case when an exterior shearing stress acts in a direction parallel to the direction of easy mobility. An example of such an arrangement is shown in fig. 10*b*, which differs from that depicted in fig. 10*a*, by the fact that in fig. 10*b* dislocations of opposite sign lie on alternating rows. TAYLOR has shown that in the absence of exterior stress the system of fig. 10*b* is stable. If, however, an external shear stress acts parallel to the glide plane, a displacement of *all* the positive with regard to *all* the negative dislocations is brought about. Starting from the arrangement of fig. 10*b*, every value of the shear stress which lies below a certain maximum value, gives a new stable equilibrium with a definite displacement of the positive with regard to the negative dislocations. As soon as the stress surpasses a certain value, the two sets of opposite sign migrate steadily in opposite directions (until they are stopped by some obstacle, for example a transition layer between two mosaic blocks). The magnitude of this critical stress increases with the "density" of the dislocation lines per unit surface.

Finally BRAGG (23) has considered the *mobility of a series of dislocation lines of the same sign* which form the boundary between two mosaic blocks as shown in fig. 4 (also in fig. 8*a* and 8*b*). Such a series can be moved by a relatively small force acting in a direction perpendicular to itself (thus horizontal in the figure), which is the direction of "easy-mobility" of each dislocation separately. In this process the individual atoms in the transition layer suffer only slight displacements. The resultant effect is equivalent to the growth of one block at the cost of the other, the disappearing block suffering as it where a rotation about an axis perpendicular to the plane of the drawing, so that its orientation gradually coincides with that of the growing blocks [17]).

(To be continued.)

[17]) In (13) LENNARD JONES considers the movement of two adjoining lattice blocks, arranged in a similar way as shown in fig. 4, in a direction *parallel* to the transition plane (vertical direction in the drawing).

Mathematics. — *Eine Bemerkung über das Mass in Strukturen.* By J. RIDDER. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of May 31, 1947.)

Die Bemerkung, um welche es sich hier handelt, ist die Konstatierung, dass die in den Theoremen A und B enthaltene Bedingung notwendig und hinreichend ist für die Messbarkeit der abgeschlossenen Somen sowohl beim beschränkt- wie beim total-additiven Mass.

I. *Beschränkt additives Mass.*

§ 1 [1]). *Eine Struktur* S sei aufgebaut aus Elementen, *Somen* genannt, die im folgenden mit kleinen Buchstaben angedeutet werden, und den folgenden Axiomen genügen:

Axiom 1°: α) $a \subset a$; β) aus $a \subset b$ und $b \subset c$ folgt $a \subset c$.

Definition. $a = b$, falls $a \subset b$ und $b \subset a$.

Definition. Ein Soma ab wird *Produkt* des Somenpaares a, b genannt, falls:

α) $ab \subset a$; β) $ab \subset b$; γ) aus $c \subset a$ und $c \subset b$ immer folgt $c \subset ab$.

Axiom 2°: Für jedes Somenpaar a, b gibt es ein Produkt ab.

Definition. Ein Soma $a+b$ wird *Summe* der Somen a, b genannt, falls: α) $a \subset a+b$; β) $b \subset a+b$; γ) aus $a \subset c$ und $b \subset c$ immer folgt $a+b \subset c$.

Axiom 3°: Für jedes Somenpaar a, b gibt es eine Summe $a+b$.

Axiom 4°: Es gibt ein Soma 0 mit $0 \subset a$ für jedes Soma $a \in S$.

Axiom 5°: Es gibt ein Soma 1 mit $a \subset 1$ für jedes Soma $a \in S$ [1a]).

Axiom 6°: $ac + bc = (a+b)c$.

Definition. Ist $a \subset b$, so wird durch $b - a$ angedeutet jedes Soma x, das den Bedingungen genügt:

$$ax = 0, \quad a + x = b.$$

Axiom 7°: Zu jedem Paar von Somen a, b, mit $a \subset b$, gibt es ein Soma $b - a$.

Eine derartige Struktur ist eine BOOLEsche Algebra.

§ 2 [1]). Für jedes Soma $x \in S$ sei *eine (reellwertige) Massfunktion* $m^\circ(x)$ definiert.

Definition. Ein Soma a heisse *$m^\circ(x)$-messbar oder messbar in bezug auf $m^\circ(x)$*, wenn für jedes Soma w, mit $m^\circ(w)$ endlich,

$$m^\circ(w) = m^\circ(wa) + m^\circ(w - wa)$$

ist.

[1]) Siehe J. RIDDER, Acta math. **73** (1941), S. 131—173.

[1a]) Auch ohne Annahme dieses Axioms behalten die nachfolgenden Sätze und Theoreme ihre Gültigkeit.

Massaxiom Ib. *Es gibt ein Soma w mit $m^\circ(w)$ endlich und $\neq 0$.*
Massaxiom II. *Das leere Soma 0 ist $m^\circ(x)$-messbar.*
Massaxiom III. *Aus $a \subset b$ folgt immer $m^\circ(a) \leqq m^\circ(b)$.*
Jedes dieser drei Massaxiome ist von den übrigen unabhängig.

Satz. *Die $m^\circ(x)$-messbaren Somen bilden einen Körper $K(m^\circ)$*; das soll heissen: für je zwei $m^\circ(x)$-messbare Somen, a und b, sind ihre Summe und ihr Produkt $m^\circ(x)$-messbar, und, falls $a \subset b$, auch $b - a$.

§ 3 [2]). *Topologische Axiome:*

T.A. I. $a \subset$ *die abgeschlossene Hülle* $\bar{a}$; hierbei ist $\bar{a}$ ein dem Soma a eindeutig zugeordnetes Soma der betrachteten Struktur S.

T.A. II. $\bar{0} = 0$.

T.A. III. *aus $a \subset b$ folgt $\bar{a} \subset \bar{b}$.*

T.A. IV. $\bar{\bar{a}} = \bar{a}$.

Eine Struktur S, welche die topologischen Axiome I—IV erfüllt, nennen wir *eine T^2-Struktur.*

Definition. $\mathfrak{B}$ sei der kleinste Somenkörper, welche alle abgeschlossenen Somen umfasst.

Theorem A. *Notwendig und hinreichend, damit in einer T^2-Struktur $\mathfrak{B} \subset K(m^\circ)$ sei, ist, dass die Funktion $m^\circ(x)$ (§ 2) folgende Bedingung erfüllt:*
aus $\bar{x} \cdot y = 0$ und $m^\circ(x+y)$ endlich folgt immer $m^\circ(x+y) = m^\circ(x) + m^\circ(y)$.

Beweis [3]). Die Bedingung ist notwendig. Aus $\mathfrak{B} \subset K(m^\circ)$ und T.A. IV folgt, dass für jedes Soma x $\bar{x}$ $m^\circ(x)$-messbar ist.

Somit ist für $m^\circ(z)$ endlich:

$$m^\circ(z) = m^\circ(z \cdot \bar{x}) + m^\circ(z - z \cdot \bar{x});$$

speziell $z = x + y$ liefert

$$m^\circ(x+y) = m^\circ[(x+y) \cdot \bar{x}] + m^\circ[(x+y) - (x+y) \cdot \bar{x}],$$

oder, wegen $\bar{x} \cdot y = 0$ und T.A. I,

$$m^\circ(x+y) = m^\circ(x) + m^\circ(y).$$

Die Bedingung ist hinreichend. Es genügt zu beweisen, dass jedes abgeschlossene Soma x (d.h. mit $x = \bar{x}$) $m^\circ(x)$-messbar ist. z sei ein willkürliches Soma mit $m^\circ(z)$ endlich. Dann ist wegen T.A. III

$$\overline{xz} \subset \bar{x} = x, \text{ also auch } \overline{xz} \cdot z \subset xz, \text{ und dadurch } \overline{xz} \cdot (z - xz) = 0.$$

Die Bedingung gibt somit

$$m^\circ[xz + (z - xz)] = m^\circ(xz) + m^\circ(z - xz),$$

[2]) Siehe J. RIDDER, Verhand. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, Sect. 1, **18**, n⁰. 4 (1944), 43 Seiten.

[3]) Das topologische Axiom II wird beim Beweise nicht benutzt.

oder

$$m^\circ(z) = m^\circ(xz) + m^\circ(z - xz).$$

Daraus folgt, dass x m°-messbar ist.

§ 3bis. Natürlich bleibt das Theorem A güultig für *äussere* Massfunktionen, welche neben den Massaxiomen Ib, II und III erfüllen das

Massaxiom V [4]). *Für jedes Soma a mit $m^\circ(a)$ endlich ist $m^\circ(a)$ gleich der unteren Grenze der Werte $m^\circ(w)$ für alle $m^\circ(x)$-messbaren Somen (w) mit $a \subset w$.*

§ 3ter. Ebenso bleibt das Theorem A gültig für eine *innere* Massfunktion $m^\circ(x)$, welche ausser den Axiomen Ib, II und III noch die folgenden Axiome erfüllt:

Massaxiom IV. *Zu jedem Soma a mit $m^\circ(a)$ endlich gibt es ein $m^\circ(x)$-messbares Soma b mit $a \subset b$ und $m^\circ(b)$ ebenfalls endlich.*

Massaxiom V'. *Für jedes Soma a mit $m^\circ(a)$ endlich ist $m^\circ(a)$ gleich der oberen Grenze der Werte $m^\circ(w)$ für alle $m^\circ(x)$-messbaren Somen (w) mit $w \subset a$* [5]).

II. *Total-additives Mass.*

§ 4 [1]). **Definition.** Ein Soma $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ wird *Summe der abzählbar unendlichen Klasse* $a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots$ genannt, falls: α) jedes $a_j \subset \sum_{j=1}^{\infty} a_j$; β) aus $a_j \subset b$ $(j = 1, 2, \ldots)$ folgt $\sum_{j=1}^{\infty} a_j \subset b$.

Im folgenden betrachten wir eine Struktur S^*, welche die Axiome 1°, 2°, 4°, 5°, 6°, 7° erfüllt, und ausserdem das

Axiom $\bar{3}$°. Zu jedem Somenpaar a, b gibt es eine Summe $a + b$; für jede abzählbar unendliche Klasse von Somen: $a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots$ gibt es eine Summe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$.

Definition. Ein Soma $\prod_{j=1}^{\infty} a_j$ wird *Produkt der abzählbar unendlichen Klasse* $a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots$ genannt, falls: α) $\prod_{j=1}^{\infty} a_j \subset$ jedes a_j; β) aus $b \subset a_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ folgt $b \subset \prod_{j=1}^{\infty} a_j$.

In S^* existiert für jede abzählbare Klasse von Somen ein Produkt.

Definition. Ein Körper von Somen heisse *σ-Körper,* wenn die Summe

[4]) Jedes der Axiome Ib, III und V ist von den übrigen unabhängig; Axiom II folgt aus den Axiomen Ib und V. Siehe RIDDER, loc. cit. 1).

[5]) Das Massaxiom II ist eine Folgerung der Massaxiome Ib und IV. Jedes der Massaxiome Ib, III, IV und V' ist von den übrigen unabhängig. Siehe RIDDER, loc. cit. 1).

von abzählbar vielen seiner Somen immer zu ihm gehört; er heisse *δ-Körper*, wenn das gleiche von dem Produkt von abzählbar vielen seiner Somen gilt.

Fordern wir von der Somenfunktion $m^\circ(x)$ die Massaxiome I^b, II, III des § 2 und daneben das

Massaxiom VI. *Die Summe von abzählbar vielen, $m^\circ(x)$-messbaren Somen ist $m^\circ(x)$-messbar* [6].

Dann gilt der

Satz. *Der Körper $\mathfrak{K}(m^\circ)$ der $m^\circ(x)$-messbaren Somen ist sowohl σ-Körper wie δ-Körper.*

§ 5. Betrachten wir eine Struktur S^*, welche somit dieselben Strukturaxiome wie in § 4 erfüllt, und daneben den topologischen Axiomen I bis IV genügt; nennen wir eine derartige Struktur *eine t^2Struktur.*

Definition. $\mathfrak{B}^*$ sei der kleinste σ-Körper von Somen, welche alle abgeschlossenen Somen umfasst.

Theorem B. *Notwendig und hinreichend, damit in einer t^2-Struktur $\mathfrak{B}^* \subset \mathfrak{K}(m^\circ)$ sei, ist, dass die Funktion $m^\circ(x)$ (§ 4) folgende Bedingung erfüllt:*

aus $x \cdot y = 0$ und $m^\circ(x+y)$ endlich folgt immer $m^\circ(x+y) = m^\circ(x) + m^\circ(y)$.

Der Beweis ist wörtlich derselbe wie der des Theorems *A*. —

Da aus den drei ersten Carathéodoryschen Axiomen [7]) für eine Massfunktion sich die Gültigkeit unserer Massaxiome I^b, II, III und VI ableiten lässt, erhält man *einen Spezialfall des Theorems B bei Benutzung der drei ersten Carathéodoryschen Massaxiome* [8]).

§ 5bis. Das Theorem B bleibt gültig bei Hinzufügung der drei folgenden Massaxiome, wodurch $m^\circ(x)$ zu *einer regulären äusseren Massfunktion* wird.

Massaxiom V. (Siehe § 3bis).

Massaxiom VII. *Für jede Folge von Somen $a_1 \subset a_2 \ldots \subset a_n \ldots$ mit $a = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ und $m^\circ(a)$ endlich ist*

$$\lim_{j \to \infty} m^\circ(a_j) = m^\circ(a).$$

Massaxiom VIII. *Sind für eine Somenfunktion $m^\circ(x)$ die einander fremden Somen $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ $m^\circ(x)$-messbar und ist $m^\circ\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j\right) = \infty$, so ist auch $\sum_{j=1}^{\infty} m^\circ(a_j) = \infty$.*

---

6) Jedes der Axiome I^b, II, III und VI ist von den übrigen unabhängig.

7) Siehe C. CARATHÉODORY, *Vorles. über reelle F.*, Leipzig-Berlin, 1e oder 2e Aufl., §§ 235—268.

8) Für den Fall eines Raumes, in welchem die topologischen Axiome I bis IV erfüllt sind, und die Massfunktion für jede Teilmenge endlich ist, wurde dieser Spezialfall von J. ALBUQUERQUE, Portugaliae Math. **3** (1943), S. 258—262, abgeleitet.

Wir bemerken nebenbei, dass die Axiome I^b, III, V, VII und VIII voneinander unabhängig sind, und dass die Axiome II und VI sich aus den vorigen ableiten lassen; auch dass das Axiomensystem I^b, III, V, VII, VIII schon in einer Struktur, welche nur die Strukturaxiome 1°, 2°, $\bar{3}$°, 4°, 5°, 6°, 7° erfüllt, aequivalent ist mit dem um das vierte Axiom [7]) verringerte Axiomensystem der Carathéodoryschen regulären äusseren Massfunktionen [1]).

§ 5ter. Ebenso bleibt das Theorem B gültig für *eine reguläre innere Massfunktion*, welche ausser den Axiomen I^b, II, III und VI noch folgende Massaxiome erfüllen soll:

Massaxiom IV. (Siehe § 3ter).

Massaxiom V'. (Siehe § 3ter).

Massaxiom VII'. *Für jede Folge von Somen $b_1 \supset b_2 \ldots \supset b_n \ldots$ mit $b = \prod_{j=1}^{\infty} b_j$ und mit $m^\circ(b_1)$ endlich ist*

$$\lim_{j \to \infty} m^\circ(b_j) = m^\circ(b).$$

Massaxiom VIII. (Siehe § 5bis).

Die Axiome I^b, III, IV, V', VII', VIII sind voneinander unabhängig; die Axiome II und VI folgen aus den vorigen [1]).