Mathematics. — *Ueber den Aussagen- und den engeren Prädikatenkalkül.* II. By J. RIDDER. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of December 21, 1946.)

Zusammenhang und Eigenschaften der beiden Axiomensysteme.

§ 6. Aus den Sätzen 1—4, 5^{bis}, 6, 7, 12 einerseits und den Sätzen 30, 34—37, 39—41 andererseits, nebst den Definitionen, Satz 8, der Folgerung aus Satz 29 und Satz 31, folgt unmittelbar, *dass das Axiomensystem I—VI mit der Einsetzungsregel E und dem Schlussschema S völlig gleichwertig ist mit dem Axiomensystem* 1°—7° *mit der Einsetzungsregel* E^*. Beim ersten System sind das Produkt, die Implikation und die Inklusion abgeleitete Begriffe, beim zweiten System gilt das von der Implikation und der Assertion.

Das zweite Axiomensystem zeigt, dass der erweiterte Aussagenkalkül als eine Art BOOLE'scher Algebra zu betrachten ist, deren Elemente abzählbar unendlich viele sind, und in der nur die in ihren Axiomen enthaltenen Schlussschemata (und die aus diesen ableitbaren) erlaubt sind.

§ 7. *Die beiden einander gleichwertigen Axiomensysteme sind widerspruchsfrei* in dem Sinne, dass $X \doteq \bar{\nu}$ (oder $X = \nu$) in den Systemen nicht ableitbar ist.

Um diese Widerspruchsfreiheit einzusehen fügen wir den (nach Annahme endlich oder abzählbar unendlich vielen) elementaren Kalkülformeln $A, B, \ldots, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ arithmetische Werte zu, welche nur 0 oder 1 sein können. $A + B$ ($\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$) ordnen wir den Wert 0 zu, falls A ($\mathfrak{A}$) und B ($\mathfrak{B}$) der Wert 0 zugeordnet ist; sonst den Wert 1. A' ($\mathfrak{A}'$) sei der Wert 1 zugeordnet, falls A ($\mathfrak{A}$) 0 zugeordnet ist, und umgekehrt.

Welche Werte X, Y und Z auch zugeordnet sind, in allen Fällen ist den in den Axiomen I—IV im Vorderglied vorkommenden Kalkülformeln derselbe Wert (und zwar 1) zugeordnet.

Wendet man auf die in $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ vorkommende Kalkülformel $\mathfrak{A}$ die Einsetzungsregel E an, wobei sie in $\mathfrak{B}$ übergehen soll, und ist $\mathfrak{A}$ immer der Wert 1 zugeordnet (wie auch die in ihr auftretenden elementaren Aussagen bewertet sind), so ist klar, dass dasselbe von $\mathfrak{B}$ gilt.

Schliesslich führt Anwendung des Schlussschemas S von $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ und $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \doteq \bar{\nu}$, wobei $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ immer der Wert 1 zugeordnet sein soll, zu einem Theorem $\mathfrak{B} \doteq \bar{\nu}$, wobei auch $\mathfrak{B}$ dieser Wert zukommt.

Weist man noch λ den Wert 0, ν den Wert 1 zu, so liefern auch die Vorderglieder der Axiome V und VI immer den Wert 1.

Daraus folgt schon unsere Behauptung.

Ein zweites Beweisverfahren, welches das vorige als Spezialfall umfasst, ist folgendes. Wir betrachten eine Menge M von endlich vielen diskreten Elementen [14]. Den elementaren Mengen können als „Werte" die Teilmengen von M hinzugefügt werden (M selbst und die leere Menge mit eingeschlossen) [15]. Betrachten wir das zweite Axiomensystem. $A + B$ ($\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$) ordnen wir den „Wert" $T_1 + T_2$ (Summe der Mengen T_1 und T_2) zu, falls A ($\mathfrak{A}$) die Menge T_1 und B ($\mathfrak{B}$) die Menge T_2 zugeordnet ist; $A \cdot B$ ($\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$) sei dann die Produktmenge $T_1 \cdot T_2$ zugeordnet. A' ($\mathfrak{A}'$) sei die Komplementärmenge $C\,(T)$ oder $M - T$ als „Wert" zugeordnet, falls A ($\mathfrak{A}$) T zugeordnet ist. $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ soll dann gelten, wenn die $\mathfrak{A}$ zugeordnete Menge immer eine Teilmenge der $\mathfrak{B}$ zugeordneten Menge ist, wie auch den in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ vorkommenden elementaren Kalkülformeln Teilmengen von M zugeordnet sind. Schliesslich sei λ die leere Menge, ν die Menge M selbst zugeordnet.

Es ist sofort klar, dass die Axiome $1°$—$7°$ sich in richtige Behauptungen über die Teilmengen von M übersetzen. Ist $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ ableitbar, so ist jede $\mathfrak{A}$ zugeordnete Teilmenge von M Teil der $\mathfrak{B}$ gleichzeitig zugeordneten Menge; dies bleibt so für $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{E}$, wenn diese Inklusion mittels der Einsetzungsregel E^* aus der ersten hervorgeht.

Daraus folgt, dass $X \doteq \bar{\nu}$ oder $X = \nu$ oder „$X \subset \nu$ und $\nu \subset X$" nicht ableitbar ist. Denn jeder „Wert" von X, welcher nicht gleich der vollen Menge M ist, gibt eine unrichtige Behauptung über endliche Mengen [16].

Eine leichte Abänderung des zweiten Beweisverfahrens wird uns später nützlich sein. Man hätte für die elementaren Kalkülformeln als „Werte" nur die n ($\geqq 1$) aus einem einzelnen Punkt aufgebauten Teilmengen von M zulassen können; natürlich gibt es auch dann zu jeder Teilmenge T von M Kalkülformeln, welche T als „Wert" zulassen.

Das zweite Beweisverfahren zeigt, dass der erweiterte Aussagenkalkül, und somit auch der RUSSELL–WHITEHEAD'sche Aussagenkalkül, *ein 2^n-wertiger Kalkül* ist; der Namen von zweiwertigem Kalkül für den Kalkül von RUSSELL und WHITEHEAD ist somit nicht ganz zutreffend.

§ 8. *Jedes der Axiome I—VI ist, unter Annahme von Einsetzungsregel E und Schlussschema S, von den übrigen unabhängig.*

Axiom V lässt sich mit Regel E und Schlussschema S nicht aus den übrigen Axiomen ableiten; wäre dies wohl möglich, somit $(\lambda' + U) \doteq \bar{\nu}$

---

[14] Zum ersten Verfahren kommt man durch Betrachtung einer aus einem einzelnen Element aufgebauten Menge; diese Menge sei dann 1, die leere Menge 0 genannt.

[15] Enthält M n Elemente, so ist ihre Anzahl 2^n.

[16] Ausgehend vom ersten Axiomensystem genügen die im Texte angenommenen Zuordnungen, welche sich auf die Disjunktion, das Komplement, λ und ν beziehen. Für die Theoreme $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ (und nur für diese) wird dann $\mathfrak{A}$ immer die volle Menge M zugeordnet sein. $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, d.h. das Theorem $(\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}) \doteq \bar{\nu}$, liefert dann wieder, dass bei jeder Zuordnung von „Werten" zu den elementaren Kalkülformeln die $\mathfrak{A}$ zugeordnete Menge eine Teilmenge der $\mathfrak{B}$ zugeordneten Menge sein wird.

ableitbar, so müsste, da die Rolle einer grossen lateinischen Buchstaben in Einsetzungsregel E und in den Axiomen I—IV, VI sich durch λ übernehmen lässt, auch $(X' + U) \doteq \bar{\nu}$ ableitbar sein; die Bewertung von § 7 Anfang zeigt jedoch, dass dies unmöglich ist (man ordne X den Wert 1, U den Wert 0 zu).

In analoger Weise lässt sich die Unabhängigkeit des Axioms VI von den übrigen Axiomen, Regel E und Schema S beweisen.

Dass jedes der Axiome I—IV, unter Annahme von Regel E und Schema S, von den übrigen und den Axiomen V und VI unabhängig ist, zeigen vier Bewertungen in H.–A., Kap. 1, § 13, falls man dabei noch für λ bzw. nur den Wert 1 (mod 4), 1,1 und 1, für ν bzw. nur den Wert 0 (mod 4), 0,0 und 0 zulässt.

Das Schlussschema S ist, unter Annahme der Einsetzungsregel E, von den Axiomen I—VI unabhängig. Alle Axiome enthalten nämlich Kalkülformeln der Gestalt $\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}$, und Regel E liefert nur wieder Formeln dieser Art, so dass ein Theorem $(X + X') \doteq \bar{\nu}$ sich nicht ableiten lässt; dies wäre jedoch wohl der Fall, wenn das Schema S sich anwenden liesse.

Die Einsetzungsregel E ist von den Axiomen I—VI und dem Schlussschema S unabhängig. Denn das Schlussschema S allein liefert nicht die Möglichkeit zu einem Theorem zu gelangen, welches von den in den Axiomen enthaltenen verschieden ist.

§ 9. Ebenso wie im R.–W. Aussagenkalkül werden in unserem erweiterten Aussagenkalkül *die Theoreme $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ dadurch charakterisiert, dass in der (immer vorhandenen) konjunktiven Normalform von $\mathfrak{A}$ in jeder Disjunktion mindestens eine elementare Aussage zugleich mit ihrem Komplement auftritt* [17].

Der erweiterte Kalkül ist, ebenso wie der von R. u. W., *vollständig in dem Sinne, dass durch die Hinzufügung eines nicht ableitbaren Ausdrucks* $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ (diese gehöre somit nicht zu den Theoremen im Sinne der Definition von § 1) *zu dem System von Axiomen stets $X \doteq \bar{\nu}$ ableitbar wird* [18]).

§ 10. Definition. $\mathfrak{A} \Longrightarrow \mathfrak{B}$ ist eine andere Schreibweise von $\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{B}$. $X \to Y$ und $X \Longrightarrow Y$ stehen somit einander dual gegenüber gemäss dem Dualitätsprinzip (§ 3), α) [19]).

Aus diesem Dualitätsprinzip folgt:

Satz 42. *Ist $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ ein Theorem im Sinne von § 1, so auch $\mathfrak{B}' \doteq \bar{\nu}$; dabei gehe Kalkülformel $\mathfrak{B}$ aus Kalkülformel $\mathfrak{A}$ dadurch hervor, dass: α) $+$ durch $\cdot$, und umgekehrt, β) λ durch ν, und umgekehrt, γ) $\to$ durch*

[17]) Vergl. HILBERT–ACKERMANN, loc. cit. 1), S. 12, 31. Die Theoreme unseres erweiterten Aussagenkulküls, welche λ und ν nicht enthalten, und die Theoreme des R.–W. Aussagenkalküls bilden somit dieselbe Klasse.

[18]) Vergl. HILBERT–ACKERMANN, loc. cit. 1), S. 35.

[19]) Definiert man $X \Longleftrightarrow Y$ als eine andere Schreibweise von $(X' . Y) + (Y' . X)$, so gilt dasselbe von $X \longleftrightarrow Y$ und $X \Longleftrightarrow Y$.

$\Longrightarrow$, und umgekehrt, ersetzt wird; ev. vorkommende Akzenten sollen ungeändert bleiben.

Beweis. $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ oder auch $\mathfrak{A} = \nu$, also nach dem Dualitätsprinzip: $\mathfrak{B} = \lambda$, oder $\mathfrak{B}' = \nu$ (Satz 10, 11, 15) oder $\mathfrak{B}' \doteq \bar{\nu}$.

Auch bei Beschränkung auf Theoreme, welche λ und ν nicht enthalten, d.h. bei Beschränkung auf die Theoreme des R.–W. Aussagenkalküls, führt Satz 42 über das in HILBERT–ACKERMANN, loc. cit. 1), Kap. 1, § 5 vorkommende Dualitätsprinzip hinaus [20]).

Das Axiomensystem 1°—7° mit Einsetzungsregel E^* steht dual gegenüber dem aus den Axiomen 1°, 2°, 3°, 5°, 6°, 7° und Satz 22 mit Einsetzungsregel E^* gebildeten, gleichwertigen System.

Das Axiomensystem I—VI mit Einsetzungsregel E und Schlussschema S steht dual gegenüber folgendem System, auf welchem sich der verallgemeinerte Aussagenkalkül ebenfalls aufbauen lässt.

Einsetzungsregel E_0, aus E hervorgehend durch Aenderung von $\mathfrak{R} + \mathfrak{S}$ in $\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{S}$.

Schlussschema S_0. Sind

$$\mathfrak{A}' \doteq \bar{\nu} \text{ und } [\mathfrak{A} \Longrightarrow \mathfrak{B}]' \doteq \bar{\nu}$$

Theoreme, so ist auch

$$\mathfrak{B}' \doteq \bar{\nu}$$

ein Theorem.

Axiom I_0. $[(X \cdot X) \Longrightarrow X]' \doteq \bar{\nu}$.

Axiom II_0. $[X \Longrightarrow (X \cdot Y)]' \doteq \bar{\nu}$.

Axiom III_0. $[(X \cdot Y) \Longrightarrow (Y \cdot X)]' \doteq \bar{\nu}$.

Axiom IV_0. $[(Y \Longrightarrow Z) \Longrightarrow \{(X \cdot Y) \Longrightarrow (X \cdot Z)\}]' \doteq \bar{\nu}$.

Die undefinierten Grundverknüpfungen sind hier *und* und *nicht-* (*Komplement von*), bzw. angedeutet durch $\cdot$ und ein Akzent; $\mathfrak{A} \Longrightarrow \mathfrak{B}$ wird definiert als eine andere Schreibweise von $\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{B}$. Die Definition eines Theorems weicht insofern von der Definition des § 1 ab, dass Regel E_0, Schema S_0 und die Axiome I_0—VI_0 Regel E, Schema S und die Axiome I—VI ersetzen sollen.

Axiom $\mathrm{V}_0 \cdot [\nu \Longrightarrow X]' \doteq \bar{\nu}$.

Axiom $\mathrm{VI}_0 \cdot [X \Longrightarrow \lambda]' \doteq \bar{\nu}$.

§ 11. Der erweiterte Aussagenkalkül ist als *Aussagenkalkül einer elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung* zu betrachten, und hat damit auch

---

[20]) Das beweist man wie folgt. Es sei $(\mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{B}) \doteq \bar{\nu}$ ein Theorem, wobei $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ λ und ν nicht enthalten, und in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nur $+$, ., und das Akzent als Operationszeichen vorkommen, wie dies von HILBERT und ACKERMANN vorausgesetzt wird. Dann folgt aus Satz 42, dass $(\overline{\mathfrak{A}} \Longleftrightarrow \overline{\mathfrak{B}})' \doteq \bar{\nu}$ ein Theorem ist, wobei $\overline{\mathfrak{A}}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$ aus $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ durch Vertauschung von $+$ und . hervorgehen. Also ist $\{[(\overline{\mathfrak{A}})' . \overline{\mathfrak{B}}] + [(\overline{\mathfrak{B}})' . \overline{\mathfrak{A}}]\}' = \nu$, oder $\{[\overline{\mathfrak{A}} + (\overline{\mathfrak{B}})'] . [\overline{\mathfrak{B}} + (\overline{\mathfrak{A}})']\} = \nu$, oder schliesslich $(\overline{\mathfrak{A}} \longleftrightarrow \overline{\mathfrak{B}}) \doteq \bar{\nu}$; das ist das duale Theorem im Sinne von HILBERT und ACKERMANN.

als mehrwertiger Kalkül eine inhaltliche Deutung: den elementaren Aussagen $A, B, \ldots, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ (deren Anzahl nach Annahme endlich oder abzählbar unendlich sein soll) seien als „Werte" die n Mengen zugeordnet, deren jede aus einem einzelnen von n einander ausschliessenden elementaren Ereignissen besteht ($n \geqq 2$). λ sei die leere, also die keines der elementaren Ereignisse enthaltende Menge als einzig möglichen „Wert" hinzugefügt, ν möge die Menge aller elementaren Ereignisse als einzigen „Wert" haben. Ist die Menge p von elementaren Ereignissen einer der möglichen „Werte" von $\mathfrak{A}$, die Menge q von elementaren Ereignissen einer der möglichen „Werte" von $\mathfrak{B}$, so sei die Menge $p + q$ einer der möglichen „Werte" von $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, und $p \cdot q$ einer der möglichen „Werte" von $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$; die Menge der zu $\mathfrak{A}'$ gehörenden „Werte" enthalte alle und nur alle diejenigen Mengen von elementaren Ereignissen, deren Komplement in bezug auf die Menge aller n elementaren Ereignisse einen „Wert" von $\mathfrak{A}$ liefert.

Ein Theorem $\mathfrak{A} \doteq \nu$ hat die inhaltliche Bedeutung, dass „Wert" von $\mathfrak{A}$ nur die Menge aller n elementaren Ereignisse ist, wie auch die in $\mathfrak{A}$ vorkommenden elementaren Kalkülformeln (zulässige) „Werte" zugeordnet sind.

Die in § 7 angedeutete Abänderung des zweiten Beweisverfahrens für die Widerspruchsfreiheit des erweiterten Aussagenkalküls zeigt unmittelbar die Möglichkeit obiger Interpretation.

Der erweiterte engere Prädikatenkalkül.

§ 12. Was den Prädikatenkalkül betrifft, können wir uns nach dem Vorigen kurz fassen.

Einen ersten Aufbau erhält man dadurch, dass man neben den Axiomen I—VI und Schlussschema S einführt: 1° eine Abänderung der Einsetzungsregel E (und somit nebenbei der Definition der Kalkülformeln) gemäss H.-A., S. 54 (1—5), mit der Hinzufügung, dass auch λ und ν Kalkülformeln sind, und S. 56, 57 (α 1), 2), 3)); 2° die Umbenennungsregel δ) in H.-A., S. 57; 3° die beiden folgenden Axiome: VII. $[(x)F(x) \rightarrow F(y)] \doteq \nu$, VIII. $[F(y) \rightarrow (Ex)F(x)] \doteq \nu$; 4° die Schlussschemata: S_1 · ist $[\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(x)] \doteq \nu$, wobei die freie Variable x nur in $\mathfrak{B}$ vorkommt, ein Theorem, so auch $[\mathfrak{A} \rightarrow (x)\mathfrak{B}(x)] \doteq \nu$, S_2 · ist $[\mathfrak{B}(x) \rightarrow \mathfrak{A}] \doteq \nu$ ein Theorem, wobei die freie Variable x nur in $\mathfrak{B}$ vorkommt, so ist auch $[(Ex)\mathfrak{B}(x) \rightarrow \mathfrak{A}] \doteq \nu$ ein Theorem.

Wie man *einen völlig aequivalenten Aufbau* durch Erweiterung des von den Axiomen 1°—7° und Einsetzungsregel E^* gebildeten Systems erhält, ist fast evident; der Wortlaut der Regel E^* in ihrer abgeänderten Form und der der neu hinzukommenden Umbenennungsregel liegen auf der Hand; als Axiome kommen hinzu: Ax. 8° $[(x)F(x)] \subset F(y)$, Ax. 9° $F(y) \subset (Ex)F(x)$, als Schlussschemata: $S_1{}^*$ · lässt sich schreiben $\mathfrak{A} \subset [\mathfrak{B}(x)]$, wobei die freie Variable x nur in $\mathfrak{B}$ vorkommt, so auch

$\mathfrak{A} \subset [(x)\mathfrak{B}(x)]$, S_2^* · lässt sich schreiben $[\mathfrak{B}(x)] \subset \mathfrak{A}$, wobei die freie Variable x nur in $\mathfrak{B}$ vorkommt, so auch $[(Ex)\mathfrak{B}(x)] \subset \mathfrak{A}$.

D a s D u a l i t ä t s p r i n z i p behält seine Gültigkeit im erweiterten Prädikatenkalkül, wenn man zu den angegebenen Vertauschungen hinzufügt: δ) jedes Allzeichen ( ) soll durch ein Seinszeichen (E), und umgekehrt, ersetzt werden.

Dadurch lässt sich Satz 42 ausbreiten zu:

S a t z 42*. *Ist* $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ *ein Theorem des erweiterten Prädikatenkalküls, so auch* $\mathfrak{B}' \doteq \bar{\nu}$; *dabei gehe Kalkülformel* $\mathfrak{B}$ *aus Kalkülformel* $\mathfrak{A}$ *dadurch hervor, dass:* α) + *durch* ·, *und umgekehrt,* β) λ *durch* ν, *und umgekehrt,* γ) $\rightarrow$ *durch* $\Rightarrow$, *und umgekehrt, schliesslich:* δ) *jedes Allzeichen durch ein Seinszeichen, und umgekehrt, ersetzt wird.*

Auch bei Beschränkung auf Theoreme, welche λ und ν nicht enthalten, d.h. bei Beschränkung auf die Theoreme des (nicht erweiterten) engeren Prädikatenkalküls, führt Satz 42* über das in HILBERT–ACKERMANN, loc. cit. 1), Kap. 3, § 8 vorkommende Dualitätsprinzip hinaus [21]).

In dem erweiterten Prädikatenkalkül lässt sich jede Kalkülformel auf eine pränexe Normalform bringen, und gilt auch die durch den SKOLEM'schen Satz gelieferte Verschärfung dieses Resultates [22]).

§ 13. *Die beiden einander gleichwertigen Axiomensysteme des erweiterten Prädikatenkalküls sind widerspruchsfrei* in dem Sinne, dass $X \doteq \bar{\nu}$ (oder $X = \nu$) in den Systemen nicht ableitbar ist [23]).

Um die Widerspruchsfreiheit einzusehen fügen wir den (endlich oder abzählbar unendlich vielen) elementaren Kalkülformeln

$A, B, \ldots, A_1, \ldots, A_n, \ldots, A(x), \ldots, A_n(x), \ldots, A(x, y), \ldots, A_n(x, y), \ldots$
arithmetische Werte zu, welche nur 0 oder 1 sein können. Bei der Bewertung einer zusammengesetzten Kalkülformel werden Seins- und Allzeichen fortgelassen; $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ ordnen wir den Wert 0 zu, falls $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ der Wert 0 zugeordnet ist; sonst den Wert 1. $\mathfrak{A}'$ sei der Wert 1 zugeordnet, falls $\mathfrak{A}$ 0 zugeordnet ist, und umgekehrt.

Welche Werte X, Y, Z, $F(x)$ auch zugeordnet sind, in allen Fällen ist den in den Axiomen I—IV, VII, VIII im Vorderglied vorkommenden Kalkülformeln der Wert 1 zugeordnet.

Die Einsetzungsregel und die Umbenennungsregel führen immer von Theoremen $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$, bei welchen $\mathfrak{A}$ immer der Wert 1 zugeordnet ist, zu Theoremen $\mathfrak{B} \doteq \bar{\nu}$, bei denen dasselbe von $\mathfrak{B}$ gilt.

Schliesslich führt das Schlussschema S_1 von $[\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(x)] \doteq \bar{\nu}$, wobei $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(x)$ immer der Wert 1 zugeordnet ist, zu $[\mathfrak{A} \rightarrow (x)\mathfrak{B}(x)] \doteq \bar{\nu}$, wobei auch $\mathfrak{A} \rightarrow (x)\mathfrak{B}(x)$ immer dieser Wert zugeordnet ist; die Schemata S und S_2 haben die analogen Eigenschaften.

[21]) Zum Beweise vergleiche man das Verfahren in Fussn. 20.

[22]) Siehe H.-A., loc. cit. 1), S. 67, 68.

[23]) Anwendung des Dualitätsprinzips führt zu zwei weiteren gleichwertigen Systemen. Vergl. auch § 10.

Dadurch dass man λ den Wert 0, ν den Wert 1 zuweist, liefern die Vorderglieder der Axiome V und VI immer den Wert 1.

Daraus folgt obige Behauptung.

Auch das zweite Beweisverfahren von § 7 oder die zugehörige Abänderung hätten sich hier anwenden lassen.

Sie zeigen: 1° *dass der erweiterte engere Prädikatenkalkül auch ein* 2^n-*wertiger Kalkül ist* (n eine natürliche Zahl), 2° *dass er sich intuitiv als engerer Prädikatenkalkül einer elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung deuten lässt* [24]).

§ 14. *Die Axiome I—VIII, die Einsetzungsregeln* α 1), α 2), α 3), *die Umbenennungsregel* δ) *und die Schlussschemata* S, S_1 *und* S_2 *sind voneinander unabhängig.*

Den Beweis können wir unterdrücken; man hat nur die Betrachtungen von § 8 Anfang und von H.–A., loc. cit. 1), Kap. 3, § 8 zu benutzen.

Das soeben genannte System von Axiomen u.s.w. ist auch vollständig im GÖDEL'*schen Sinne* [25]) ebenso wie das in H.–A., Kap. 3 für den engeren Prädikatenkalkül gegebene System; die Ableitung ist fast dieselbe [26]). Auch in dem erweiterten engeren Prädikatenkalkül lässt sich das Entscheidungsproblem lösen bei Kalkülformeln, welche nur einstellige Prädikate enthalten, sowohl wenn wir den Kalkül 2-wertig wie wenn wir ihn 2^n-wertig ($n \geqq 2$) auffassen [27]).

---

[24]) Vergl. § 11.

[25]) Der hierbei angewandte Begriff der „identischen" Formel (siehe H.–A., loc. cit. 1), S. 55, 56) setzt Zweiwertigkeit der Aussagen und Prädikate voraus. Wie der Begriff zu verallgemeinern ist, wenn man n-wertige e l e m e n t a r e Aussagen und -Prädikate (und dabei höchstens 2^n-wertige zusammengesetzte Aussagen und -Prädikate) zulässt (n eine natürliche Zahl $\geqq 2$), liegt auf der Hand (vgl. auch §§ 7, 11 u. 13); nennen wir identische Formeln im neuen Sinne (n)-identische Formeln, so bleiben die in H.–A., S. 78 kursiv gedruckten Resultate gültig bei Benutzung von (n)-identischen Formeln ($n \geqq 2$) an Stelle der identischen. Auch ist es möglich schon die elementaren Formeln des Prädikatenkalküls als 2^n-wertig aufzufassen ($n \geqq 2$) und den Begriff der identischen Formeln in Uebereinstimmung damit so zu modifizieren, dass das GÖDEL'sche Resultat erhalten bleibt.

[26]) Vergl. H.–A., loc. cit. 1), Kap. 3, § 10.

[27]) Vergl. H.–A., loc. cit. 1), Kap. 3, § 12.