

For recrystallization-crystals, it must be kept in mind that they start from nuclei which certainly are in different states of stress with regard to their immediate surroundings.

For the moment, in absence of further experimental work, this question must be left as it stands. Perhaps it will be possible by applying special methods of x-ray research (for example Mrs. LONSDALE's "divergent beam"

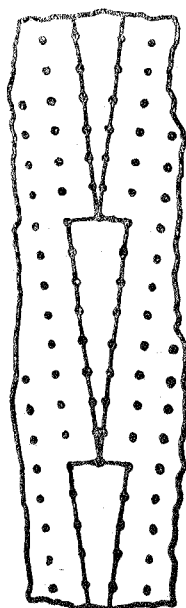


Fig. 17. Boundary of two crystals at slightly different orientations, showing boundaries of separate crystalblocks and a regular repetition of "surface of misfit" (after TAYLOR (46)). The figure is given here as an endeavour to understand the repetition, in a growing crystal, of a definite imperfection.

method (64) or BARRETT's "x-ray microscope" (51)) to get some further experimental evidence regarding the presence or absence of differences in mosaic character of different crystals³²⁾.

³²⁾ Perhaps recrystallization of silverhalide crystals can also be of help while investigating this problem. Preliminary experiments by BURGERS and TAN KOEN NIOK (65) have shown that such crystals, after irradiation with ultraviolet light, show an optical "etching effect" parallel to cube-planes, which seem to form an indication of the presence of a mosaic structure with blocks parallel to these planes. Differences might be found in this "optical" way between various crystals. [In (65) it was suggested that the diffuse bands on Laue-photographs of these crystals was partly due to this supposed mosaic character. Further work has shown, however, that the bands are of thermal nature, similar to those found for other crystals by PRESTON (66), LONSDALE and SMITH (67), GUINIER (68), KRONING and ARLMAN (69) and others.]

(To be concluded.)

Addendum (June 1947).

With regard to the remark in footnote ²⁸⁾, Mr. F. R. N. NABARRO drew my attention to the fact that measurements of rates of growth by other investigators [KORNFELD and PAWLOW (9) with aluminium; MÜLLER (11) with rocksalt] lead with the same reasoning to much smaller values of the number of atoms (N), involved in a "chain of jumps". In this connection it might be remarked that the mosaic character of a crystal, even of the same substance, may be largely dependant on its mode of formation or on its degree of purity: cf. section II, 1. The question, however, may be raised whether the introduction of a quantity N, as done in footnote ²⁸⁾, can be maintained.

Mathematics. — *Einige Anwendungen des Dualitätsprinzips in topologischen Strukturen.* By J. RIDDER. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of May 31, 1947.)

I. Charakterisierung des offenen Kernes durch ein einziges Axiom.

§ 1¹⁾. Wir betrachten eine BOOLEsche Algebra S, definiert durch die nachfolgenden Axiome 1°—7°; ihre Elemente wollen wir Somen nennen.

Axiom 1°. a) $a \subset a$; β) aus $a \subset b$ und $b \subset c$ folgt $a \subset c$.

Definition. $a = b$, falls $a \subset b$ und $b \subset a$.

Definition. Ein Soma $\prod_{a_i \in K} a_i$ wird *Produkt* der zu der Klasse K gehörenden Somen (a_i) genannt, falls: a) $\prod_{a_i \in K} a_i$ jedes a_i ; β) aus $b \subset a_i$ für jedes $a_i \in K$ folgt $b \subset \prod_{a_i \in K} a_i$.

Axiom 2°. Für jedes Somenpaar a, b gibt es ein Produkt ab .

Definition. Ein Soma $\sum_{a_i \in K} a_i$ wird *Summe* der zu einer Klasse K gehörenden Somen (a_i) genannt, falls: a) jedes $a_i \subset \sum_{a_i \in K} a_i$; β) aus $a_i \subset b$ für jedes $a_i \in K$ folgt $\sum_{a_i \in K} a_i \subset b$.

Axiom 3°. Für jedes Somenpaar a, b gibt es eine Summe $a + b$.

Axiom 4°. Es gibt ein kleinstes (leeres) Soma 0; das soll heissen: $0 \subset a$ für jedes $a \in S$.

Axiom 5°. Es gibt ein grösstes Soma 1; das soll heissen: $a \subset 1$ für jedes $a \in S$.

Axiom 6°. $ac + bc = (a + b)c$.

Axiom 7°. Zu jedem Paar von Somen a, b , mit $a \subset b$, gibt es ein Soma $b - a$ derart, dass $a + (b - a) = b$ und $a \cdot (b - a) = 0$ ist.

Definition. Das Komplement von a, a' , sei das Soma $1 - a$.

§ 2¹⁾. Jedem Soma $a \in S$ seien in eindeutiger Weise zugeordnet das Soma \bar{a} , die abgeschlossene Hülle von a , und a , der offene Kern von a ; zwischen diesen soll folgender Zusammenhang bestehen:

$$\bar{a} = (\bar{a})', \text{ oder } \bar{a} = (a)' \quad \dots \quad (1)$$

¹⁾ Siehe J. RIDDER, Verhand. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, Sekt. 1, 18, Nr 4 (1944), 43 Seiten.

Die topologischen Axiome, die im folgenden mit lateinischen Ziffern angedeutet werden, sind paarweise äquivalent; das eine Axiom eines solchen Paares wird durch ein Ziffer ohne-, das andere durch dasselbe Ziffer mit einem Asterisk angedeutet.

$$\begin{array}{ll}
 T. A. I: a \subset \bar{a}. & T. A. I^*: \underline{a} \subset a. \\
 T. A. II: \bar{0} = 0. & T. A. II^*: \underline{1} = 1. \\
 T. A. III: a \subset b \rightarrow \bar{a} \subset \bar{b}. & T. A. III^*: b \subset a \rightarrow \underline{b} \subset \underline{a}. \\
 T. A. IV: \bar{\bar{a}} = \bar{a}. & T. A. IV^*: a = a.
 \end{array}$$

Dualitätsprinzip. Zu jedem in einer BOOLEschen Algebra aus einem oder mehreren der vorangehenden topologischen Axiome ableitbaren Satz gibt es einen dualen, welchen man erhält, wenn im ursprünglichen Theorem überall: $\alpha) x \subset y$ durch $y \subset x$ (und somit xy durch $x + y$), $\beta) 0$ durch 1 , $\gamma) \bar{a}$ durch a , und umgekehrt, ersetzt wird.

§ 3. **Theorem** (von MONTEIRO)²⁾. In einer BOOLEschen Algebra ist das von den Axiomen I, III und IV gebildete Axiomensystem äquivalent mit dem einzigen Axiom:

$$y + \bar{y} + \overline{\bar{x}} \subset x + y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Wir wollen zeigen, dass Anwendung des Dualitätsprinzips aus diesem Satz ableiten lässt das

Theorem. In einer BOOLEschen Algebra ist das von den Axiomen I^* , III^* und IV^* gebildete Axiomensystem äquivalent mit dem einzigen Axiom:

$$xy \subset y \cdot y \cdot \underline{x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Beweis. Die Axiome I*, III* und IV* seien erfüllt; dann gilt dasselbe von den Axiomen I, III und IV, also nach dem Theorem von MONTEIRO auch von (2). Nach dem Dualitätsprinzip folgt daraus dann die Gültigkeit von (3).

Nehmen wir, umgekehrt, an, dass als einziges Axiom (3) erfüllt sei. Komplementbildung liefert dann

$$(xy)' \supset (y \cdot y \cdot \underline{x})'$$

oder, unter Anwendung von (1),

$$\overline{(xy)'} \supset y' + (y)' + (x)'$$

oder

$$\overline{x' + y'} \supset y' + \overline{y'} + \overline{(x')}'$$

2) Siehe A. MONTEIRO, *Portugaliae Math.* 4 (1943/45), S. 158—160.

oder

$$\overline{x' + y'} \supset y' + \overline{y'} + \overline{x'},$$

somit auch (2).

Aus (2) folgt wieder nach dem Theorem von MONTEIRO, dass die Axiome I, III und IV erfüllt sind, und dadurch, nach dem Dualitätsprinzip, ebenfalls die Axiome I*, III* und IV*.

Bemerkung. Das Theorem von MONTEIRO gilt schon in einer Struktur, welche nur die Axiome 1°, 3° und 4° erfüllt. Ebenso gilt das letzte Theorem schon in einer Struktur, welche nur die Axiome 1°, 2° und 5° erfüllt; um dies zu zeigen hat man nur den MONTEIROschen Beweis ²⁾ seines Satzes dual umzusetzen (gemäss α), β), γ) von § 2).

Analoge Charakterisierungen anderer Grundbegriffe.

§ 4¹⁾. Jedem Soma a einer BOOLEschen Algebra S sei in eindeutiger Weise das Soma a^e zugeordnet. Zwischen a^e und a soll folgender Zusammenhang bestehen:

$$a^e = a', \text{ oder } a = (a')^e. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Dann sind die folgenden topologischen Axiome paarweise äquivalent; das eine Axiom eines solchen Paares wird durch ein Ziffer mit einem Asterisk, das andere durch dasselbe Ziffer mit einem „e“ angedeutet.

$$\begin{array}{ll} T.A.I^*: \underline{a} \subset a. & T.A.I^e: a^e \subset a'. \\ T.A.II^*: \underline{1} = 1. & T.A.II^e: 0^e = 0'. \\ T.A.III^*: b \subset a \rightarrow \underline{b} \subset \underline{a}. & T.A.III^e: a \subset b \rightarrow b^e \subset a^e. \\ T.A.IV^*: a = a. & T.A.IV^e: \{(a^e)'\}^e = a^e. \end{array}$$

Mittels (4) lässt sich aus (3) ableiten

$$(x + y)^e \subseteq y' \cdot y^e \cdot \{(x^e)'\}^e, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

und umgekehrt.

Da jedes der Axiomensysteme: I^e , III^e , IV^e ; I^* , III^* , IV^* ; einziges Axiom (3); einziges Axiom (5) äquivalent ist mit vorangehendem und (oder) nachfolgendem System folgt sofort das

Theorem. In einer BOOLEschen Algebra ist das von den Axiomen I^e , III^e und IV^e gebildete Axiomensystem äquivalent mit dem einzigen Axiom:

$$(x + y)^e \subset y' \cdot y^e \cdot \{(x^e)'\}^e, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

§ 4bis 1). Durch duale Umsetzung von § 4 erhält man:
Jedem Soma a einer BOOLEschen Algebra S sei in eindeutiger Weise

das Soma a_e zugeordnet. Zwischen a_e und \bar{a} soll folgender Zusammenhang bestehen:

$$a_e = \bar{a}', \text{ oder } \bar{a} = (a')_e. \quad (6)$$

Dann sind die folgenden topologischen Axiome paarweise äquivalent; das eine Axiom eines solchen Paares wird durch ein Ziffer, das andere durch dasselbe Ziffer mit einem „e“ angedeutet.

$$\begin{array}{ll} T. A. I: a \subset \bar{a}. & T. A. I_e: a_e \supset a'. \\ T. A. II: \bar{0} = 0. & T. A. II_e: 1_e = 1'. \\ T. A. III: a \subset b \rightarrow \bar{a} \subset \bar{b}. & T. A. III_e: b \subset a \rightarrow a_e \subset b_e. \\ T. A. IV: \bar{\bar{a}} = \bar{a}. & T. A. IV_e: \{(a_e)'\}_e = a_e. \end{array}$$

Mittels (6) lässt sich aus (2) ableiten

$$y' + y_e + \{(x_e)'\}_e \subset (xy)_e. \quad (7)$$

und umgekehrt.

Da jedes der Axiomensysteme: $I_e, III_e, IV_e; I, III, IV$; einziges Axiom (2); einziges Axiom (6) äquivalent ist mit vorangehendem und (oder) nachfolgendem System folgt das

Theorem. In einer BOOLEschen Algebra ist das von den Axiomen I_e, III_e und IV_e gebildete Axiomensystem äquivalent mit dem einzigen Axiom:

$$y' + y_e + \{(x_e)'\}_e \subset (xy)_e. \quad (7)$$

§ 5¹⁾. In einer BOOLEschen Algebra folgt aus

$$a^g = \bar{a} \cdot \bar{a}' \text{ und } a \subset \bar{a},$$

dass

$$\bar{a} = a + a^g \text{ und } a^g = (a')^g$$

ist. Umgekehrt, aus

$$\bar{a} = a + a^g \text{ und } a^g = (a')^g$$

folgt:

$$a^g = \bar{a} \cdot \bar{a}' \text{ und } a \subset \bar{a}.$$

In S sind somit

$$T. A. I: a \subset \bar{a} \text{ und } T. A. I^g: (a')^g = a^g$$

äquivalent. Zwischen ihren Grundbegriffen \bar{a} und a^g gelten in beiden Systemen die Relationen:

$$a^g = \bar{a} \cdot \bar{a}' \text{ und } \bar{a} = a + a^g.$$

Die Äquivalenz bleibt bestehen nach Hinzufügung von

$$T. A. III: a \subset b \rightarrow \bar{a} \subset \bar{b} \quad \text{bzw.} \quad T. A. III^g: a \subset b \rightarrow a(a^g)' \subset b(b^g)' \\ [\text{oder } a \subset b \rightarrow a + a^g \subset b + b^g],$$

und nach abermaliger Hinzufügung von

$$T. A. IV: \bar{\bar{a}} = \bar{a} \quad \text{bzw.} \quad T. A. IV^g: (a + a^g)^g \subset a + a^g.$$

Das System I, III und IV ist äquivalent mit dem einzigen Axiom (2); (2) und

$$x^g + y^g + (x + x^g)^g \subset (x + y) + (x + y)^g. \quad (8)$$

lassen sich unter Annahme einer der Relationen $\bar{a} = a + a^g, a^g = \bar{a} \cdot \bar{a}'$ (wobei dann auch die Gültigkeit der anderen sofort folgt) ineinander überführen. Wir haben somit das

Theorem. In einer BOOLEschen Algebra ist das von den Axiomen I^g, III^g und IV^g gebildete Axiomensystem äquivalent mit dem einzigen Axiom:

$$x^g + y^g + (x + x^g)^g \subset (x + y) + (x + y)^g. \quad (8)$$

§ 5bis. Duale Umsetzung von § 5 liefert das

Theorem. In einer BOOLEschen Algebra ist das von den Axiomen: $I_g: (a')_g = a_g; III_g: b \subset a \rightarrow b + (b_g)' \subset a + (a_g)'$ [oder $b \subset a \rightarrow b \cdot b_g \subset a \cdot a_g$]; $IV_g: a \cdot a_g \subset (a \cdot a_g)_g$ gebildete Axiomensystem äquivalent mit dem einzigen Axiom:

$$x_g \cdot y_g \cdot (x \cdot x_g)_g \supset x \cdot y \cdot (x \cdot y)_g. \quad (9)$$

Der Zusammenhang mit \underline{a} wird hier geliefert durch

$$a_g = \underline{a} + \underline{a}' \text{ und } \underline{a} = a \cdot a_g.$$

II. Eindeutige Bestimmtheit des offenen Kernes durch die offenen Somen.

§ 6. Definition. a heisst abgeschlossen, falls $a = \bar{a}$; a heisst offen, falls $a = \underline{a}$.

Theorem (von MONTEIRO und RIBEIRO)³⁾. In einer BOOLEschen Algebra S sei die abgeschlossene Hülle \bar{x} eines jeden Somas x eindeutig festgelegt, und genüge den topologischen Axiomen I, III und IV (§ 2). Dann ist

$$\bar{x} = \prod_{y \in P(x)} y, \quad (10)$$

wobei $P(x)$ alle und nur alle diejenigen abgeschlossenen Somen y umfasst, für die $x \subset y$ gilt.

³⁾ Siehe A. MONTEIRO und H. RIBEIRO, Portugaliae Math. 3 (1942), S. 171–183.

Umgekehrt, gibt es eine Klasse K von Somen (y) derartig, dass für jedes Soma $x \in S$ die Somen $y \in K$ mit $x \subset y$ ein Produkt haben, das ebenfalls zu K gehört, und dass wir durch \bar{x} andeuten wollen, so genügt die Operation \bar{x} den topologischen Axiomen I, III und IV; für jedes $y \in K$ ist dann $\bar{y} = y$, und jedes abgeschlossene Soma z (d.h. mit $\bar{z} = z$) gehört zu K .

Das Dualitätsprinzip lässt nun ableiten das

Theorem. In einer BOOLEschen Algebra S sei der offene Kern \underline{x} jedes Somas x eindeutig festgelegt, und genüge den topologischen Axiomen I^* , III^* und IV^* (§ 2). Dann ist

$$\underline{x} = \sum_{y \in Q(x)} y, \quad \dots \quad (11)$$

wobei $Q(x)$ alle und nur alle diejenigen offenen Somen y umfasst, für die $y \subset x$ gilt.

Umgekehrt, gibt es eine Klasse L von Somen (y) derartig, dass für jedes Soma $x \in S$ die Somen $y \in L$ mit $y \subset x$ eine Summe haben, die ebenfalls zu L gehört, und die wir durch \underline{x} andeuten, so genügt die Operation \underline{x} den topologischen Axiomen I^* , III^* und IV^* ; die Klasse der offenen Somen fällt mit L zusammen.

Beweis. Die Axiome I^* , III^* und IV^* seien erfüllt; dann gilt, unter Annahme der Relationen (1), dasselbe von den Axiomen I, III und IV. Nach dem Theorem von MONTEIRO und RIBEIRO gilt dann (10), und dadurch nach dem Dualitätsprinzip auch (11).

Definieren wir, umgekehrt, für die Somen einer Klasse L , welche den Bedingungen der zweiten Hälfte unseres Theorems genügt, die Operation \underline{x} mittels (11). Komplementbildung liefert dann

$$(\underline{x})' = \left[\sum_{y \in Q(x)} y \right]' = \prod_{y \in Q(x)} y'.$$

Setzt man $(\underline{x})' = \bar{x}$, und nennt man L' die Klasse von Somen, deren jedes Komplement eines Somas von L ist, so folgt aus der zweiten Hälfte des Theorems von M. und R., dass \bar{x} den topologischen Axiomen I, III und IV, und somit (siehe auch (1)) \underline{x} den Axiomen I^* , III^* und IV^* genügt; L' fällt mit der Klasse der abgeschlossenen Somen, somit L mit der Klasse der offenen Somen zusammen.

Bemerkung. Das Theorem von M. und R. gilt schon in einer Struktur, welche nur das Axiom 1° erfüllt. Ebenso gilt das letzte Theorem schon in einer Struktur, welche nur das Axiom 1° erfüllt; man hat nur wieder den Beweis von M. und R., loc. cit. 3), S. 176, 177, dual umzusetzen (gemäss α), β), γ) von § 2).

Diese duale Umsetzung von Beweisen liefert aus in der zitierten Arbeit vorkommenden Sätzen u.a.:

Theorem. Damit in einer dem Axiom 1° genügenden Struktur die Bildung des offenen Kernes \underline{x} für den immer $\underline{x} \subset x$ gelten soll (T.A. I^*),

eindeutig festgelegt sei durch seine Invarianten (d.h. durch die Klasse der offenen Somen), ist notwendig und hinreichend, dass \underline{x} den Axiomen III^* und IV^* genügt.

§ 7. **Theorem.** Eine Struktur S genüge dem Axiom 1° . In S seien zwei Operationen definiert, die zu jedem $x \in S$ ein offener Kern, $\underline{x}^{(1)}$ bzw. $\underline{x}^{(2)}$, hinzufügen, deren jeder die Axiome I^* , III^* und IV^* erfüllt.

Damit für jedes $x \in S$ $\underline{x}^{(1)} \subset \underline{x}^{(2)}$ sei, ist notwendig und hinreichend, dass die für die Operation $\underline{x}^{(1)}$ offenen Somen eine Teilklasse der für die Operation $\underline{x}^{(2)}$ offenen Somen bilden.

Der Beweis folgt durch duale Umsetzung des Beweises eines Satzes von M. u. R., loc. cit. 3), S. 179, 180, über Operationen, welche abgeschlossene Hüllen liefern, die den Axiomen I, III und IV genügen.

Analoges gilt u.a. für die beiden folgenden Theoreme.

Theorem. In einer Struktur, welche den Axiomen 1° und 3° genügt, und in welcher zwei Operationen $\underline{x}^{(1)}$ und $\underline{x}^{(2)}$ definiert sind, deren jede die Axiome I^* , III^* und IV^* erfüllt, liefert Summenbildung: $\underline{x}^{(1)} + \underline{x}^{(2)}$ für jedes $x \in S$ eine neue Operation $\underline{x}^{(3)}$, welche die Axiome I^* , III^* und IV^* erfüllt.

Axiom $\bar{3}^\circ$. Zu jeder Klasse von Somen gibt es eine Summe.

Theorem. In einer Struktur S , welche den Axiomen 1° und $\bar{3}^\circ$ genügt, und in welcher eine Klasse K von Operationen $\underline{x}^{(i)}$ definiert ist, deren jede die Axiome I^* , III^* und IV^* erfüllt, liefert Summenbildung $\sum_{\substack{\underline{x}^{(i)} \in K \\ \underline{x} \text{ fest}}} \underline{x}^{(i)}$

für jedes $x \in S$ eine neue Operation $\underline{x}^{(K)}$, welche die Axiome I^* , III^* und IV^* erfüllt.

III. Die dualen Grundbegriffe a^r und a_r .

§ 8¹). In einer BOOLEschen Algebra folgt aus

$$a^r = a \cdot \bar{a}^r \text{ und } a \subset \bar{a},$$

dass

$$\bar{a} = a + a^r + (a^r)^r \text{ und } a^r \subset a$$

gilt. Umgekehrt, aus

$$\bar{a} = a + a^r + (a^r)^r \text{ und } a^r \subset a$$

folgt:

$$a^r = a \cdot \bar{a}^r \text{ und } a \subset \bar{a}.$$

In S sind somit

$$T.A. I: a \subset \bar{a} \text{ und } T.A. I': a^r \subset a$$

aequivalent. Zwischen ihren Grundbegriffen \bar{a} und a^r gelten in beiden Systemen die Relationen:

$$a^r = a \cdot \bar{a}' \text{ und } \bar{a} = a + a^r + (a')^r.$$

Die Aequivalenz bleibt bestehen nach Hinzufügung von

$$T. A. II: \bar{0} = 0 \text{ bzw. } T. A. II^r: 1^r = 0,$$

nach weiterer Hinzufügung von

$$T. A. III: a \subset b \rightarrow \bar{a} \subset \bar{b} \text{ bzw. } T. A. III^r: a \subset b \rightarrow a \cdot (a')^r \subset b \cdot (b')^r \text{ } ^4) \\ \text{[oder: immer ist } ab^r \subset (ab)^r \text{] } ^5),$$

nach abermaliger Hinzufügung von

$$T. A. IV: \bar{a} = \bar{a} \text{ bzw. } T. A. IV^r: \{a \cdot (a')^r\}^r = 0, \text{ } ^6)$$

und schliesslich auch nach Hinzufügung von

$$T. A. V: \overline{a+b} \subset \bar{a} + \bar{b} \text{ bzw. } T. A. V^r: (a \cdot b) \cdot \{(a \cdot b)^r\}' \supset a \cdot (a')^r \cdot b \cdot (b')^r \text{ } ^7) \\ \text{[oder: immer ist } (ab)^r \subset ab^r + ba^r \text{] } ^8).$$

§ 8bis. Durch duale Umsetzung erhält man:

In einer BOOLEschen Algebra folgt aus

$$a_r = a + a' \text{ und } a \subset a,$$

dass

$$a = a \cdot a_r \cdot (a')_r \text{ und } a \subset a_r$$

gilt. Dies lässt sich umkehren.

In S sind somit

$$T. A. I^*: a \subset a \text{ und } T. A. I_r: a \subset a_r$$

⁴⁾ Aus den Axiomen I, III folgt (siehe auch § 2): $a \subset b \rightarrow a \subset \bar{b}$ oder $a \cdot (a')^r \subset b \cdot (b')^r$ da $x \cdot (x')^r = x [x' + (\bar{x}')'] = x \cdot x = x$ ist. Umgekehrt liefern die Axiome I^r, III^r (erste Form): $a \subset b \rightarrow a \cdot (a')^r \subset b \cdot (b')^r$ oder $\bar{a} \subset \bar{b}$, somit auch $\bar{a} \subset \bar{b}$.

⁵⁾ T. A. III liefert: $\bar{b}' \subset \bar{a}' + \bar{b}'$, also auch $ab \cdot \bar{b}' \subset ab \cdot (\bar{a}' + \bar{b}')$, oder $a \cdot b^r \subset (ab)^r$. Umgekehrt liefern T. A. I^r und T. A. III^r (zweite Form): $a \cdot b \cdot \bar{b}' \subset ab \cdot (\bar{a}' + \bar{b}')$ = $ab \cdot \bar{a}' + \bar{b}'$, somit $ab \cdot \bar{b}' \subset \bar{a}' + \bar{b}'$, und $(a' + b') \cdot \bar{b}' \subset \bar{a}' + \bar{b}'$. Auch ist $(a' + b') \cdot \bar{b}' \subset \bar{a}' + \bar{b}'$, so dass $\bar{b}' \subset \bar{a}' + \bar{b}'$. Aus $x \subset y$ folgt also immer $\bar{x} \subset \bar{y}$ (T. A. III).

⁶⁾ Siehe J. ALBUQUERQUE, Portugaliae Math. 3 (1942), S. 186—187.

⁷⁾ Aus den Axiomen I, V folgt (siehe auch RIDDER, loc. cit. ¹⁾): $\bar{ab} \supset \bar{a} \cdot \bar{b}$ oder $ab \cdot \{(ab)^r\}' \supset a \cdot (a')^r \cdot b \cdot (b')^r$. Umgekehrt liefern die Axiome I^r, V^r (erste Form): $(ab) \cdot \{(ab)^r\}' \supset a \cdot (a')^r \cdot b \cdot (b')^r$, oder $\bar{ab} \supset \bar{a} \cdot \bar{b}$, oder Axiom V.

⁸⁾ T. A. V liefert: $\bar{a}' + \bar{b}' \subset \bar{a}' + \bar{b}'$, also auch $ab \cdot (\bar{a}' + \bar{b}') \subset ab \cdot (\bar{a}' + \bar{b}')$, oder $(ab)^r \subset b \cdot a^r + a \cdot b^r$. Umgekehrt liefern T. A. I^r und T. A. V^r (zweite Form): $ab \cdot (\bar{a}' + \bar{b}') \subset a \cdot b \cdot \bar{b}' + b \cdot a \cdot \bar{a}'$, somit $(a' + b') \cdot (\bar{a}' + \bar{b}') \subset \bar{a}' + \bar{b}'$. Auch ist $(a' + b') \cdot \bar{a}' + \bar{b}' \subset \bar{a}' + \bar{b}'$, so dass $\bar{a}' + \bar{b}' \subset \bar{a}' + \bar{b}'$. Also ist immer $\bar{x} + \bar{y} \subset \bar{x} + \bar{y}$ (T. A. V).

aequivalent. Zwischen ihren Grundbegriffen a und a_r gelten in beiden Systemen die Relationen:

$$a_r = a + a' \text{ und } a = a \cdot a_r \cdot (a')_r.$$

Die Aequivalenz bleibt bestehen nach Hinzufügung von

$$T. A. II^*: \bar{1} = 1 \text{ bzw. } T. A. II_r: 0_r = 1,$$

nach weiterer Hinzufügung von

$$T. A. III^*: b \subset a \rightarrow \bar{b} \subset \bar{a} \text{ bzw. } T. A. III_r: b \subset a \rightarrow b + (b_r)' \subset a + (a_r)' \\ \text{[oder: immer ist } a + b_r \supset (a + b)_r \text{]},$$

nach abermaliger Hinzufügung von

$$T. A. IV^*: \bar{a} = \bar{a} \text{ bzw. } T. A. IV_r: \{a + (a_r)'\}_r = 1,$$

und schliesslich auch nach Hinzufügung von

$$T. A. V^*: \bar{a} \cdot \bar{b} \subset \bar{ab} \text{ } ^9) \text{ bzw. } T. A. V_r: a + (a_r)' + b + (b_r)' \supset (a + b) + \\ + \{(a + b)_r\}' \text{ [oder: immer ist } (a + b_r) \cdot (b + a_r) \subset (a + b)_r \text{]}.$$

§ 9¹⁾. Im folgenden betrachten wir eine Struktur S_0 , welche ausser den Axiomen 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, 6°, 7° noch folgendem Axiom genügt:

Axiom 8°. Jedes nicht leere Soma ist entweder ein Primsoma oder enthält mehrere Primsomen; dabei ist *Primsoma* jedes nicht leere Soma, welches ausser dem leeren Soma und sich selbst kein weiteres Teilsoma enthält.

Eine derartige Struktur ist als ein Raum zu betrachten, dessen Punkte die Primsomen sind.

T. A. VI: Für jedes Primsoma p ist $\bar{p} = p$.

In einer Struktur S_0 gilt das Dualitätsprinzip von § 2 für die aus einem oder mehreren der topologischen Axiome I—VI ableitbaren Sätze, wenn man zu den angegebenen Ersetzungen hinzufügt: $\delta)$ falls p ein Primsoma ist, werde p durch $1 - p$, und umgekehrt, ersetzt.

Unter Annahme der Relationen (1) sind T. A. VI und

T. A. VI*: Für jedes Primsoma p ist $1 - p = 1 - p$, aequivalent.

Die in § 8 betrachteten Axiomensysteme I—V und I^r — V^r bleiben in einer Struktur S_0 aequivalent nach Hinzufügung von

T. A. VI: für jedes Primsoma p ist $\bar{p} = p$, bzw. T. A. VI^r: für jedes Primsoma p ist $(1 - p)^r = 0$.

Duale Umsetzung des Beweises liefert:

Die in § 8bis betrachteten Axiomensysteme $I^*—V^*$ und $I_r—V_r$ bleiben in einer Struktur S_0 aequivalent nach Hinzufügung von

T. A. VI*: für jedes Primsoma p ist $1 - p = 1 - p$, bzw. T. A. VI_r: für jedes Primsoma p ist $p_r = 1$.

⁹⁾ Die topologischen Axiome V und V* sind, unter Annahme der Relationen (1), aequivalent.

§ 10. Die Trennungsaxiome in ihrer gewöhnlichen Form enthalten alle den Begriff des offenen Kernes. Duale Umsetzung liefert die Form, bei der in allen die abgeschlossene Hülle als Grundbegriff auftritt.

So sind in einer Struktur S_0 , in welcher die topologischen Axiome I—VI erfüllt sind, gleichwertig die topologischen Axiome:

A^* . zu jedem Paar p_1, p_2 von Primsomen mit $p_1 \cdot p_2 = 0$ gibt es Somen a, b mit $ab = 0$, $p_1 \subset \underline{a}$ und $p_2 \subset \underline{b}$; und:

A . zu jedem Paar p_1, p_2 von Primsomen mit $(1 - p_1) + (1 - p_2) = 1$ gibt es Somen a, b mit $a + b = 1$, $1 - p_1 \supset \bar{a}$ und $1 - p_2 \supset \bar{b}$.

Bei Benutzung des Randes als Grundbegriff hat man als äquivalentes Axiom:

A^r . zu jedem Paar von Primsomen p_1, p_2 mit $p_1 \cdot p_2 = 0$ gibt es Somen a, b mit $ab = 0$, $p_1 \subset a(a^r)'$ und $p_2 \subset b(b^r)'$.

Duale Umsetzung liefert als mit A^r gleichwertig:

A_r . zu jedem Paar p_1, p_2 von Primsomen mit $(1 - p_1) + (1 - p_2) = 1$ gibt es Somen a, b mit $a + b = 1$, $1 - p_1 \supset a + (a_r)'$ und $1 - p_2 \supset b + (b_r)'$.

Wir überlassen dem Leser die Formulierung der übrigen Trennungsaxiome mittels offenen Kernes oder Randes¹⁰⁾, und der dualen Grundbegriffe.

¹⁰⁾ Siehe ALBUQUERQUE, loc. cit. 6), S. 193—196; auch RIDDER, loc. cit. 1), § 28.

Mathematics. — *Non-homogeneous binary quadratic forms.* IV. By H. DAVENPORT. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of May 31, 1947.)

1. The present paper is a continuation of paper II of this series¹⁾. We are concerned with the minimum of the product

$$|(\xi - a)(\xi' - b)|,$$

where ξ is an arbitrary integer of the field $k(\theta)$, say

$$\xi = x + \theta y, \quad \theta = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}),$$

and a, b are given real numbers. It was proved in II that if a, b are not of the form

$$a = \frac{1}{2}\tau + \xi_0, \quad b = \frac{1}{2}\tau' + \xi'_0. \quad \dots \quad (1)$$

nor of the form

$$a = \frac{1}{\sqrt{5}}\tau + \xi_0, \quad b = -\frac{1}{\sqrt{5}}\tau' + \xi'_0. \quad \dots \quad (2)$$

where τ is a unit and ξ_0 an integer of $k(\theta)$, then there exists an integer ξ satisfying

$$|(\xi - a)(\xi' - b)| < \frac{1}{6.34}.$$

The question of the existence of a third minimum was left unsolved, though it was proved that if such a third minimum exists, it cannot be less than

$$\frac{1}{4\theta} = \frac{1}{6.472\dots} \quad \dots \quad (3)$$

I have now established the existence of a third minimum, and indeed of an infinite sequence of minima having values greater than (3). These minima occur when

$$a = \frac{\tau}{\alpha_m} + \xi_0, \quad b = \frac{\tau'}{\alpha'_m} + \xi'_0 \quad (\text{or vice versa}), \quad \dots \quad (4)$$

where τ is a unit and ξ_0 an integer of $k(\theta)$, and where m is an odd positive integer, and α_m is defined by

$$\alpha_m = \frac{2(\theta^{n+1} - 1)}{\theta^n + 1}, \quad n = 3m. \quad \dots \quad (5)$$

¹⁾ Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 50 (1947) 378—389.