Mathematics. — *Einige einfache Anwendungen der areolären Ableitungen und -Derivierten.* By J. RIDDER. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of January 25, 1947.)

In der Arbeit: *Ueber areolär-harmonische Funktionen* [1]) führten wir areoläre Ableitungen und -Derivierte ein; jede mit — 1 multiplizierte areoläre Ableitung ist ein Beispiel eines generalisierten Laplaceschen Operators [2]). Hier lassen wir einige weitere Anwendungen dieser Ableitungen und Derivierten folgen.

§ 1. Definition 1. Die (endlich- und reellwertige) Intervallfunktion $\Phi(J)$ sei definiert für jedes Intervall J, das samt seinem Rande zu einem Bereiche B der xy-Ebene gehört. *Die obere und untere Derivierte von* $\Phi(J)$ *in einem Punkte* $(x, y) \in B$, $D^{+}_{(x,y)}\Phi(J)$ bzw. $D^{-}_{(x,y)}\Phi(J)$, seien definiert als

$$\limsup_{m(J)\to 0} \frac{\Phi(J)}{m(J)} \text{ bzw. } \liminf_{m(J)\to 0} \frac{\Phi(J)}{m(J)},$$

wobei J ein (achsenparalleles) Quadrat darstellt, das (x, y) im Innern oder auf dem Rande enthält. Sind sie einander gleich, so definiere ihr gemeinsamer Wert *die Ableitung*, $D_{(x,y)}\Phi(J)$, von $\Phi(J)$ — in (x, y).

Definition 2. Hat die reellwertige Funktion $u(x, y)$ in einem Bereiche B stetige partielle Ableitungen nach x und nach y, so seien *obere und untere areoläre Derivierte von* $u(x, y)$ *im Punkte* $(x, y) \in B$, $D^{+}_{(x,y)}\Phi_u(J)$ bzw. $D^{-}_{(x,y)}\Phi_u(J)$, die obere bzw. die untere Derivierte in (x, y) der zugehörigen Intervallfunktion $\Phi_u(J) \equiv \int\limits_{R(J)} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds$; dabei ist $R(J)$ der Rand von J, und $\frac{\partial u}{\partial n}$ die nach der inneren Normale genommenen Ableitung von $u(x, y)$. Sind obere und untere areoläre Derivierte einander gleich, so definiere ihr gemeinsamer Wert *die areoläre Ableitung*, $D_{(x,y)}\Phi_u(J)$, *von* $u(x, y)$ *in* (x, y).

Aus Satz 14 und der Bemerkung zu Satz 7ter in der zitierten Arbeit folgt:

Zu jeder in einem beschränkten Dirichletschen Bereiche B beschränkten und nach Lebesgue messbaren (reellwertigen) Funktion $\varphi(\xi, \eta)$ gibt es

[1]) Siehe Acta math. **78** (1946), S. 205—289.

[2]) Siehe loc. cit. [1]), S. 285.

eine und nur eine in B definierte (reellwertige) Funktion $u(\xi, \eta)$, welche auf dem Rande von B Grenzwerte $\equiv 0$ hat, und deren extreme areoläre Derivierte in B existieren, beschränkt und fast überall gleich $\varphi(\xi, \eta)$ sind. In jedem Punkte $(x, y) \in B$ ist

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_B g(\xi, \eta; x, y) \cdot \varphi(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta;$$

dabei ist $g(\xi, \eta; x, y)$ die Greensche Funktion von B für den Punkt (x, y).

Daraus lässt sich ableiten [3]) der

Satz 1. $g(\xi, \eta; x, y)$ sei die Greensche Funktion eines beschränkten Dirichletschen Bereiches B, mit Rand C, für den Punkt $(x, y) \in B$. Es seien weiter:

(1) L_2 die Klasse der in B definierten, komplexwertigen, nach Lebesgue messbaren Funktionen $f(\xi, \eta)$, für die $\iint\limits_B |f(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta$ existiert;

(2) $\mathfrak{D}$ die grösste Teilklasse von L_2, deren jede Funktion auf C Grenzwerte $\equiv 0$ hat, während Real- und Imaginärteil einer solchen Funktion in B beschränkte extreme areoläre Derivierte haben;

(3) $\mathfrak{R}$ die grösste Teilklasse von L_2, deren jede Funktion in B beschränkt ist; zwei Funktionen von $\mathfrak{R}$, welche nur in den Punkten einer Menge vom Lebesgueschen Masse Null verschieden sind, betrachten wir als identisch.

Der Operator T, für die zu $\mathfrak{D}$ gehörenden Funktionen $u + iv$ in fast allen Punkten von B definiert durch die Relation

$$D_{(x,y)} \Phi_u(J) + i D_{(x,y)} \Phi_v(J) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

liefert eine eineindeutige Abbildung von $\mathfrak{D}$ auf $\mathfrak{R}$; der inverse Operator von T ist ein Integraloperator mit symmetrischem Kern von Hilbert–Schmidt-Typus [4]) und mit dem Bereich $\mathfrak{R}$:

$$u(x, y) + iv(x, y) = T^{-1}[\varphi(x, y) + i\psi(x, y)] =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \iint\limits_B g(\xi, \eta; x, y) \cdot [\varphi(\xi, \eta) + i\psi(\xi, \eta)] \, d\xi \, d\eta.$$

Die Operatoren T und T^{-1} sind essentially, selbst-adjungiert [5]) in dem aus der Klasse L_2 in bekannter Weise hervorgehenden Hilbertschen Raum.

Das Analogon von Satz 1 gilt in jedem beschränkten Dirichletschen Bereiche des dreidimensionalen euklidischen Raumes.

---

[3]) Vergl. den Beweis von Theorem 3.13 in Stone, Linear transformations in Hilbert space, Am. Math. Soc. Coll. Publ., New-York 1932. Man beachte, dass der Wert der Greenschen Funktion $g(\xi, \eta; x, y)$ von B für den Punkt (x, y) in jedem Punkte $(\xi, \eta) \in B$ zwischen Null und $\log K + \log \dfrac{1}{\varrho(\xi, \eta; x, y)}$ liegt; dabei ist K eine (von B abhängige) Konstante $\geqq 1$.

[4]) Siehe die Definition in Stone, loc. cit. [3]), S. 101.

[5]) Siehe die Definition in Stone, loc. cit. [3]), S. 51 (Def. 2. 12).

§ 1bis. Definition 3. *Die zweite areoläre Ableitung* $u^{(2)}(x, y)$ oder $D_{(x,y)}\,\Phi_{u^{(1)}}(J)$ einer in einem Bereiche B definierten, reellwertigen Funktion $u(x, y)$ sei die areoläre Ableitung der (ersten) areolären Ableitung $u^{(1)}(x, y)$ oder $D_{(x,y)}\Phi_u(J)$. Im allgemeinen sei *die k-te areoläre Ableitung* $u^{(k)}(x, y)$ einer Funktion $u(x, y)$ die areoläre Ableitung der $(k-1)$-ten areolären Ableitung (k ganz und $\geqq 2$).

Hat eine reellwertige Funktion $u(x, y)$ in einem Bereiche B erste bis $(p-1)$-te areoläre Ableitungen (p ganz und $\geqq 2$), und sind die partiellen Ableitungen von $u^{(p-1)}(x, y)$ nach x und nach y in B vorhanden und stetig, so lassen sich in B *p-te obere und untere areoläre Derivierte* definieren als obere bzw. untere areoläre Derivierte von $u^{(p-1)}(x, y)$.

Aus Satz 27 (nebst letztem Absatz des zugehörigen Par.) und der Bemerkung II zu Satz 23ter in unserer Arbeit: Acta math. **78** (1946) folgt: Zu jeder in einem beschränkten Dirichletschen Bereiche B beschränkten und nach Lebesgue messbaren (reellwertigen) Funktion $\varphi(\xi, \eta)$ gibt es eine und nur eine in B definierte (reellwertige) Funktion $u(\xi, \eta)$, welche in B beschränkte p-te extreme areoläre Derivierte hat (p ganz und $\geqq 2$), und auf dem Rande — ebenso wie ihre ersten bis $(p-1)$-ten areolären Ableitungen — Grenzwerte $\equiv 0$ hat, während ihre sodann fast überall in B existierende p-te areoläre Ableitung fast überall in B gleich $\varphi(\xi, \eta)$ ist. In jedem Punkte $(x, y) \in B$ ist

$$u(x, y) = \frac{(-1)^{p-1}}{2\pi\, a_p} \iint\limits_B g_p(\xi, \eta; x, y) \cdot \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta;$$

dabei ist $g_p(\xi, \eta; x, y)$ die Greensche Funktion p-ter Ordnung von B für den Punkt (x, y) [6]; a_p hat den Wert $2^{2(p-1)}\{(p-1)!\}^2$.

Das Beweisverfahren des Satzes 3.13 in Stone, loc. cit. [3]) lässt daraus ableiten den

Satz 2. $g_p(\xi, \eta; x, y)$ sei die Greensche Funktion p-ter Ordnung eines beschränkten Dirichletschen Bereiches B, mit Rand C, für den Punkt $(x, y) \in B$. Es seien weiter:

(1) L_2 die Klasse der in B definierten, komplexwertigen, nach Lebesgue messbaren Funktionen $f(\xi, \eta)$, für die $\iint\limits_B |f(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta$ existiert;

(2) $\mathfrak{D}^{(p)}$ die grösste Teilklasse von L_2, deren jede Funktion, ebenso wie ihre existierend anzunehmenden, ersten bis $(p-1)$-ten areolären Ableitungen (p ganz und $\geqq 2$), auf C Grenzwerte $\equiv 0$ hat, während Real- und Imaginärteil einer solchen Funktion in B beschränkte p-te extreme areoläre Derivierte haben [7];

[6]) Siehe loc. cit. [1]), S. 255 (Def. 8). Für. $p \geqq 2$ hängt die Funktion $g_p(\xi, \eta; x, y)$ stetig von ξ, η, x und y ab; ausserdem ist für $(\xi, \eta) \in B$, $(x, y) \in B$ $g_p(\xi, \eta; x, y) = g_p(x, y; \xi, \eta)$. Zum Beweise benutze man die Darstellung von g_p loc. cit. [1]), S. 256 (Fussn. 63).

[7]) Man hat beim Beweise die Eigenschaft von $\mathfrak{D}^{(p)}$ zu benutzen, dass sie überall dicht liegt in dem von den Funktionen von L_2 gebildeten Hilbertschen Raum. Diese Eigenschaft lässt sich ableiten unter Anwendung von Formel (19), loc. cit. [1]), S. 225.

(3) $\mathfrak{R}$ die grösste Teilklasse von L_2, deren jede Funktion in B beschränkt ist; zwei Funktionen von $\mathfrak{R}$, welche nur in den Punkten einer Menge vom Lebesgueschen Masse Null verschieden sind, betrachten wir als identisch.

Der Operator $T^{(p)}$, für die zu $\mathfrak{D}^{(p)}$ gehörenden Funktionen $u + iv$ in fast allen Punkten von B definiert durch die Relation

$$u^{(p)}(x, y) + i\, v^{(p)}(x, y) = \varphi(x, y) + i\, \psi(x, y),$$

liefert eine eineindeutige Abbildung von $\mathfrak{D}^{(p)}$ auf $\mathfrak{R}$; der inverse Operator ist ein Integraloperator mit symmetrischem Kern von Hilbert–Schmidt-Typus [4]) und mit dem Bereich $\mathfrak{R}$:

$$u(x, y) + i\, v(x, y) = [T^{(p)}]^{-1}\, [\varphi(x, y) + i\, \psi(x, y)] =$$

$$\frac{(-1)^{p-1}}{2\pi\, a_p} \iint\limits_B g_p(\xi, \eta; x, y) \cdot [\varphi(\xi, \eta) + i\, \psi(\xi, \eta)]\, d\xi\, d\eta,$$

mit $a_p = 2^{2(p-1)} \cdot \{(p-1)!\}^2$. Die Operatoren $T^{(p)}$ und $[T^{(p)}]^{-1}$ sind ‚essentially' selbst-adjungiert [5]) in dem aus L_2 in bekannter Weise hervorgehenden Hilbertschen Raum.

Das Analogon von Satz 2 gilt in jedem beschränkten Dirichletschen Bereiche des dreidimensionalen euklidischen Raumes.

§ 2. Satz 3. $B, L_2, \mathfrak{D}, \mathfrak{R}$ und T mögen die gleiche Bedeutung haben wie in Satz 1. Dann gilt:

α) der Operator T hat abzählbar unendlich viele, von Null verschiedene, isoliert liegende Eigenwerte l_n, die nur reell sein können; $Tf - l \cdot f = 0$ hat für jeden Eigenwert $l = l_n$ ein System von nur endlich vielen, paarweise orthogonalen (und somit linear unabhängigen) Lösungen (Eigenfunktionen);

β) für jeden reellen oder komplexen Wert l, mit $l \neq l_n$ $(n = 1,2, \ldots)$, und $\chi(x, y) \in L_2$ hat $Tf - l \cdot f = \chi$ höchstens eine Lösung $f \in \mathfrak{D}$;

γ) die gemäss α) zu den verschiedenen l_n gehörigen Eigenfunktionen bilden ein vollständiges System im von den Funktionen der Klasse L_2 gebildeten Hilbertschen Raum.

Beweis. Da $T^{-1} f = 0$ nur die Lösung $f \equiv 0$ zulässt, sind die Eigenwerte von T^{-1} von Null verschieden.

Aus der Gleichwertigkeit der Gleichungen

$$T^{-1} f = l \cdot f \quad \text{und} \quad Tf = \frac{1}{l} \cdot f \qquad (l \neq 0)$$

folgt, dass die zu gegebenem $l \neq 0$ gehörenden Eigenfunktionen von T^{-1} gleichzeitig Eigenfunktionen von T für den Eigenwert $\frac{1}{l}$ sind, und umgekehrt.

Nun ist T^{-1} ein selbstadjungierter Operator mit endlicher Norm (in dem aus L_2 hervorgehenden Hilbertschen Raum). Ihre Eigenwerte sind somit reell, und bilden eine abzählbar unendliche isolierte Menge; zu jedem Eigenwert gehören endlich viele paarweise orthogonale Eigenfunktionen; diese bilden ein vollständiges System (im zugehörigen Hilbertschen Raum) [8]. Da Null kein Eigenwert von T ist, folgen hieraus schon die Behauptungen von Satz 3.

In derselben Weise beweist man den

Satz 4. B, L_2, $\mathfrak{D}^{(p)}$, $\mathfrak{R}$ und $T^{(p)}$ mögen die gleiche Bedeutung haben wie in Satz 2. Dann gilt:

α) der Operator $T^{(p)}$ hat abzählbar unendlich viele, von Null verschiedene, isoliert liegende Eigenwerte l_n, die nur reell sein können; $T^{(p)}f - l \cdot f = 0$ hat für jeden Eigenwert $l = l_n$ ein System von nur endlich vielen, paarweise orthogonalen Lösungen (Eigenfunktionen);

β) für jeden reellen oder komplexen Wert l, mit $l \neq l_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, und $\chi(x, y) \in L_2$ hat $T^{(p)}f - l \cdot f = \chi$ höchstens eine Lösung $f \in \mathfrak{D}^{(p)}$;

γ) die gemäss α) zu den verschiedenen l_n gehörigen Eigenfunktionen bilden ein vollständiges System im zugehörigen Hilbertschen Raum.

Die Analoga der Sätze 3 und 4 gelten im dreidimensionalen euklidischen Raum.

§ 3. Der eindimensionale Fall. Als Analoga zu den areolären Ableitungen und -extremen Derivierten haben wir hier die mit -1 multiplizierten, zweiten Ableitung bzw. zweiten extremen Derivierten; die Existenz der ersten Ableitung wird dabei vorausgesetzt.

Betrachten wir als Greensche Funktion des Intervalles $(0, l)$ für den Punkt $x \in (0, l)$ die Funktion $g(\xi, x)$, definiert durch:

$$g(\xi, x) = \frac{\xi\,(l-x)}{l}, \text{ falls } 0 < \xi \leqq x,$$

und durch:

$$g(\xi, x) = \frac{x\,(l-\xi)}{l}, \text{ falls } x < \xi < l.$$

Man beweist dann leicht:

Zu jedem in $(0, l)$ beschränkten und nach Lebesgue messbaren (reellwertigen) Funktion $\varphi(\xi)$ gibt es eine und nur eine in $(0, l)$ definierte (reellwertige) Funktion $u(\xi)$, welche in 0 und l Grenzwerte Null hat, und deren obere und untere Derivierte zweiter Ordnung in $(0, l)$ existieren, beschränkt und fast überall gleich $-\varphi(\xi)$ sind. In jedem Punkte $x \in (0, l)$ ist

$$u(x) = \int_0^l g(\xi, x) \cdot \varphi(\xi)\, d\xi,$$

mit $g(\xi, x)$ als Greensche Funktion von $(0, l)$ für den Punkt x.

---

[8]) Siehe Stone, loc. cit. [3]), S. 193 (Th. 5. 14).

Die Analoga der Sätze 1 und 3 für den eindim. Fall liegen hiernach auf der Hand.

Als Analoga zu den p-ten areolären Ableitungen und -extremen Derivierten haben wir hier die mit $(-1)^p$ multiplizierten, $2p$-ten Ableitung bzw. $2p$-ten extremen Derivierten [9]).

Betrachten wir als Greensche Funktion p-ter Ordnung des Intervalls $(0, l)$ für den Punkt $x \in (0, l)$ die Funktion $g_p(\xi, x)$, welche folgenden Bedingungen genügt: ihre $2p$-ten extremen Derivierten existieren, und haben den Wert Null in allen von x verschiedenen Punkten von $(0, l)$; in 0 und in l haben g_p und ihre 2-ten, 4-ten bis $(2p-2)$-ten Ableitungen Grenzwerte gleich Null; es ist $\frac{d^{2p-1} g}{d x^{2p-1}}(x+0) - \frac{d^{2p-1} g}{d x^{2p-1}}(x-0) = 1$. g ist durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt [10]).

Man beweist wieder leicht:

Zu jedem in $(0, l)$ beschränkten und nach Lebesgue messbaren (reellwertigen) Funktion $\varphi(\xi)$ gibt es eine und nur eine in $(0, l)$ definierte (reellwertige) Funktion $u(\xi)$, welche in 0 und l, ebenso wie ihre 2-ten, 4-ten bis $(2p-2)$-ten Ableitungen, Grenzwerte Null hat, und deren obere und untere Derivierte $2p$-ter Ordnung in $(0, l)$ existieren, beschränkt und fast überall gleich $-\varphi(\xi)$ sind. In jedem Punkte $x \in (0, l)$ ist

$$u(x) = \int_0^l g_p(\xi, x) \cdot \varphi(\xi)\, d\xi,$$

mit $g_p(\xi, x)$ als Greensche Funktion p-ter Ordnung von $(0, l)$ für den Punkt x.

Die Analoga der Sätze 2 und 4 für den eindim. Fall liegen nun wieder auf der Hand.

---

[9]) Vergl. loc. cit. [1]), S. 211 u. 262 (Fussn. 68).

[10]) Vergl. Bôcher, Leçons sur les méthodes de Sturm dans la théorie des équations différentielles linéaires, Coll. Borel, Paris 1917, Kap. 5, insbes. S. 100.