Mathematics. — *Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles, qui, comme les systèmes normaux, comportent autant d'équations que de fonctions inconnues* (troisième communication). By A. FINZI. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of February 22, 1947.)

§ VI.

Systèmes auxquels on ne peut pas appliquer les considérations du § II *ou du* § V.

On a vu dans le paragraphe précédent que s'il est possible de déduire des équations (1) une système normal d'ordre $h^{(l)}$, les (1) admettent une solution et une seule quand on donne des valeurs initiales des φ et de leurs $h^{(l)}-1$ premières dérivées satisfaisant à $n(h^{(l)}-h)+l$ conditions. Quand $l>hn$, le nombre des conditions deviendrait plus grand que celui des fonctions à donner.

Mais nous montrerons que si les hn premiers systèmes, qui se déduisent du système donné par la méthode des §§ II et V, ne sont pas normaux, il existe entre les F, les Φ et leurs dérivées une identité de la forme

$$\Psi(F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots, \Phi, \ldots, x)=0. \tag{12}$$

Si une Φ_μ ($\mu=1, 2, \ldots, nh+1$) est identiquement nulle, la proposition est démontrée, parce que Φ_μ elle-même constitue la relation cherchée. Dans le cas contraire nous savons que des (1) on peut déduire les $nh+1$ combinaisons $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{nh+1}$ d'ordre $h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots, h^{(hn+1)}$.

Φ_1 est, comme on l'a vu, une combinaison linéaire entre les dérivées des F d'ordre $h^{(1)}+1$ en φ, Φ_2 est une combinaison entre les dérivées de Φ_1 et des F d'ordre $h^{(2)}+1$ en φ; enfin Φ_{nh+1} est une combinaison entre les dérivées de Φ_{nh} et des F d'ordre $h^{(nh+1)}+1$ en φ.

Choisissons maintenant un nombre

$$\bar{h} \geqq h^{(nh+1)}$$

et considérons le nombre des fonctions indépendantes des F et des leurs dérivées, qui ne contiennent pas de dérivées des inconnues φ d'ordre supérieur a $\bar{h}$.

Parmi ces fonctions nous pouvons prendre en premier lieu les F elles-mêmes et leurs dérivées jusqu'à l'ordre $\bar{h}-h$.

Prenons ensuite les dérivées d'ordre $\bar{h}-h^{(1)}$ de Φ_1; celles d'ordre inférieur ne sont en effet que des combinaisons entre les dérivées des F d'ordre, par rapport aux inconnues φ, inférieur où égal à $\bar{h}$ et ne peuvent donc pas constituer de nouvelles expressions indépendantes.

Puis prenons les dérivées d'ordre $\bar{h}-h^{(2)}$ de Φ_2, puisque celles d'ordre inférieur sont des combinaisons des dérivées de Φ_1 et des F d'ordre, par rapport à φ, ne dépassant pas $\bar{h}$.

Procédons d'une manière analogue pour les relations successives et ainsi, finalement, prenons les dérivées de Φ_{nh+1} d'ordre $\bar{h} - h^{(nh+1)}$.

Nous voulons montrer que lorsqu'on fait augmenter $\bar{h}$, le nombre des expressions considérées arrive à dépasser le nombre total des φ et de leurs dérivées dont elles dépendent. Ces arguments sont en nombre égal à celui des dérivées d'ordre non supérieur à $\bar{h}$ d'une fonction de $m+1$ variables, augmenté de 1 et multiplié par n. Les F et leurs dérivées jusqu'à l'ordre $\bar{h} - h$ sont, d'autre part, en nombre égal à celui des dérivées d'ordre non supérieur à $\bar{h} - h$ d'une fonction de $m+1$ variables, augmenté aussi de 1 et multiplié par n.

La différence de ces deux nombres est égale au nombre total des dérivées d'ordre $\bar{h} - h + 1$, $\bar{h} - h + 2, \ldots, \bar{h}$ d'une fonction de $m+1$ variables, multiplié par n: il est certainement plus petit que celui des dérivées d'ordre $\bar{h}$ de la fonction, multiplié par hn, c'est à dire $hn \dfrac{(m+\bar{h})!}{m!\,\bar{h}!}$.

Il y a aussi, parmi les expressions à considérer, et comme on l'a vu, les dérivées d'ordre $\bar{h} - h^{(1)}$ de Φ_1, celles d'ordre $\bar{h} - h^{(2)}$ de Φ_2 et, enfin, celles d'ordre $\bar{h} - h^{(nh+1)}$ de Φ_{nh+1}: leur nombre total sera certainement supérieur au nombre des dérivées d'ordre $\bar{h} - h^{(nh+1)}$ d'une fonction de $m+1$ variables, multiplié par $nh+1$, c.-à-d. $(nh+1)\dfrac{(m+\bar{h}-h^{(nh+1)})!}{m!\,(\bar{h}-h^{(nh+1)})!}$.

Lorsque $\bar{h}$ augmente indéfiniment, le rapport entre les nombres

$$(nh+1)\frac{(m+\bar{h}-h^{(nh+1)})!}{m!\,(\bar{h}-h^{(nh+1)})!} \quad \text{et} \quad nh\frac{(m+\bar{h})!}{m!\,\bar{h}!} \quad \text{tend vers} \quad \frac{nh+1}{nh} > 1.$$

Le nombre des expressions considérées devient donc supérieur à celui des arguments dont elles dépendent: il doit donc exister entre les F, les Φ et leurs dérivées une relation identique comme la (12).

§ VII.

Existence des solutions pour les systèmes considérés au § précédent.

Comme nous avons vu au paragraphe précédent, la relation (12) est une identité en φ; elle doit donc être, en particulier, satisfaite si l'on prend pour les φ une solution éventuelle des (1).

Cela équivaut à dire que (12) elle-même est nécessairement vérifiée par des valeurs nulles des F, des Φ et de leurs dérivées: au cas contraire elle constituerait une relation absurde pour le système donné qui ne pourrait pas admettre de solution.

Si nous supposons, comme cela est toujours possible, que la caractéristique de la matrice obtenue en supprimant la première ligne de Ω est égale à

$n-1$, nous pouvons certainement construire une expression différentielle convenable Z, d'ordre h en φ, telle que le système

$$F_1^* = F_1 + Z = 0, \qquad (13)$$
$$F_i = 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

soit normal.

Puisque, comme nous l'avons vu, la relation (12) doit être vérifiée par les valeurs nulles des F, des Φ et de leurs dérivées, l'équation

$$\Psi(F_1^*, F_2, \ldots, F_n, \ldots, \Phi^*, \ldots, x) = 0 \qquad (12^1)$$

(Φ^* étant les combinaisons qu'on obtient des Φ en substituant F_1^* à F_1) sera satisfaite si l'on prend pour les φ une solution du système normal (13).

La relation (12^1) constitue donc une équation différentielle qui doit être satisfaite par Z, définie par la solution du même système (13).

Cette équation doit admettre nécessairement la solution nulle: en effet quand on prend

$$Z = 0, \qquad (14)$$

(12^1) se réduit à (12) et par conséquent est certainement satisfaite. Désignons maintenant par h^* l'ordre de la dérivée la plus élevée de F_1 en (12) et supposons que (12^1), considérée comme une équation en Z, soit normale par rapport à z^0.

Il découle alors de ce qui a été dit que si Z est nulle ainsi que ses premières h^*-1 dérivées sur la surface

$$z^0(x^0, x^1, \ldots, x^m) = 0 \qquad (6)$$

pour une solution du système normal (13), il devra être partout

$$Z = 0 \qquad (14)$$

et la même solution vérifiera aussi le système donné (1).

On voit tout de suite la différence substantielle entre le cas présent et celui étudié aux § II et V.

Nous devons maintenant assigner, sur la surface portante, les φ et leurs premières $h-1$ dérivées assujetties à h^* conditions convenables; mais la solution du système donné n'est pas déterminée d'une manière univoque. On peut, au contraire, imposer à la solution elle-même une autre condition différentielle.

$$Z = 0 \qquad (14)$$

dans tout le domaine de définition.

Comme on l'a observé au numéro 5 de la préface, un système d'un tel type peut donc être comparé, de ce point de vue, à un système de $n-1$ équations de n fonctions inconnues.

Mais naturellement si $h^* > hn$ on devra prendre Z de façon que, par un choix convenable des valeurs initiales, il soit possible de satisfaire, avec la solution du système normal, les h^* conditions en question.

§ VIII.

Lemme relatif aux combinaisons Φ.

On a vu au § V que le système (1) admet une solution et une seule quand on se donne, sur $x^0 = a$, les φ et leurs $h^{(l)} - 1$ dérivées assujetties à $(h^{(l)} - h)n + l$ conditions.

L'analogie avec la théorie des systèmes normaux conduit à se demander s'il suffit de se donner les φ et leurs $h - 1$ premières dérivées seulement, assujetties naturellement à l conditions.

Nous verrons au paragraphe suivant que la réponse est affirmative quand la condition suivante est satisfaite:

Les coefficients des dérivées des φ d'ordre h, que nous désignerons maintenant par $E_{(0)}$, ne contiennent pas de dérivées des φ d'ordre supérieur à $h - l + 1$; les coefficients des dérivées des φ d'ordre $h - 1$, que nous désignerons par $E_{(1)}$, ne contiennent pas de dérivées d'ordre supérieur à $h - l + 2$, et en général les coefficients des dérivées d'ordre $h - r$, que nous désignerons par $E_{(r)}$, ne contiennent pas de dérivées d'ordre supérieur à $h - l + r + 1$. Dans cette hypothèse plus générale rentre en particulier le cas d'un système d'équations linéaires et celui de $l = 1$.

Nous devrons faire, dans ce paragraphe, quelques considérations préliminaires.

Etant donnée, en premier lieu, une équation différentielle satisfaisante à la condition énoncée, supposons d'abord, pour plus de simplicité, qu'elle ne comporte que des dérivées ordinaires

$$\Sigma_j E^j_{(0)} \frac{\partial^h \varphi_j}{\partial x^h} + \ldots + \Sigma_j E^j_{(s)} \frac{\partial^{h-s} \varphi_j}{\partial x^{h-s}} + \ldots + \Sigma_j E^j_{(r)} \frac{\partial^{h-r} \varphi_j}{\partial x^{h-r}} + \ldots = 0.$$

Sa dérivée d'ordre t sera donnée par

$$\Sigma_j E^j_{(0)} \frac{\partial^{h+t} \varphi_j}{\partial x^{h+t}} + \ldots + \Sigma_j \left[\binom{t}{s} \frac{\partial^s E^j_{(0)}}{\partial x^s} + \ldots + E^j_{(s)} \right] \frac{\partial^{h+t-s} \varphi_j}{\partial x^{h+t-s}} + \ldots +$$

$$+ \Sigma_j \left[\binom{t}{r} \frac{\partial^r E^j_{(0)}}{\partial x^r} + \ldots + \binom{t}{r-s} \frac{\partial^{r-s} E^j_{(s)}}{\partial x^{r-s}} + \ldots + E^j_{(r)} \right] \frac{\partial^{h+t-r} \varphi_j}{\partial x^{h+t-r}} + \ldots = 0.$$

Nous pouvons observer que les coefficients des dérivées des φ_j d'ordre $h + t - r$ ne peuvent pas contenir de dérivées des $E_{(s)}$ d'ordre supérieur à $r - s$, et que, ensuite les $E_{(r)}$ y entrent seulement en termes finis.

Une conclusion analogue est aussi valable pour une équation aux dérivées partielles.

Nous nous servirons de cette simple observation pour démontrer un lemme relatif à la structure des expressions Φ_μ.

Φ_μ peut être regardée comme une combinaison entre les dérivées des F jusqu'à celles d'ordre $h^{(\mu)} - h + \mu$.

Nous voulons maintenant démontrer que le coefficient d'une dérivée d'ordre $h^{(\mu)} - h + \mu - \nu$ peut contenir les $E_{(\nu)}$ seulement en termes finis et les dérivées des $E_{(\nu-p)}$ seulement jusqu'à l'ordre p.

Le lemme est certainement exact pour Φ_1: en effet Φ_1 est une combinaison entre les dérivées des F d'ordre $h^{(1)} - h + 1$ et les coefficients de celles-ci contiennent les $E_{(0)}$ en termes finis.

Il reste donc à démontrer que si notre lemme est exact pour Φ_μ il l'est aussi pour $\Phi_{\mu+1}$.

Il s'agit évidemment de faire voir que dans $\Phi_{\mu+1}$ les coefficients des dérivées des F d'ordre $h^{(\mu+1)} - h + \mu - \nu + 1$ peuvent contenir les dérivées des $E_{(\nu-p)}$ seulement jusqu'à l'ordre p.

Montrons d'abord que dans Φ_μ le coefficient d'une dérivée d'une des φ, d'ordre $h^{(\mu)}$ $\dfrac{\partial^{h^{(\mu)}} \varphi_j}{\partial x^{0^{h_0^{(\mu)}}} \partial x^{1^{h_1^{(\mu)}}} \partial x^{m^{h_m^{(\mu)}}}}$ ne peut pas contenir de dérivées des $E_{(\mu-p)}$ d'un ordre supérieur à p.

Ce coefficient est donné en effet par la somme de ceux de

$$\frac{\partial^{h^{(\mu)}} \varphi_j}{\partial x^{0^{h_0^{(\mu)}}} \partial x^{1^{h_1^{(\mu)}}} \ldots \partial x^{m^{h_m^{(\mu)}}}}$$

dans les dérivées des F, multipliés par les coefficients de ces dérivées dans Φ_μ.

Les dérivées des F qui entrent en Φ_μ et qui peuvent contenir

$$\frac{\partial^{h^{(\mu)}} \varphi_j}{\partial x^{0^{h_0^{(\mu)}}} \partial x^{1^{h_1^{(\mu)}}} \ldots \partial x^{m^{h_m^{(\mu)}}}}$$

sont évidemment seulement celles d'ordre $h^{(\mu)} - h + \mu$, $h^{(\mu)} - h + \mu - 1$, $\ldots$, $h^{(\mu)} - h$, et, d'après la remarque faite au commencement du paragraphe, les coefficients de $\dfrac{\partial^{h^{(\mu)}} \varphi_j}{\partial x^{0^{h_0^{(\mu)}}} \partial x^{1^{h_1^{(\mu)}}} \ldots \partial x^{m^{h_m^{(\mu)}}}}$ dans ces dérivées ne peuvent pas contenir de dérivées des $E_{(\mu-p)}$ d'un ordre supérieur à p, $p - 1, \ldots$ respectivement.

D'autre part, ayant supposé notre lemme vrai pour Φ_μ, dans une telle combinaison les coefficients des dérivées des F d'un ordre non inférieur à $h^{(\mu)} - h$ ne peuvent pas contenir de dérivées des $E_{(\mu-p)}$ d'un ordre supérieur à p.

Nous avons donc effectivement démontré que le coefficient de $\dfrac{\partial^{h^{(\mu)}} \varphi_j}{\partial x^{0^{h_0^{(\mu)}}} \partial x^{1^{h_1^{(\mu)}}} \ldots \partial x^{m^{h_m^{(\mu)}}}}$ dans Φ_μ ne peut pas contenir de dérivées des $E_{(\mu-p)}$ d'un ordre supérieur à p.

La dernière ligne de $\Omega^{(\mu)}$ contient donc les dérivées des $E_{(\mu-p)}$ seulement jusqu'à l'ordre p; les autres lignes du déterminant sont proportionelles à celles de Ω et contiennent donc seulement les $E_{(0)}$ en termes finis.

$\Phi_{\mu+1}$ est une combinaison entre les dérivées de F_i $(i = 2, 3, \ldots, n)$ d'ordre $h^{(\mu+1)} - h + 1$ et les dérivées de Φ_μ d'ordre $h^{(\mu+1)} - h^{(\mu)} + 1$; les coefficients des premières sont les coefficients des puissances des p dans le développement du mineur de $\Omega^{(\mu)}$ obtenu en négligeant la i-ième ligne et la première colonne, alors que les coefficients des secondes sont les coefficients des puissances des p dans le développement du mineur de $\Omega^{(\mu)}$, obtenu en négligeant la dernière ligne et la première colonne.

Les coefficients des premières contiennent donc les dérivées des $E_{(\mu-p)}$ jusqu'à l'ordre p seulement et satisfont par conséquent au lemme, alors que les coefficients des secondes contiennent seulement les $E_{(0)}$ en termes finis. Φ_μ, d'après notre lemme, est une combinaison, dont chaque terme est constitué par une dérivée de F_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, d'ordre $h^{(\mu)} - h + \mu - \tau$, multipliée par un coefficient, qui peut contenir les dérivées des $E_{(\tau-p)}$ jusqu'à l'ordre p seulement.

Si nous dérivons un tel terme $h^{(\mu+1)} - h^{(\mu)} + 1$ fois, nous obtenons un premier terme constitué par une dérivée de F_i d'ordre $h^{(\mu+1)} - h + \mu - \tau + 1$, multipliée par un coefficient, qui peut contenir les dérivées des $E_{(\tau-p)}$ jusqu'à l'ordre p, d'autres termes constitués par une dérivée de F_i d'ordre $h^{(\mu+1)} - h + \mu - \tau$, multipliée par un coefficient, qui peut contenir les dérivées des $E_{(\tau-p)}$ jusqu'à l'ordre $p + 1$, etc.

Evidemment tous ces termes satisfont aussi notre lemme.

Ce lemme est donc vrai pour $\Phi_{\mu+1}$, et, par conséquent, pour toutes les Φ. *Lorsque le système donné satisfait la condition énoncée au commencement du paragraphe, le coefficient dans Φ_μ d'une dérivée de F_i d'ordre $h^{(\mu)} - h + \mu - \nu$ ne pourra pas contenir de dérivées des φ d'un ordre supérieur à $h - l + \nu + 1$.*

§ IX.

Nouvelle forme du théorème d'existence pour une classe de systèmes non normaux.

Revenons maintenant à la question, que nous avons posée au commencement du paragraphe précédent et supposons que le système donné vérifie la condition énoncée.

Nous devons substituer aux anciennes $(h^{(l)} - h)n + l$ conditions, autant d'autres conditions équivalentes.

l de celles-ci ne doivent pas contenir de dérivées par rapport à x^0 d'ordre supérieur à $h - 1$, de façon à constituer autant de conditions pour les nouvelles données initiales: les φ et leurs premières $h - 1$ dérivées. Il devra y avoir ensuite n équations qui permettent de déterminer les $\dfrac{\partial^h \varphi_j}{\partial x^{0^h}}$ en fonction de φ et de leurs premières $h - 1$ dérivées par rapport à x^0, n qui permettent de déterminer les $\dfrac{\partial^{h+1} \varphi_j}{\partial x^{0^{h+1}}}$ en fonction des h premières dérivées, et ainsi de suite jusqu'à l'ordre $h^{(l)} - 1$.

La relation

$$\Gamma = 0 \tag{4}$$

obtenue en éliminant les $\dfrac{\partial^h \varphi_j}{\partial x^{0^h}}$ entre les équations du système donné constitue une première relation pour les nouvelles valeurs initiales.

La condition de rendre nulles les F_i ($i = 2, 3, \ldots, n$) et leurs premières $h^{(l)} - h - 1$ dérivées apporte ensuite $n - 1$ équations indépendantes pour déterminer les $\frac{\partial^h \varphi_j}{\partial x^{0^h}}$ et autant, respectivement, pour les

$$\frac{\partial^{h+1} \varphi_j}{\partial x^{0^{h+1}}}, \ldots, \frac{\partial^{h^{(l)}-1} \varphi_j}{\partial x^{0^{h^{(l)}-1}}}.$$

Il suffira donc de trouver $l - 1$ conditions pour les valeurs initiales et une équation en termes finis en $\frac{\partial^h \varphi_j}{\partial x^{0^h}}$.

De cette dernière nous pourrons en effet obtenir, par dérivations successives par rapport à x^0, une équation pour les $\frac{\partial^{h+1} \varphi_j}{\partial x^{0^{h+1}}}$, une pour les $\frac{\partial^{h+2} \varphi_j}{\partial x^{0^{h+2}}}$, et ainsi de suite jusqu'à l'ordre $h^{(l)} - 1$.

A partir de Φ_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, l$) nous définissons la nouvelle combinaison Φ^*_μ, dans laquelle les coefficients des dérivées des $\frac{\partial^{h^{(\mu)}-h} F_i}{\partial x^{0^{h^{(\mu)}-h}}}$ sont les mêmes que dans Φ_μ, alors que, au contraire, les coefficients des $\frac{\partial^{h^{(\mu)}-h} F_i}{\partial x^{0^{h^{(\mu)}-h}}}$ et de toutes les autres dérivées des F_i sont nuls.

Les dérivées des $\frac{\partial^{h^{(\mu)}} \varphi_j}{\partial x^{0^{h^{(\mu)}}}}$ peuvent apparaître seulement dans les dérivées des $\frac{\partial^{h^{(\mu)}-h} F_i}{\partial x^{0^{h^{(\mu)}-h}}}$; leurs coefficients sont donc les mêmes dans Φ_μ et dans Φ^*_μ. Puis, comme coefficients de dérivées d'un ordre supérieur à $h^{(\mu)}$, ils sont certainement nuls dans Φ^μ, ils doivent donc être nuls dans Φ^*_μ.

Un terme quelconque de Φ^*_μ sera donné par

$$a \frac{\partial^{h^{(\mu)}-h+t}}{\partial x^{0^{h^{(\mu)}-h+t}}} (\ldots). \tag{15}$$

mettant entre parenthèse une des F_i ou une de leurs dérivées par rapport aux variables $x^1, x^2, \ldots, x^m$.

D'après la remarque faite à la fin du paragraphe précedent a ne pourra pas contenir de dérivées d'un ordre supérieur à $h - l + \mu - t + 1$ dans le premier cas, et à $h - l + \mu - t$ dans le second.

Construisons maintenant une troisième combinaison Φ^{**}_μ en substituant à (15) dans le premier cas

$$\begin{aligned} a \frac{\partial^t}{\partial x^{0^t}} (\ldots) - \binom{h^{(\mu)} - h}{1} \frac{\partial a}{\partial x^0} \frac{\partial^{t-1}}{\partial x^{0^{t-1}}} (\ldots) + \binom{h^{(\mu)} - h + 1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^{0^2}} (\ldots) + \\ + \ldots + (-1)^{t-1} \binom{h^{(\mu)} - h + t - 2}{t-1} \frac{\partial^{t-1} a}{\partial x^{0^{t-1}}} \frac{\partial}{\partial x^0} (\ldots), \end{aligned} \tag{16}$$

et dans le second

$$a\frac{\partial^t}{\partial x^{0^t}}(\ldots)-\binom{h^{(\mu)}-h}{1}\frac{\partial a}{\partial x^0}\frac{\partial^{t-1}}{\partial x^{0^{t-1}}}(\ldots)+\binom{h^{(\mu)}-h+1}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial x^{0^2}}\frac{\partial^{t-2}}{\partial x^{0^{t-2}}}(\ldots)+$$
$$+\ldots+(-1)^t\binom{h^{(\mu)}-h+t-1}{t}\frac{\partial^t a}{\partial x^{0^t}}(\ldots). \tag{17}$$

Φ^{**}_μ, ainsi définie, est une combinaison entre les dérivées des F jusqu'à l'ordre μ et peut donc contenir les dérivées des φ jusqu'à l'ordre $h+\mu$.

En dérivant (16) $h^{(\mu)}-h$ fois par rapport à x^0 on obtient

$$a\frac{\partial^{h^{(\mu)}-h+t}}{\partial x^{0^{h^{(\mu)}-h+t}}}(\ldots)+(-1)^{t-1}\binom{h^{(\mu)}-h+t-1}{t}\frac{\partial^t a}{\partial x^{0^t}}\frac{\partial^{h^{(\mu)}-h}}{\partial x^{0^{h^{(\mu)}-h}}}(\ldots)+$$
$$+\ldots+(-1)^{t-1}\binom{h^{(\mu)}-h+t-2}{t-1}\frac{\partial^{h^{(\mu)}-h+t-1}a}{\partial x^{0^{h^{(\mu)}-h+t-1}}}\frac{\partial}{\partial x^0}(\ldots). \tag{16'}$$

Puisque, en vertu de l'identité

$$\binom{s}{r}-\binom{s}{r-1}\binom{s}{1}+\binom{s}{r-2}\binom{s+1}{2}-\binom{s}{r-3}\binom{s+2}{3}+$$
$$+\ldots+(-1)^r\binom{s}{0}\binom{s+r-1}{r}=0$$

tous les coefficients de dérivées de $(\ldots)$ d'ordre $h^{(\mu)}-h+t-1$, $h^{(\mu)}-h+t-2\ldots h^{(\mu)}-h+1$ sont nuls.

De la même façon, en dérivant (17), on obtient

$$a\frac{\partial^{h^{(\mu)}-h+t}}{\partial x^{0^{h^{(\mu)}-h+t}}}(\ldots)+(-1)^t\binom{h^{(\mu)}-h+t}{t+1}\frac{\partial^{t-1}a}{\partial x^{0^{t+1}}}\frac{\partial^{h^{(\mu)}-h-1}}{\partial x^{0^{h^{(\mu)}-h-1}}}(\ldots)+$$
$$+\ldots+(-1)^t\binom{h^{(\mu)}-h+t-1}{t}\frac{\partial^{h^{(\mu)}-h+t}a}{\partial x_0^{h^{(\mu)}-h+t}}(\ldots). \tag{17'}$$

Les expressions (16′) et (17′) diffèrent de (15) par des termes, qui peuvent contenir les $\frac{\partial^{h^{(\mu)}}\varphi_j}{\partial x^{0^{h^{(\mu)}}}}$ (si $\mu=l$), mais pas leurs dérivées.

Il en résulte que dans l'équation, qu'on obtient en dérivant $\Phi^{**}_\mu=0$ $h^{(\mu)}-h$ fois par rapport à x^0, les coefficients des dérivées des $\frac{\partial^{h^{(\mu)}}\varphi_j}{\partial x^{0^{h^{(\mu)}}}}$ sont les mêmes que dans $\Phi^*_\mu=0$ et sont par conséquent tous nuls.

Donc, dans $\Phi^{**}_\mu=0$ les coefficients des dérivées des $\frac{\partial^h\varphi_j}{\partial x^{0^h}}$ doivent être nuls, de sorte que cette équation constitue, par rapport aux mêmes $\frac{\partial^h\varphi_j}{\partial x^{0^h}}$, une relation en termes finis.

Nous montrerons maintenant qu'il est possible d'éliminer les $\dfrac{\partial^h \varphi_j}{\partial x^{0^h}}$ entre $F_2, F_3, \ldots, F_n$ et chacune des combinaisons Φ_1^{**}, $\Phi_2^{**}, \ldots, \Phi_{l-1}^{**}$, de manière qu'on arrive à obtenir, comme on le voulait, $l-1$ conditions pour les valeurs initiales.

Il s'agit évidemment de faire voir que le déterminant formé par les coefficients des $\dfrac{\partial^h \varphi_j}{\partial x^{0^h}}$ en $F_2, F_3, \ldots, F_n$, Φ_μ^* $(\mu = 1, 2, \ldots, l-1)$ est nul.

Pour cela nous notons que, étant donnée la non-normalité du système.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^{h^{(\mu)}-h} F_i}{\partial x^{0^{h^{(\mu)}-h}}} = 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, n), \\ &\Phi_\mu = 0, \end{aligned}\right. \tag{1^μ}$$

le déterminant des coefficients des $\dfrac{\partial^{h^{(\mu)}} \varphi_j}{\partial x^{h^{(\mu)}}}$ est nul.

D'autre part d'après (16′) et (17′) et d'après ce qui a été dit, on voit facilement que quand $\mu < l$, comme c'est le cas actuel, les termes pour lesquels Φ_μ diffère de $\dfrac{\partial^{h^{(\mu)}-h} \Phi_\mu^{**}}{\partial x^{0^{h^{(\mu)}-h}}}$ et qui contiennent les $\dfrac{\partial^{h^{(\mu)}} \varphi_j}{\partial x^{0^{h^{(\mu)}}}}$, sont tous du type

$$C \frac{\partial^{h^{(\mu)}-h} F_i}{\partial x^{0^{h^{(\mu)}-h}}}$$

où C désigne un coefficient, qui ne contient pas les $\dfrac{\partial^{h^{(\mu)}} \varphi_j}{\partial x^{0^{h^{(\mu)}}}}$.

Le déterminant formé par les coefficients des

$$\frac{\partial^{h^{(\mu)}} \varphi_j}{\partial x^{0^{h^{(\mu)}}}} \text{ dans } \frac{\partial^{h^{(\mu)}-h} F_2}{\partial x^{0^{h^{(\mu)}-h}}}, \frac{\partial^{h^{(\mu)}-h} F_3}{\partial x^{0^{h^{(\mu)}-h}}}, \ldots, \frac{\partial^{h^{(\mu)}-h} F_n}{\partial x^{0^{h^{(\mu)}-h}}}, \frac{\partial^{h^{(\mu)}} \Phi_\mu^{**}}{\partial x^{0^{h^{(\mu)}-h}}}$$

doit donc être nul.

De cela, comme les coefficients des $\dfrac{\partial^{h^{(\mu)}} \varphi_j}{\partial x^{0^{h^{(\mu)}}}}$ dans $\dfrac{\partial^{h^{(\mu)}-h} \Phi_\mu^{**}}{\partial x^{0^{h^{(\mu)}-h}}}$ sont respectivement égaux à ceux des $\dfrac{\partial^h \varphi_j}{\partial x^{0^h}}$ dans Φ_μ^{**}, il en résulte que le déterminant des coefficients des $\dfrac{\partial^h \varphi_j}{\partial x^{0^h}}$ dans F_2, $F_3, \ldots, F_n$, Φ_μ^{**} est aussi nul, ce qui est d'accord avec nos intentions.

$\Phi_l^{**} = 0$ constitue ensuite la condition à associer aux équations

$$F_i = 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

pour déterminer les $\dfrac{\partial^h \varphi_j}{\partial x^{0^h}}$ en fonction des données initiales.

En dérivant successivement par rapport à x^0, on tire de $\Phi_l^{**} = 0$ comme on a dit au début du paragraphe, les autres conditions nécessaires pour déterminer les dérivées des φ d'ordre $h+1$, $h+2$, ..., $h^{(l)}-1$.

Nous sommes arrivés ainsi à construire les nouvelles $(h^{(l)}-h)n+l$ conditions pour les φ et leurs dérivées et il est facile de se rendre compte de ce qu'elles sont absolument équivalentes aux anciennes.

On doit observer que le résultat obtenu peut être établi, avec des considérations semblables, également sous des conditions différentes de celle énoncée au commencement du paragraphe précédent.

Cela est vrai, par exemple, et je me contenterai ici de l'affirmer, sous la condition suivante, qui, en quelque sorte, a un caractère moins restrictif que celle dont il a été question jusqu'ici:

Les coefficients des dérivées des φ, d'ordre, par rapport à x^0, égal à h, ne contiennent pas de dérivées d'ordre, par rapport à x^0, supérieur à $h-l$; les coefficients des dérivées, d'ordre, par rapport à x^0, égal à $h-1$, ne contiennent pas de dérivées d'ordre, par rapport à x^0, supérieur à $h-l+1$; et en général les coefficients des dérivées d'ordre, par rapport à x^0, $h-r$, ne contiennent pas de dérivées d'ordre, toujours par rapport à x^0, supérieur à $h-l+r$.