$$

Beweis. Nach den Sätzen 5 und 8 ist $(\mathfrak{A} + \mathfrak{A}') = \nu$, und

$$(\mathfrak{A} . \mathfrak{A}')' = \nu,$$

somit nach Satz 10

$$(\mathfrak{A} . \mathfrak{A}')'' = \nu'.$$

Nach Satz 9 ist

$$(\mathfrak{A} . \mathfrak{A}')'' = (\mathfrak{A} . \mathfrak{A}') \text{ oder } (\mathfrak{A} . \mathfrak{A}') = (\mathfrak{A} . \mathfrak{A}')''.$$

Die Transitivität des Gleichheitszeichens liefert

$$(\mathfrak{A} . \mathfrak{A}') = \nu',$$

und, mit Satz 11, auch

$$(\mathfrak{A} . \mathfrak{A}') = \lambda.$$

Satz 12. Lässt zich schreiben $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, und sind $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ neue, aus $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ mittels der Einsetzungsregel E (erster Teil) hervorgehende Kalkülformeln, wobei sowohl in $\mathfrak{A}$ wie in $\mathfrak{B}$ vorkommende gleichgestaltete Buchstaben in beiden nicht oder in beiden an allen Stellen in gleicher Weise (d.h. durch gleichgestaltete Kalkülformeln) ersetzt sind, so hat man auch $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{E}$.

Beweis. $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ ist eine andere Schreibweise von

$$\mathfrak{A}' + \mathfrak{B} \doteq \bar{\nu}.$$

Nach der Einsetzungsregel E (2er Teil) lässt sich nun auch schreiben

$$\mathfrak{D}' + \mathfrak{E} \doteq \bar{\nu}, \text{ oder } \mathfrak{D} \subset \mathfrak{E}.$$

Zweiter Aufbau des Aussagenkalküls.

§ 3. *Elementare Aussagen* (*elementare Kalkülformeln*) sollen wieder durch grosse lateinische Buchstaben angedeutet werden [4]).

Als undefinierte *Grundverknüpfungen* nehmen wir *die Inklusion* $\subset$ und die Verknüpfungen ‚*oder*', ‚*und*' und ‚*nicht*- (*Komplement von*)', bzw. angedeutet durch $+$, . und ein Akzent; die Relationen, welche man zwischen diesen Verknüpfungen annehmen soll, sind in den nachfolgenden Axiomen enthalten.

E i n s e t z u n g s r e g e l E^* (e r s t e r T e i l) habe den gleichen Wortlaut wie Einsetzungsregel E (erster Teil) mit dem Unterschiede, dass mit $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ (neben $\mathfrak{R} + \mathfrak{S}$, $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{S}'$) auch $\mathfrak{R} . \mathfrak{S}$ als Formel betrachtet werden soll.

Den Inhalt von Satz 12 nehmen wir als zweiten Teil von Regel E^* an. Also:

E i n s e t z u n g s r e g e l E^* (z w e i t e r T e i l). Lässt sich (auf Grund der nachfolgenden Axiome) schreiben $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Kalkülformeln, und sind $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ aus $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ mittels der Einsetzungsregel E^* (erster Teil) hervorgehende Kalkülformeln, wobei sowohl in $\mathfrak{A}$ wie in $\mathfrak{B}$ vorkommende gleichgestaltete Buchstaben in beiden nicht oder in beiden an allen Stellen durch gleichgestaltete Kalkülformeln etsetzt sind, so lässt sich auch schreiben $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{E}$ [5]).

A x i o m 1°. Das Inklusionszeichen soll die folgenden Eigenschaften haben:

α) es lässt sich schreiben $X \subset X$;

β) (Schlussschema) lässt zich schreiben $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}$, so auch $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}$.

D e f i n i t i o n. $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ ist eine kürzere Schreibweise von: $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$.

S a t z 13. $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ (die Gleichheitsrelation ist *reflexiv*).

S a t z 14 (Schlussschema). Lässt sich schreiben $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, so auch $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ (die Relation ist *symmetrisch*).

S a t z 15 (Schlussschema). Lässt sich schreiben $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$, so auch $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}$ (die Relation ist *transitiv*).

A x i o m 2°. Die Konjunktion soll die folgenden Eigenschaften haben:

α) $(X . Y) \subset X$ und $(X . Y) \subset Y$;

β) (Schlussschema) lässt sich schreiben $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}$, so auch $\mathfrak{C} \subset (\mathfrak{A} . \mathfrak{B})$.

A x i o m 3°. Die Disjunktion soll die folgenden Eigenschaften haben:

α) $X \subset (X + Y)$ und $Y \subset (X + Y)$;

β) (Schlussschema) lässt sich schreiben $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}$, so auch $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \subset \mathfrak{C}$.

S a t z 16 (Schlussschemata). Lässt sich schreiben $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1$, so auch $(\mathfrak{A} . \mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}_1 . \mathfrak{B}_1)$ und $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1)$.

S a t z 17.

$$[(\mathfrak{A} . \mathfrak{B}) . \mathfrak{C}] = [\mathfrak{A} . (\mathfrak{B} . \mathfrak{C})] \text{ und } [(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C}] = [\mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})].$$

S a t z 18. $(\mathfrak{A} . \mathfrak{B}) = (\mathfrak{B} . \mathfrak{A})$ und $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = (\mathfrak{B} + \mathfrak{A})$.

S a t z 19. $(\mathfrak{A} . \mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$ und $(\mathfrak{A} + \mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$.

S a t z 20. (Schlussschemata). Lässt sich schreiben $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, so auch $(\mathfrak{A} . \mathfrak{B}) = \mathfrak{A}$; und umgekehrt. Lässt sich schreiben $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, so auch $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{A}$; und umgekehrt.

S a t z 21 (Schlussschemata). Lässt sich schreiben $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, so gibt es eine Kalkülformel $\mathfrak{A}_1$ mit $(\mathfrak{A} + \mathfrak{A}_1) = \mathfrak{B}$; und umgekehrt. Lässt sich schreiben $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, so gibt es eine Kalkülformel $\mathfrak{A}_2$ mit $(\mathfrak{A} . \mathfrak{A}_2) = \mathfrak{B}$; und umgekehrt.

Axiom 4°. $[X . (Y + Z)] = [(X . Y) + (X . Z)]$.

Satz 22. $[\mathfrak{A} + (\mathfrak{B} . \mathfrak{C})] = [(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . (\mathfrak{A} + \mathfrak{C})]$ [9]).

Axiom 5°. $\lambda \subset X$.

Axiom 6°. $X \subset \nu$.

Satz 23 (Schlussschemata). Lässt sich schreiben $(\mathfrak{A} . \mathfrak{B}) = \lambda$ und $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, so auch $\mathfrak{A} = \lambda$. Lässt sich schreiben $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = \nu$ und $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, so auch $\mathfrak{A} = \nu$.

Satz 24 (Schlussschemata). Lässt sich schreiben $(\mathfrak{A} . \mathfrak{B}) = \lambda$ und $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}$, so auch $\mathfrak{A} . \mathfrak{C} = \lambda$. Lässt sich schreiben $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = \nu$ und $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}$, so auch $\mathfrak{A} + \mathfrak{C} = \nu$.

Axiom 7°. $(X . X') = \lambda$ und $(X + X') = \nu$.

Dualitätsprinzip. Zu jedem mit den Axiomen 1°—7° und Einsetzungsregel E^* ableitbaren Satz erhält man einen dualen, wenn: α) in jeder vorkommenden Kalkülformel $+$ durch $.$, λ durch ν, und umgekehrt, ersetzt werden; β) $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ durch $\overline{\mathfrak{B}} \subset \overline{\mathfrak{A}}$ ersetzt wird; dabei sollen $\overline{\mathfrak{A}}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$ die gemäss α) aus $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ hervorgehenden Kalkülformeln sein [10]).

Satz 25 (Schlussschema). Lässt sich schreiben $(\mathfrak{A} . \mathfrak{B}) = \lambda$ und $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = \nu$, so auch $\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}$ [11]).

Satz 26 (Schlussschema). Lässt sich schreiben $(\mathfrak{C} . \mathfrak{B}) = \lambda$ und $\mathfrak{C} \subset (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$, so auch $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$.

Beweis. Lässt sich schreiben:

$$\mathfrak{C} \subset (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}),$$

so auch:

$$[\mathfrak{C} . (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})] = \mathfrak{C}. \qquad \text{(Satz 20)}$$

Und:

$$[(\mathfrak{C} . \mathfrak{A}) + (\mathfrak{C} . \mathfrak{B})] = [\mathfrak{C} . (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})]. \qquad \text{(Ax. 4°, Satz 14)}$$

Also auch:

$$[(\mathfrak{C} . \mathfrak{A}) + (\mathfrak{C} . \mathfrak{B})] = \mathfrak{C}. \qquad \text{(Satz 15)} \quad . \; . \; . \quad (14)$$

Lässt sich ausserdem schreiben:

$$(\mathfrak{C} . \mathfrak{B}) = \lambda,$$

so auch:

$$[(\mathfrak{C} . \mathfrak{A}) + (\mathfrak{C} . \mathfrak{B})] = [(\mathfrak{C} . \mathfrak{A}) + \lambda]. \qquad \text{(Satz 13, 16)}$$

---

9) Zum Beweise vergleiche man V. GLIVENKO, Théorie générale des structures, Act. Sci. Paris 1938, S. 32.

10) $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ geht somit in $\overline{\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{B}}$ über.

11) Zum Beweise vergl. GLIVENKO, loc. cit. 9), S. 33, 34.

Und:

$$[(\mathfrak{C}\,.\,\mathfrak{A}) + \lambda] = (\mathfrak{C}\,.\,\mathfrak{A}). \qquad \text{(Ax. 3°, 1°, 5°)}$$

Also auch:

$$[(\mathfrak{C}\,.\,\mathfrak{A}) + (\mathfrak{C}\,.\,\mathfrak{B})] = (\mathfrak{C}\,.\,\mathfrak{A}). \qquad \text{(Satz 15)} \quad . \; . \quad (15)$$

(14) und (15) führen zu

$$(\mathfrak{C}\,.\,\mathfrak{A}) = \mathfrak{C}, \qquad \text{(Satz 14, 15)}$$

wodurch

$$\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}. \qquad \text{(Satz 20)}$$

Mit dem Dualitätsprinzip folgt aus Satz 26 der

S a t z 26′ (Schlussschema). Lässt sich schreiben $\mathfrak{C} + \mathfrak{B} = \nu$ und $\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}$, so auch $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}$.

S a t z 27. $\mathfrak{A}''$ oder $(\mathfrak{A}')' = \mathfrak{A}$.

B e w e i s. $(\mathfrak{A} + \mathfrak{A}') = \nu$ und $(\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{A}') = \lambda$, (Ax. 7°)

somit auch:

$$(\mathfrak{A}' + \mathfrak{A}) = \nu \text{ und } (\mathfrak{A}'\,.\,\mathfrak{A}) = \lambda. \qquad \text{(Satz 18, 15)} \quad . \; . \quad (16)$$

Aus (16) folgt mit Satz 25

$$(\mathfrak{A}')' = \mathfrak{A}.$$

S a t z 28 (Schlussschema). Lässt sich schreiben $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, so auch $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{A}'$ [12]).

F o l g e r u n g (Schlussschema). Lässt sich schreiben $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, so auch $\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}'$.

S a t z 29. $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})' = (\mathfrak{A}'\,.\,\mathfrak{B}')$ und $(\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{B})' = (\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}')$ [13]).

F o l g e r u n g. $(\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}')'$.

§ 4. D e f i n i t i o n. $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ ist eine andere Schreibweise von $\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}$.

S a t z 30 (Schlussschema). Lässt sich schreiben $\mathfrak{A} = \nu$ und $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) = \nu$, so auch $\mathfrak{B} = \nu$.

B e w e i s. Aus $\mathfrak{A} = \nu$ und $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) = \nu$ oder $(\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}) = \nu$ folgt, mit Satz 16,

$$[\mathfrak{A}\,.\,(\mathfrak{A}' + \mathfrak{B})] = (\nu\,.\,\nu).$$

$$(\nu\,.\,\nu) = \nu. \qquad \text{(Satz 19)}$$

Also auch:

$$[\mathfrak{A}\,.\,(\mathfrak{A}' + \mathfrak{B})] = \nu. \qquad \text{(Satz 15)}$$

Es lässt sich schreiben

$$[(\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{A}') + (\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{B})] = [\mathfrak{A}\,.\,(\mathfrak{A}' + \mathfrak{B})]. \qquad \text{(Ax. 4°, Satz 14)}$$

---

[12]) Zum Beweise vergl. GLIVENKO, loc. cit. 9), S. 35, 36.

[13]) Zum Beweise vergl. GLIVENKO, loc. cit. 9), S. 36.

Also auch:

$$[(\mathfrak{A} . \mathfrak{A}') + (\mathfrak{A} . \mathfrak{B})] = \nu, \qquad \text{(Satz 15)}$$

$$[\lambda + (\mathfrak{A} . \mathfrak{B})] = \nu, \qquad \text{(Ax. 7°, Satz 13, 16, 15)}$$

$$(\mathfrak{A} . \mathfrak{B}) = \nu, \qquad \text{(Ax. 3°, 1°, 5°, Satz 15)}$$

$$(\nu . \mathfrak{B}) = \nu, \qquad \text{(Satz 13, 16, 14, 15)}$$

somit:

$$\mathfrak{B} = \nu. \qquad \text{(Ax. 6°, Satz 20, 18, 15, 14)}$$

Satz 31 (Schlussschemata). Lässt sich schreiben $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, so auch $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) = \nu$, und umgekehrt.

Beweis. Nach Axiom 7° und Satz 14 ist

$$\nu = (\mathfrak{A} + \mathfrak{A}').$$

Lässt sich schreiben $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, so auch

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{A}') \subset (\mathfrak{B} + \mathfrak{A}'), \qquad \text{(Ax. 3°, 1°)}$$

und dadurch auch

$$\nu \subset (\mathfrak{B} + \mathfrak{A}'). \qquad \text{(Ax. 1°)}$$

Nach Axiom 6°:

$$(\mathfrak{B} + \mathfrak{A}') \subset \nu,$$

also

$$(\mathfrak{B} + \mathfrak{A}') = \nu,$$

und

$$(\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}) = \nu, \text{ oder } (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) = \nu. \qquad \text{(Satz 18, 15)}$$

Umgekehrt, lässt sich schreiben $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) = \nu$, oder $(\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}) = \nu$, so folgt aus $(\mathfrak{A} . \mathfrak{A}') = \lambda$ (Ax. 7°) und $\mathfrak{A} \subset \nu$ (Ax. 6°), dass

$$\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}. \qquad \text{(Ax. 1°, Satz 18, 26)}$$

Definition. $\mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{B}$ ist eine andere Schreibweise von

$$(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) . (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}).$$

Satz 32 (Schlussschemata). Lässt sich schreiben $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) = \nu$ und $(\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}) = \nu$, so auch $(\mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{B}) = \nu$, und umgekehrt.

Beweis. Lässt sich schreiben $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) = \nu$ und $(\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}) = \nu$, so auch

$$[(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) . (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A})] = \nu, \text{ d.i. } (\mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{B}) = \nu. \qquad \text{(Satz 16, 19, 15)}$$

Umgekehrt, lässt sich schreiben $(\mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{B}) = \nu$, so auch:

$$\nu \subset [(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) . (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A})],$$

und dadurch weiter:

$$\nu \subset (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \text{ und } \nu \subset (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}). \qquad \text{(Ax. 2°, 1°)}$$

Mit Axiom 6° liefert dies

$$(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) = \nu \text{ und } (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}) = \nu.$$

Satz 33 (Schlussschemata). Lässt sich schreiben $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, so auch $(\mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{B}) = \nu$, und umgekehrt.

Beweis. Lässt sich schreiben $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, so auch

$$\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B},\ \mathfrak{B} \subset \mathfrak{A},$$

und, nach Satz 31,

$$(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) = \nu,\ (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}) = \nu,$$

endlich, nach Satz 32,

$$(\mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{B}) = \nu.$$

Diese Ableitung lässt sich umkehren.

§ 5. Satz 34. $[(\mathfrak{A} + \mathfrak{A}) \rightarrow \mathfrak{A}] = \nu$.

Beweis.

$$[(\mathfrak{A} + \mathfrak{A})' + \mathfrak{A}] = [(\mathfrak{A}' \,.\, \mathfrak{A}') + \mathfrak{A}] = (\mathfrak{A}' + \mathfrak{A}) = (\mathfrak{A} + \mathfrak{A}') = \nu,$$
(Satz 29, 13, 16, 19, 18, Ax. 7°)

also

$$[(\mathfrak{A} + \mathfrak{A})' + \mathfrak{A}] = \nu, \text{ oder } [(\mathfrak{A} + \mathfrak{A}) \rightarrow \mathfrak{A}] = \nu. \qquad \text{(Satz 15)}$$

Satz 35. $[\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})] = \nu$.

Beweis.

$$[\mathfrak{A}' + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})] = [(\mathfrak{A}' + \mathfrak{A}) + \mathfrak{B}] = [(\mathfrak{A} + \mathfrak{A}') + \mathfrak{B}] = (\nu + \mathfrak{B}) = \nu,$$

also

$$[\mathfrak{A}' + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})] = \nu, \qquad \text{(Satz 17, 14, 18, 13, 16, Ax. 7°, 6°, 3°, Satz 15)}$$

oder

$$[\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})] = \nu.$$

Satz 36. $[(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \rightarrow (\mathfrak{B} + \mathfrak{A})] = \nu$.

Beweis. $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \subset (\mathfrak{B} + \mathfrak{A})$, (Satz 18)

also auch

$$[(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \rightarrow (\mathfrak{B} + \mathfrak{A})] = \nu. \qquad \text{(Satz 31)}$$

Satz 37. $[(\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}) \rightarrow \{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \rightarrow (\mathfrak{A} + \mathfrak{C})\}] = \nu$.

Beweis. Es lässt sich schreiben:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{B}' + \mathfrak{C}) &= [(\mathfrak{B}' + \mathfrak{C}) \,.\, \nu] = [\nu \,.\, (\mathfrak{B}' + \mathfrak{C})] = [(\nu \,.\, \mathfrak{B}') + (\nu \,.\, \mathfrak{C})] = \\ &= [\{(\mathfrak{A} + \mathfrak{A}') \,.\, \mathfrak{B}'\} + \mathfrak{C}] = \\ &= [\{(\mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{B}') + (\mathfrak{A}' \,.\, \mathfrak{B}')\} + \mathfrak{C}] \subset [\{\mathfrak{A} + (\mathfrak{A}' \,.\, \mathfrak{B}')\} + \mathfrak{C}],\end{aligned}$$
(Ax. 6°, Satz 20, 18, Ax. 4°, 7°, Satz 13, 16, Ax. 2°, 3°, 1°)

oder auch

$$(\mathfrak{B}' + \mathfrak{C}) \subset [(\mathfrak{A}' . \mathfrak{B}') + (\mathfrak{A} + \mathfrak{C})], \qquad \text{(Ax. 1°, Satz 18, 13, 16, 17)}$$

oder

$$(\mathfrak{B}' + \mathfrak{C}) \subset [(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})' + (\mathfrak{A} + \mathfrak{C})], \qquad \text{(Satz 29, 14, 13, 16, Ax. 1°)}$$

oder

$$[(\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}) \to \{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \to (\mathfrak{A} + \mathfrak{C})\}] = \nu. \qquad \text{(Satz 31)}$$

Satz 38. $\lambda' = \nu$ und $\nu' = \lambda$.

Beweis. Nach den Axiomen 2°, 5°, 3°, 6° ist

$$(\lambda + \nu) = \nu, \ (\lambda . \nu) = \lambda, \text{ und } (\nu + \lambda) = \nu, \ (\nu . \lambda) = \lambda.$$

Satz 25 zeigt, dass sich auch schreiben lässt

$$\lambda' = \nu \quad \text{und} \quad \nu' = \lambda.$$

Satz 39. $(\lambda \to \mathfrak{A}) = \nu$.

Beweis. $\lambda' + \mathfrak{A} = \nu + \mathfrak{A} = \nu$, (Satz 38, 13, 16, Ax. 3°, 6°)

oder

$$\lambda' + \mathfrak{A} = \nu, \qquad \text{(Satz 15)}$$

oder

$$(\lambda \to \mathfrak{A}) = \nu.$$

Satz 40. $(\mathfrak{A} \to \nu) = \nu$.

Beweis. $\mathfrak{A}' + \nu = \nu$, (Ax. 3°, 6°)

oder

$$(\mathfrak{A} \to \nu) = \nu.$$

Satz 41. Lässt sich schreiben $\mathfrak{A} = \nu$, und ist $\mathfrak{B}$ eine mittels der Einsetzungsregel E^* (erster Teil) aus $\mathfrak{A}$ hervorgehende Kalkülformel, so darf man auch schreiben: $\mathfrak{B} = \nu$.

Beweis. Lässt sich schreiben $\mathfrak{A} = \nu$, so auch

$$\mathfrak{A} \subset \nu, \quad \nu \subset \mathfrak{A}.$$

Durch Anwendung von Einsetzungsregel E^* (zweiter Teil) folgt:

$$\mathfrak{B} \subset \nu, \quad \nu \subset \mathfrak{B},$$

somit

$$\mathfrak{B} = \nu.$$

Definition (Einführung des Assertionszeichens $\doteq \bar{\nu}$). Die Schreibweisen $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ und $\mathfrak{A} = \nu$ sollen einander ersetzen können.